数学ＩＡシケプリ テスト対策編

平成17年9月22日

上村先生のテストは毎年同じような形式、問題が出ているらしいです。そのため（今年も同じような形式で問題が出題されるなら）あまり時間をかけずに高得点を狙えます。それを考えて作ったのがこのシケプリテスト対策編です。しかし、今年から形式が変わったとしても製作者は一切責任をもてません。

このプリントだけを勉強するという方は、それをわかった上でお使い下さい。

試験傾向

過去問からの予測です。「数列・集合・関数」から１題、「多変数関数の微分法」から２題、「テイラー展開」から１題、「多変数関数の極値」から１題の計５題出題されます。
問１は「数列・集合・関数」からの出題です。収束の定義とコーシーの判定法ができれば何とかなるでしょう。
問２、問３は「多変数関数の微分法」からの出題です。多変数合成関数の偏微分公式とシュワルツの定理を覚え、演習すれば解けます。問４は「テイラー展開」からの出題です。５つのテイラー展開とその成り立つ範囲を覚えましょう。あとテイラー展開の考え方を知ればいいです。問５は「多変数関数の極値」からの出題です。ここは慣れれば大丈夫です。
授業中に扱った定理の証明をせよ、などといった問題は出てないらしいので対策が立てやすいです。ただ、９０分という時間には気をつけて下さい。思っているより短いです。

数列・集合・関数

収束の定義

$\forall\varepsilon > 0$ に対して $n > N(\in \mathbf{R}) \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon$ のとき、
数列 a_n は a に収束する
と定義します。

つまり、任意の（すべての）正の実数 ε に対して、n がある自然数 N よりも大きいという条件を満たす n では $a - \varepsilon < a_n < a - \varepsilon$ であるとき、
数列 a_n は a に収束すると定義します。

逆に、数列 a_n が a に収束するとき、どんな正の実数を選んでも n がある自然数 N よりも大きいならば $a - \varepsilon < a_n < a - \varepsilon$ となる自然数 N があるということになります。

数列の収束の例ですが、関数の収束も同じように定義します。

例
$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ なのは
$\forall\varepsilon > 0$ に対して $N > \frac{1}{\varepsilon}$ とすれば
$n > N \Rightarrow |a_n - 0| = \frac{1}{n} < \varepsilon$ だからである。
$N > \frac{1}{\varepsilon} \quad \Leftrightarrow \quad \varepsilon > \frac{1}{N}$
$n > N \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{N} > \frac{1}{n}$

例
無限数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が収束するならば
a_n は有界数列である。つまりすべての n に対して $|a_n| \leqq M$ となる M が存在する。
a_n の収束する値を a として、
a_n の収束の定義で $\varepsilon = 1$ として
$n > N$ なら $|a_n - a| < 1$ となる N が存在する。
$|a_n - a| < 1$ より $-a + 1 < a_n < a + 1$
$\max(|a_1|, |a_2|, |a_3|, \ldots, |a_N|, |-a+1|, |a+1|) = L$ とすれば
$|a_n| \leqq L \ \ \forall n$ だから
a_n は有界数列である。

三角不等式
実数 a, b において $|a + b| \leqq |a| + |b|$ が成り立つ
これを三角不等式という
$x + y = x - z + z - y$ と見ることにより
$|x + y| \leqq |x - z| + |z - y|$ も成り立つ

　コーシーの判定法
コーシーの判定法とは

数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$が収束する
$\Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0$ に対し $n,m > N \quad \Rightarrow |a_n - a_m| < \varepsilon$となる自然数 N がとれる

というものです。
極限値を求めずに数列そのものから収束するかどうかを判定する方法です。

　例
$a_n = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{n^2}$
$n > m$ として
$a_n - a_m = \frac{1}{(m+1)^2} + \frac{1}{(m+2)^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}$
$< \frac{1}{m(m+1)} + \frac{1}{(m+1)(m+2)} + \cdots + \frac{1}{(n-1)n}$
$= \frac{1}{m} - \frac{1}{m+1} + \frac{1}{m+1} - \frac{1}{m-2} + \cdots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$
$= \frac{1}{m} - \frac{1}{n} < \frac{1}{m}$
$\forall\varepsilon > 0$ に対して $\frac{1}{N} < \varepsilon$となるように N をとり $n > m > N$ とすると $|a_n - a_m| < \frac{1}{m} < \frac{1}{N} < \varepsilon$
よって、コーシーの判定法より a_nは収束する。

　例
$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} \quad n = 1, 2, \ldots$
$a_1 = 1, a_2 = \frac{3}{2}, a_3 = \frac{11}{6}, \ldots$
$$
\begin{aligned}
a_{2n} - a_n &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2n} - (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}) \\
&= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} \\
&> \underbrace{\frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \cdots + \frac{1}{2n}}_{n\text{ 個}} = \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$
数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$がもしコーシーの判定法の条件を満たすなら$\varepsilon < \frac{1}{2}$に対し
ある N がとれて $n,m > N \ \Rightarrow \ |a_n - a_m| < \varepsilon < \frac{1}{2}$となるが
上で見たようにこの a_nはそうなっていない。
$\therefore$ コーシーの判定法よりこの a_nは収束しない
特に $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty \quad 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots = \infty \ \ as \ \ n \to \infty$
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$は$\alpha > 1$ なら収束$\alpha \leqq 1$ なら発散である

追加

上に有界である単調増加 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$

(全ての n に対して $a_n \geqq M$ となる M が存在し，常に $a_n \leqq a_{n+1}$である数列)

は収束する

下に有界である単調減少数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は収束する

例

$a_n = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{n^2}$

このとき a_nは単調増加数列であり

$a_n = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{n^2}$

$< 1 + \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \cdots + \frac{1}{(n-1) \times n}$

$= 1 + \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$

$= 2 - \frac{1}{n} < 2$

と上に有界だから a_nは収束する。

例

数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$は $a_1 = \frac{3}{4}, a_{n+1} = \frac{3}{2}a_n(1 - a_n)$ で定められている

$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{2}a_n(1 - 3a_n)$ より

$0 < a_n < \frac{1}{3} \Rightarrow a_{n+1} - a_n > 0 \Leftrightarrow a_{n+1} > a_n$

$a_2 = \frac{9}{32} < \frac{1}{3}$より数列 $a_2, a_3, \ldots$ は上に有界な単調増加数列

よって $\{a_n\}_{n=2}^{\infty}$は収束する

それは $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$に等しく、それを a とおくと

$a = \frac{3}{2}a(1 - a)$ である。

$a = 0, \frac{1}{3}$

$a = 0$ は不適だから $a = \frac{1}{3}$

$\therefore \lim_{n \to \infty} a_n = \frac{1}{3}$

ちなみに、上に有界である単調増加数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は

$a_1 \leqq a_2 \leqq \cdots \leqq a_n \leqq a_{n+1} \leqq \ldots$ 　より

$\forall\, n \in \mathbf{R}$ 　に対して　$a_n \geqq a_1$ 　で下にも有界

よって、この数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は有界

「多変数関数の微分法」

偏微分とは、
多変数関数において微分するもの以外を固定して微分したものです。
２変数関数 $f(x,y)$ の (a,b) における偏微分は
$\dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b)=\lim_{x\to a}\dfrac{f(x,b)-f(a,b)}{x-a}$ $\leftarrow f(x,b)$ の１変数関数としての微分係数
$\dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b)=\lim_{y\to b}\dfrac{f(a,y)-f(a,b)}{y-b}$ $\leftarrow f(a,y)$ の１変数関数としての微分係数
となります。
∂:round　di(ラウンド　ディー)
ここで、 $\lim_{h\to 0}\dfrac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h}$ ， $\lim_{h\to 0}\dfrac{f(x,y+h)-f(x,y)}{h}$ が存在すればこれを偏導関数といい、
それぞれ、 $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ と書きます。

２変数関数 $f(x,y)$ が偏微分可能なら $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y),\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ があり、
これらがさらに偏微分可能なら
$\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)$, $\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)$, $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)$, $\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)$
の４つの関数が定められます
これらを f の２階偏導関数といい、それぞれ
$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$
あるいは f_{xx} , f_{xy} , f_{yx} , f_{yy} と書きます
f_{xy} と f_{yx} は違います。
f_{xy} は x で微分した後、y で微分、f_{yx} は y で微分した後、x で微分します。

$\dfrac{\partial f}{\partial x},\dfrac{\partial f}{\partial y},\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$ が存在し $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$ が連続のとき
$\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$ が存在して $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$
という定理がシュワルツの定理です。
また C^1 級とは f が偏微分可能で偏導関数が連続であること
C^2 級とは f の２階偏導関数が全て連続であることで
C^2 級ならこの定理が成り立ち、$\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$ です。
初等関数 $(+,-,\times,\div,\sqrt{\ },\log,\sin\cos,a^x$ などの関数) であれば分母 $=0$ のところ以外で C^2 級が成り立ちます。(
分母 $=0$ でも C^2 級が成り立ちことがあります。)

　例
C^2 級の関数 $u(x,y)$ が $u_x+u_y=(x+y)e^x$ を満たすとき　(1)
$u_{xx}-u_{yy}=(x+y)e^x$ を満たすことを示せ
(1) を x で微分して $u_{xx}+u_{yx}=(x+y)e^x+e^x$
(1) を y で微分して $u_{xy}+u_{yy}=e^x$
$u(x,y)$ は C^2 級だから $u_{xy}=u_{yx}$
この３つより
$u_{xx}-u_{yy}=(x+y)e^x$

一般に、 $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)-\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)=\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}-\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ が C^2 級に対して成り立ちます。

多変数合成関数の微分法

１変数関数では、$\dfrac{df}{dx}=\dfrac{df}{dx}\cdot\dfrac{dx}{dt}$でした。

これを多変数に拡張します

$T=(t_1,t_2,\ldots,t_m)\in E\subset\mathbf{R}^m$

$X=(x_1,x_2,\ldots,x_m)\in D\subset\mathbf{R}^n$

$E\xrightarrow{\text{写像}\Phi}D\xrightarrow{\text{写像 }f}\mathbf{R}$

$E\xrightarrow{F}\mathbf{R}$

$F(T)=f\left(\Phi(T)\right)$ $\leftarrow f$ とΦ の合成関数 $f\circ\Phi$と書く

$$\Phi\ \begin{cases} x_1=x_1(t_1,t_2,\ldots,t_m)\\ x_2=x_2(t_1,t_2,\ldots,t_m)\\ \vdots\quad\ =\vdots\\ x_n=x_n(t_1,t_2,\ldots,t_m)\end{cases}$$

$x_1\leftarrow$ 数

$x_1(t_1,t_2,\ldots,t_m)\leftarrow$　関数　変数 t_1〜t_mによって求まる

$F(t_1,t_2,\ldots,t_m)=f\left(x_1(t_1,t_2,\ldots,t_m),x_2(t_1,t_2,\ldots,t_m),\ldots,x_n(t_1,t_2,\ldots,t_m)\right)$ とする。

f が微分可能な n 変数関数で

$x_1(t_1,t_2,\ldots,t_m),x_2(t_1,t_2,\ldots,t_m),\ldots\ ,x_n(t_1,t_2,\ldots,t_m)$ が全て微分可能な n 変数関数

$\Rightarrow F(t_1,t_2,\ldots,t_m)$ も微分可能で

$$\frac{\partial F}{\partial t_j}=\frac{\partial F}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial x_1}{\partial t_j}+\frac{\partial F}{\partial x_2}\cdot\frac{\partial x_2}{\partial t_j}+\ldots\frac{\partial F}{\partial x_n}\cdot\frac{\partial x_n}{\partial t_j}\quad(j=n=1,2,\ldots\ ,m)$$

正確に示すと

$$\frac{\partial F}{\partial t_j}(t_1,t_2,\ldots,t_m)$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial F}{\partial x_i}\left(x_1(t_1,t_2,\ldots,t_m),x_2(t_1,t_2,\ldots,t_m),\ldots,x_n(t_1,t_2,\ldots,t_m)\right)\cdot\frac{\partial x_i}{\partial t_j}$$

とくに $n=2$ のときは

$$\frac{\partial F}{\partial t_j}=\frac{\partial F}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial t_j}+\frac{\partial F}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial t_j}$$ です。

演習問題

1. $u(x,y)=e^{\frac{x}{y}}\log y$(ただし、$y>0$) のとき

$$x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{u}{\log y}$$

となることを示せ。

2. $x+y>0$ なる x,y に対して $f(x,y)=x\log(x+y)$ とするとき、次を求めよ。

(1) $\dfrac{\partial f}{\partial x}-\dfrac{\partial f}{\partial y}$ (2) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}-\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ (3) $\dfrac{\partial^4 f}{\partial x^4}-\dfrac{\partial^4 f}{\partial y^4}$

3. 2次元極座標表示 $\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{cases}$ で

$\dfrac{\partial f}{\partial r},\dfrac{\partial f}{\partial \theta}$を $r,\theta,\dfrac{\partial f}{\partial x},\dfrac{\partial f}{\partial y}$を用いて表せ。

4. f を $\mathbf{R}^2$上の C^1級関数とし、$F(x,y,z)=f(x^2+2ye^z,y^2+2xe^z)$ とするとき

$$(y^2e^z-xe^{2z})\frac{\partial F}{\partial x}+(x^2e^z-ye^{2z})\frac{\partial F}{\partial y}+(e^{2z}-xy)\frac{\partial F}{\partial z}=0$$

が成立することを証明せよ。

5. $\mathbf{R}^2$上の C^2級関数 $u(x,y)$ が、$\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial y}=\log(x^2+xy+y^2+1)$ を満たすとき

$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ および $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$を求めよ。

演習問題解説

1.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{y}e^{\frac{x}{y}}\log y$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{x}{y^2}e^{\frac{x}{y}}\log y + \frac{1}{y}e^{\frac{x}{y}}$$
$$\text{よって}\quad x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{x}{y}e^{\frac{x}{y}}\log y - \frac{x}{y}e^{\frac{x}{y}}\log y + e^{\frac{x}{y}}$$
$$= e^{\frac{x}{y}} = \frac{u}{\log y}$$

2.

(1) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{x}{x+y} + \log(x+y),\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{x}{x+y}$

よって $\dfrac{\partial f}{\partial x} - \dfrac{\partial f}{\partial y} = \log(x+y)$

(2) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$

$= \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x} - \dfrac{\partial f}{\partial y}\right) + \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x} - \dfrac{\partial f}{\partial y}\right) \ \leftarrow\ f$ は C^2級だから $= \dfrac{\partial}{\partial x}(\log(x+y)) + \dfrac{\partial}{\partial y}(\log(x+y))$

$= \dfrac{2}{x+y}$

(3) $\dfrac{\partial^4 f}{\partial x^4} - \dfrac{\partial^4 f}{\partial y^4} = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) \ \leftarrow\ f$ は C^4級だから

$= \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\dfrac{2}{x+y}\right) + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\dfrac{2}{x+y}\right)$

$= \dfrac{4}{(x+y)^3} + \dfrac{4}{(x+y)^3} = \dfrac{8}{(x+y)^3}$

3.

$$\frac{\partial f}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial r}$$
$$= \cos\theta\frac{\partial f}{\partial x} + \sin\theta\frac{\partial f}{\partial y}$$
$$\frac{\partial f}{\partial \theta} = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial \theta}$$
$$= -r\sin\theta\frac{\partial f}{\partial x} + r\cos\theta\frac{\partial f}{\partial y}$$

4.

$s=x^2+2ye^z, t=y^2+2xe^z$とおく。このとき

$F(x,y,z)=f(x^2+2ye^z, y^2+2xe^z)=f(s,t)$

$$\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial s}\cdot\frac{\partial s}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial t}\cdot\frac{\partial t}{\partial x}$$

$$=\frac{\partial f}{\partial s}(s,t)\times 2x+\frac{\partial f}{\partial t}(s,t)\times 2e^z$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial s}\cdot\frac{\partial s}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial t}\cdot\frac{\partial t}{\partial y}$$

$$=\frac{\partial f}{\partial s}(s,t)\times 2e^z+\frac{\partial f}{\partial t}(s,t)\times 2y$$

$$\frac{\partial F}{\partial z}=\frac{\partial f}{\partial s}\cdot\frac{\partial s}{\partial z}+\frac{\partial f}{\partial t}\cdot\frac{\partial t}{\partial z}$$

$$=\frac{\partial f}{\partial s}(s,t)\times 2ye^z+\frac{\partial f}{\partial t}(s,t)\times 2xe^z$$

これより

$$(y^2e^z-xe^{2z})\frac{\partial F}{\partial x}+(x^2e^z-ye^{2z})\frac{\partial F}{\partial y}+(e^{2z}-xy)\frac{\partial F}{\partial z}$$

$$=(y^2e^z-xe^{2z})\left\{\frac{\partial f}{\partial s}(s,t)\times 2x+\frac{\partial f}{\partial t}(s,t)\times 2e^z\right\}+(x^2e^z-ye^{2z})\left\{\frac{\partial f}{\partial s}(s,t)\times 2e^z+\frac{\partial f}{\partial t}(s,t)\times 2y\right\}$$
$$+(e^{2z}-xy)\left\{\frac{\partial f}{\partial s}(s,t)\times 2ye^z+\frac{\partial f}{\partial t}(s,t)\times 2xe^z\right\}$$

$$=\frac{\partial f}{\partial s}\ (s,t)\left\{2x\times(y^2e^z-xe^{2z})+2e^z\times(x^2e^z-ye^{2z})+2ye^z\times(e^{2z}-xy)\right\}$$
$$+\frac{\partial f}{\partial t}\ (s,t)\ \left\{2e^z\times(y^2e^z-xe^{2z})+2y\times(x^2e^z-ye^{2z})+2xe^z\times(e^{2z}-xy)\right\}\quad=0$$

$$\therefore\quad (y^2e^z-xe^{2z})\frac{\partial u}{\partial x}+(x^2e^z-ye^{2z})\frac{\partial u}{\partial y}+(e^{2z}-xy)\frac{\partial u}{\partial z}=0$$

5.

$u(x,y)$ はC^2級関数だから

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

$$=\frac{2x+y}{x^2+xy+y^2+1}+\frac{x+2y}{x^2+xy+y^2+1}=\frac{3(x+y)}{x^2+xy+y^2+1}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

$$=\frac{2x+y}{x^2+xy+y^2+1}-\frac{x+2y}{x^2+xy+y^2+1}=\frac{x-y}{x^2+xy+y^2+1}$$

「テイラー展開」

$f(x)$ は無限回微分可能とする

$f(x)=f(c)+f'(c)(x-c)+\dfrac{f''(c)}{2!}(x-c)^2+\cdots+\dfrac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n+R_{n+1}$

で x を固定して、$\displaystyle\lim_{n\to\infty}R_{n+1}=0$ であれば、n の級数として

$f(x)=f(c)+f'(c)(x-c)+\dfrac{f''(c)}{2!}(x-c)^2+\cdots+\dfrac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n+\dots$ となる

$\displaystyle f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n$ ただし $0!=1$ とする

これをテイラー展開という

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}R_{n+1}=0$ という条件があるため

すべての $f(x)$ で成り立つわけでもなく, x の範囲も限られる

覚えるテイラー展開の式

$$e^x=1+x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\cdots+\frac{1}{n!}x^n+\dots\quad=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n\quad(-\infty<x<\infty)$$

$$\sin x=x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5-\frac{1}{7!}x^7+\cdots+\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}+\dots\quad=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}\quad(-\infty<x<\infty)$$

$$\cos x=1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4-\frac{1}{6!}x^6+\dots\quad+\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}+\dots\quad=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n!}x^{2n}\quad(-\infty<x<\infty)$$

$$\log(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4+\cdots+\frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n+\dots\quad=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n\quad(-1<x\leqq 1)$$

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\cdots+x^n+\dots\quad=\sum_{n=0}^{\infty}x^n\quad(-1<x<1)$$

これらは成り立つ範囲も含めて覚える。

また、x を固定して n の極限を考えたが、n を固定して x の極限を考えてもいい。

$f(x)$ は無限回微分可能とし、

$f(x)=f(c)+f'(c)(x-c)+\dfrac{f''(c)}{2!}(x-c)^2+\cdots+\dfrac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n+R_{n+1}(x)\leftarrow$ 今度は R_{n+1} は x の関数

のとき $\displaystyle\lim_{x\to c}\frac{R_{n+1}(x)}{(x-c)^n}=0$ である。

よって $R_{n+1}=o\left((x-c)^n\right)$ と書ける。

ただし、$f(x)=o\left(g(x)\right)\ \ as\quad x\to c$ の定義は $\displaystyle\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}=0$ である。

例

e^{2x}のテイラー展開

$$e^{2x}=1+2x+\frac{1}{2!}(2x)^2+\frac{1}{3!}(2x)^3+\frac{1}{4!}(2x)^4+\dots$$
$$=1+2x+2x^2+\frac{4}{3}x^3+\frac{2}{3}x^4+\dots\ (-\infty<x<\infty)$$

$e^x\sin x$のテイラー展開

$$e^x\sin x=(1+x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{4!}x^4+\dots)(x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5+\dots)$$
$$=x+x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{30}x^5+\dots\ (-\infty<x<\infty)$$

$e^{\sin x}$のテイラー展開

$$e^{\sin x}=1+\sin x+\frac{1}{2!}(\sin x)^2+\frac{1}{3!}(\sin x)^3\frac{1}{4!}(\sin x)^4+\dots$$
$$=1+(x-\frac{1}{3!}x^3+\dots)+\frac{1}{2!}(x-\frac{1}{3!}x^3+\dots)^2+\frac{1}{3!}(x-\frac{1}{3!}x^3+\dots)^3+\frac{1}{4!}(x-\frac{1}{3!}x^3+\dots)^4+\dots$$
$$=1+x+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{8}x^4+\dots$$

例

$\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{x^2}\right)$を求める

$\displaystyle\sin x=x-\frac{1}{3!}x^3+o(x^4)\quad as\quad x\to 0$ より

$$\sin^2 x=\left(x-\frac{1}{3!}x^3+o(x^4)\right)^2=x^2-\frac{1}{3}x^4+o(x^4)$$

したがって

$$\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{x^2}=\frac{x^2-\sin^2 x}{x^2\sin^2 x}$$
$$=\frac{x^2-\left(x^2-\frac{1}{3}x^4+o(x^4)\right)}{x^2\left(x^2-\frac{1}{3}x^4+o(x^4)\right)}$$
$$=\frac{\frac{1}{3}x^4+o(x^4)}{x^4+o(x^4)}\ \leftarrow\ -o(x^4)=o(x^4)$$
$$=\frac{\frac{1}{3}+o(1)}{1+o(1)}\quad as\quad x\to 0$$
$$\therefore\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{x^2}\right)=\frac{1}{3}$$

「多変数関数の極値」

多変数関数の極値を求めることを考えます。
多変数関数の極値の定義は
$f:\ D \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R} \quad X = (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) \in D$ とする
A の近傍の任意の点 $X(\neq A)$ に対し
$f(A) > f(X)$ が成り立つとき
f は A で極大であると定義する
同様に
A の近傍の任意の点 $X(\neq A)$ に対し
$f(A) < f(X)$ が成り立つときは
f で A 極小であると定義する

そして極値であるための必要条件は
D が開集合　$A \in D$ において
f は偏微分可能のとき
f が A で極大（または極小）$\Rightarrow f_{x_i}(A) = 0 \ \ (i = 1, 2, 3, \ldots, n)$

ここから、必要条件から出た候補の中から極値になるものを選びます。１変数関数のときと同じ考え方です。
そこで十分条件を示しますが、２変数関数の場合のみを示します。３変数関数以上では十分条件であることを示すのは面倒くさく、授業では扱っていませんのでテストにはまず出ないでしょう。
$f\ :D \subset \mathbf{R}^2\ \to \mathbf{R}$ で f は C^2級
C^2級とは f の２階偏導関数が全て連続であることです
$A = (x, y) \in D$ とします
極値であるための必要条件より
$f_x(A) = 0$ かつ $f_y(A) = 0$ をみたしている (x, y) の組があります。
$Hesse$ 行列 H は、$H = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{pmatrix} \quad \leftarrow \ f$ は C^2級だから、$f_{xy} = f_{yx}$
にこの組を代入します。
このとき $\begin{pmatrix} a & h \\ h & b \end{pmatrix}$ となりますが、
$ab - h^2 > 0$ かつ $a < 0$ のとき，f は A で極大
$ab - h^2 > 0$ かつ $a > 0$ のとき，f は A で極小
$ab - h^2 < 0$ のときは極値ではありません。(saddle point という)
そして、f に $A = (x, y)$ を代入して出てくる値が極値です
$(ab - h^2 = 0$ のときについてわかりません。わかる方教えてください。)

例

$f(x,y)=x^3-xy+y^2$の極値を調べよ

$f_x(x,y)=3x^2-y$, $f_y(x,y)=-x+2y$

$$\begin{cases} f_x(x,y)=0 \\ f_y(x,y)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2-y=0 \\ -x+2y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x,y)=(0,0) \\ (x,y)=\left(\dfrac{1}{6},\dfrac{1}{12}\right) \end{cases}$$

これより極値を取る点の候補は

$(x,y)=(0,0),\left(\dfrac{1}{6},\dfrac{1}{12}\right)$

$f_{xx}=6x, f_{xy}=-1, f_{yy}=2$

よって、$Hesse$ 行列 H は、$H=\begin{pmatrix} 6x & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

$(x,y)=(0,0)$ では $H=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

$ab-h^2=-1<0$

$(0,0)$ は f のsaddle point

$(x,y)=\left(\dfrac{1}{6},\dfrac{1}{12}\right)$ では $H=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

$ab-h^2=1>0$ で $1>0$

f は $\left(\dfrac{1}{6},\dfrac{1}{12}\right)$ で極小　極小値は $f\left(\dfrac{1}{6},\dfrac{1}{12}\right)=-\dfrac{1}{432}$

$f(x,y)=x^3-6xy+15x+y^2$の極値を調べよ

$f_x(x,y)=3x^2-6y+15$, $f_y(x,y)=-6x+2y$

$$\begin{cases} f_x(x,y)=0 \\ f_y(x,y)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2-6y+15=0 \\ -6x+2y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x,y)=(1,3) \\ (x,y)=(5,15) \end{cases}$$

これより極値を取る点の候補は

$(x,y)=(0,0),(5,15)$

$f_{xx}=6x, f_{xy}=-6, f_{yy}=2$

よって、$Hesse$ 行列 H は、$H=\begin{pmatrix} 6x & -6 \\ -6 & 2 \end{pmatrix}$

$(x,y)=(0,0)$ では $H=\begin{pmatrix} 0 & -6 \\ -6 & 2 \end{pmatrix}$

$ab-h^2=-36<0$

$(0,0)$ は f のsaddle point

$(x,y)=(5,15)$ では $H=\begin{pmatrix} 30 & -6 \\ -6 & 2 \end{pmatrix}$

$ab-h^2=24$ で $30>0$

f は $(5,15)$ で極小　極小値は $f(5,15)=-25$

極値の問題

解説なしで答えだけの問題です

1. $f(x,y) = x^3 + 6xy + y^3$の極値を求めよ
2. $f(x,y) = 4x^3 + 6xy + y^2 - 2y$ の極値を求めよ
3. $f(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 3x$ の極値を求めよ

1. $(x,y) = (-2,-2)$ で極大値 8 をとる
2. $(x,y) = (1,-2)$ で極小値 0 をとる
3. $(x,y) = (1,0)$ で極小値 $-2, (x,y) = (-1,0)$ で極大値 2 をとる

数学IA 前期試験　理科１類 18,19,20,21 組　（担当　上村）
２００５年９月５日（月）　１０：５０－１２：２０
両面解答用紙２枚 計算用紙１枚

（注） 教科書、ノート類の持ち込みはしてはいけない

問１ 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ について、次の問に答えよ。
(1) 次の 1 から 4 のうち、$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ と同値であるものを選び、その番号を記せ。
(番号だけを明記すればよい。)
1 $\sup_n a_n = \inf_n a_n = 0$
2 $\limsup_{n\to\infty} a_n = \liminf_{n\to\infty} a_n = 0$
3 任意の $\varepsilon > 0$ に対し、$n > N$ ならば $|a_n| < \dfrac{\varepsilon}{4}$ となるような自然数 N が存在する。
4 任意の $\varepsilon > 0$ に対し、$n > m > N$ ならば $|a_m + a_{m+1} + \cdots + a_n| < \varepsilon$
となるような自然数 N が存在する。
(2) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ ならば、数列 $b_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{2^{n-k}}$ も 0 に収束することを証明せよ。

問２ $f(x, y)$ は $\mathbf{R}^2$ の領域 $\{(x, y) | x + y > 0\}$ で定義された C^4 級関数で

$$\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} = \log(x + y)$$

をみたすとする。このとき、次を求めよ。
(1) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ (2) $\dfrac{\partial^4 f}{\partial x^4} - \dfrac{\partial^4 f}{\partial y^4}$

問３ $f(x, y)$ は $\mathbf{R}^2$ 上の C^2 級関数で、任意の $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ に対し、関係式

$$f(x + y, x - y) - 2f(x, y) = x$$

をみたすとする。このとき、次の問に答えよ。
(1) $f_x(0, 0)$ および $f_y(0, 0)$ の値を求めよ。
(2) 任意の $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ に対し、関係式

$$f_{xx}(x + y, x - y) + f_{yy}(x + y, x - y) = f_{xx}(x, y) + f_{yy}(x, y)$$

が成り立つことを証明せよ。

問４ (1) $x = 0$ を含む区間で $x = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n (e^x - 1)^n$ が成り立つように定数 a_n $(n = 1, 2, \ldots)$ を定めよ。
また、この式が成り立つ x の範囲を記せ。
(2) $x \to 0$ のとき、$\dfrac{x}{e^x - 1} = a + bx + cx^2 + dx^3 + o(x^3)$ となるように
定数 a, b, c, d を定めよ。

問５ 関数 $f(x, y) = x^3 - 6xy + 8y^3$ の極値を求めよ。

数学 IA 前期試験　理科１類５，６，１５，２９組　（担当　上村）
２００４年9月1日（水）　１０：５０－１２：２０
両面解答用紙２枚 計算用紙１枚

（注） 教科書、ノート類の持ち込みはしてはいけない

問１ 次の命題は正しいか誤りかを判定し、正しければ証明し誤りなら反例を挙げよ。

(1) 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$が $\lim_{n\to\infty} n^2(a_n - a_{n-1}) = 1$ をみたせば、数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$は収束する。

(2)f が $\mathbf{R}^2$上の偏微分可能な関数でφ とψが $\mathbf{R}$ 上の微分可能な関数ならば、

$F(t) = f(\varphi(t), \psi(t))$ で定まる関数 F は $\mathbf{R}$ 上の微分可能な関数になる。

問２ $z = z(x, y)$ が $\mathbf{R}^2$上の C^2級関数で $xf(z) + g(z) = y$ なる関係式を満たしている (ただし f, g は $\mathbf{R}$ 上の C^1級関数とする) とき

(1)z は $z_x + f(z)z_y = 0$ を満たすことを示せ。
ただし、ここで z_x, z_yは $z = (x, y)$ の偏導関数を表す。

(2)z は ${z_y}^2 z_{xx} - 2z_x z_y z_{xy} + {z_x}^2 z_{yy} = 0$ を満たすことを示せ.
ただし，ここで z_{xx}, z_{xy}, z_{yy}は $z = z(x, y)$ の２階の偏導関数を表す.

問３ $\dfrac{\partial f}{\partial x}(3, 1) = 1$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(3, 1) = -1$ なる $\mathbf{R}^2$上の C^2級の関数 $f = f(x, y)$ に対し。

$$F(u, v) = f(u + v, u - v)$$

とおくとき

(1) $\dfrac{\partial F}{\partial u} + \dfrac{\partial F}{\partial v}$の $(u, v) = (2, 1)$ における値をを求めよ。

(2) $\dfrac{\partial^2 F}{\partial u^2} - \dfrac{\partial^2 F}{\partial v^2}$の $(u, v) = (2, 1)$ における値をを求めよ。

問４ $|x| < 1$ において $\dfrac{\log(1 + x)}{1 - x} = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$が成り立つように定数 $a_n (n = 1, 2, \ldots)$ を定めるとき

(1)a_1, a_2, a_3の値を求めよ.

(2) $\lim_{n\to\infty} a_n$の値を求めよ.

問５ 関数 $f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 3x$ の極値を求めよ.

数学IA 前期試験　理科１類５，６，１５，２９組　（担当　上村）
２００３年9月３日（水）　１０：５０－１２：２０
両面解答用紙２枚　計算用紙１枚

（注）教科書、ノート類の持ち込みはしてはいけない

問１　数列$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$について次の命題は正しいか誤りかを判定し、正しければ証明し誤りなら反例を挙げよ。

(1)$a_n - a_{n-1} = \dfrac{1}{n^n}$ $(n = 2, 3, \dots)$ をみたせば、$\lim_{n\to\infty} a_n$が存在する

(2)$a_{n-1} + a_n + a_{n+1} = 0$ $(n = 2, 3, \dots)$ をみたせば $\lim_{n\to\infty} a_n$が存在する

問２　$F(x, y, z)$ を微分可能な３変数関数で、z についての偏導関数 F_zが $F_z(x, y, z) \neq 0$ をみたすものとする。$z = f(x, y)$ が $F(x, y, f(x, y)) = 0$ をみたすとき、次が成り立つことを示せ

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z}$$

ただし、$z = f(x, y)$ は偏微分可能であると仮定してよい

問３　$t > 0$ に対し, $u = \sqrt{t}\, e^{-\frac{x^2}{4t}}$ とするとき, 次の問に答えよ。

(1) $x \neq 0$ のとき, $\lim_{t\to+\infty} u(x, t)$ を求めよ。

(2) $\dfrac{\partial u}{\partial t} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$を求めよ。

(3) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 2\dfrac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} + \dfrac{\partial^4 u}{\partial x^4}$を求めよ。

問４　$|x|$ が十分大きな実数 x に対し, $x - x^2 \log\left(1 + \dfrac{1}{x}\right) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{x^n}$が成り立つように数列 $a_n (n = 0, 1, \dots)$ を定めよ。また, この式が成り立つ x の条件を記せ

問５　関数 $f(x, y) = x^3 - xy + y^2$ の極値を求めよ

2005年問１　問１は後回しにしたほうがいいです。また、わからなければ無理に解く必要はないです。
(1)
１　$\sup_n a_n = 0$ とは $\sup(a_1, a_2, \dots, a_n, \dots)$ つまり、無限数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$の上限のことだそうです。
よって、$\forall\, n(\in \mathbf{R})$ に対し $a_n \leqq \sup_n a_n$ となるということを指しているらしいです。
$\sup_n a_n = \inf_n a_n = 0 \iff \forall\, n(\in \mathbf{R})$ に対し $a_n \leqq 0$ かつ $a_n \geqq 0$
$\iff \forall\, n(\in \mathbf{R})$ に対し $a_n = 0$　　よって、これは $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ と同値ではありません。

２　$\limsup_{n\to\infty} a_n = \liminf_{n\to\infty} a_n = a \iff \lim_{n\to\infty} a_n = a$ だから
これは $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ と同値です。

３　$\varepsilon' = \dfrac{\varepsilon}{4}$ とおけば、任意の $\varepsilon > 0$ に対し $n > N$ ならば $|a_n| < \dfrac{\varepsilon}{4}$ となるような自然数 N が存在する
$\Leftrightarrow$ 任意の $\varepsilon' > 0$ に対し $n > N$ ならば $|a_n| < \varepsilon'$ となるような自然数 N が存在する
よって、これは $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ と同値です。

４　$a_n = \dfrac{1}{n}$ のとき、$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ である。
また、$n = 2m-1$ のとき、$n+1 = 2m$ だから、
$y = \dfrac{1}{x}$ のグラフを書き m から $n+1$ までの積分と面積を考えて、
$$a_m + a_{m+1} + \cdots + a_n = \frac{1}{m} + \frac{1}{m+1} + \cdots + \frac{1}{n} > \log 2$$
よって、これは $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ と同値ではありません。

(2) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ より、$\forall\varepsilon > 0$ に対して $n > N$ ならば $|a_n| < \varepsilon$ となる自然数 N がある。
$$|b_n| = \left|\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{2^{n-k}}\right| = \left|\sum_{k=1}^{N} \frac{a_k}{2^{n-k}} + \sum_{k=N+1}^{n} \frac{a_k}{2^{n-k}}\right| \leqq \left|\sum_{k=1}^{N} \frac{a_k}{2^{n-k}}\right| + \left|\sum_{k=N+1}^{n} \frac{a_k}{2^{n-k}}\right|$$ である。
$$\begin{aligned}
\left|\sum_{k=N+1}^{n} \frac{a_k}{2^{n-k}}\right| &= \left|\frac{a_{N+1}}{2^{n-(N+1)}} + \frac{a_{N+2}}{2^{n-(N+2)}} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{2^{n-(n-1)}} + \frac{a_n}{2^{n-n}}\right| \\
&\leqq \left|\frac{a_{N+1}}{2^{n-(N+1)}}\right| + \left|\frac{a_{N+2}}{2^{n-(N+2)}}\right| + \cdots + \left|\frac{a_{n-1}}{2^{n-(n-1)}}\right| + \left|\frac{a_n}{2^{n-n}}\right| \\
&= \frac{|a_{N+1}|}{2^{n-(N+1)}} + \frac{|a_{N+2}|}{2^{n-(N+2)}} + \cdots + \frac{|a_{n-1}|}{2} + |a_n| \\
&< \frac{\varepsilon}{2^{n-(N+1)}} + \frac{\varepsilon}{2^{n-(N+2)}} + \cdots + \frac{\varepsilon}{2} + \varepsilon \\
&= \varepsilon\left(\frac{1}{2^{n-(N+1)}} + \frac{1}{2^{n-(N+2)}} + \cdots + \frac{1}{2} + 1\right) \\
&= \varepsilon\left(\frac{1-\left(\dfrac{1}{2^{n-N}}\right)}{1-\dfrac{1}{2}}\right) = 2\varepsilon\left(1 - \frac{1}{2^{n-N}}\right) < 2\varepsilon
\end{aligned}$$
$\left|\sum_{k=1}^{N} \dfrac{a_k}{2^{n-k}}\right| = \dfrac{1}{2^n}\left|\sum_{k=1}^{N} 2^k a_k\right|$　　ここでは N は一定なので $\left|\sum_{k=1}^{N} 2^k a_k\right|$ も一定。
n を大きくすることで、$n > N_0 \geqq N$ ならば $\left|\sum_{k=1}^{N} \dfrac{a_k}{2^{n-k}}\right| = \dfrac{1}{2^n}\left|\sum_{k=1}^{N} 2^k \times a_k\right| < \varepsilon$ となる N_0 がとれる。
これより $\forall\varepsilon > 0$ に対して $n > N_0$ ならば
$|b_n| \leqq \left|\sum_{k=1}^{N} \dfrac{a_k}{2^{n-k}}\right| + \left|\sum_{k=N+1}^{n} \dfrac{a_k}{2^{n-k}}\right| < \varepsilon + 2\varepsilon = 3\varepsilon$　　$3\varepsilon = \varepsilon'$ とすれば
$\forall\, \varepsilon' > 0$ に対し $n > N_0$ ならば $|b_n - 0| < \varepsilon'$ となる自然数 N_0 があるので　$\lim_{n\to\infty} b_n = 0$

最初の「$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ より、$\forall\varepsilon > 0$ に対して $n > N$ ならば $|a_n| < \varepsilon$ となる自然数 N がある」のところを
「$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ より、$\forall\varepsilon > 0$ に対して $n > N$ ならば $|a_n| < \dfrac{\varepsilon}{3}$ となる自然数 N がある」とすれば
$|b_n| < \varepsilon$ となります。

問２　これは確実に解きましょう。

(1)$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(= \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\right)\right)$$
$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\right) \quad \longleftarrow \quad f \text{ は } C^2 \text{ 級だから}$$
$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(\log(x+y)\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\log(x+y)\right)$$
$$= \frac{2}{x+y}$$

(2)$$\frac{\partial^4 f}{\partial x^4} - \frac{\partial^4 f}{\partial y^4}\left(= \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)\right)$$
$$= \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) \quad \longleftarrow \quad f \text{ は } C^4 \text{ 級だから}$$
$$= \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{2}{x+y}\right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{2}{x+y}\right)$$
$$= \frac{4}{(x+y)^3} + \frac{4}{(x+y)^3} = \frac{8}{(x+y)^3}$$

問３ 多変数合成関数の偏微分がわかれば解けます。

(1) $s = x+y, t = x-y$ と考えて $f(x+y, x-y)$ を x, y で偏微分がすぐに求められる人はいいですが
そうでないひとは面倒くさくても $F(x,y) = f(x+y, x-y) = f(s,t)$ とおいて考えましょう。

$F(x,y) = f(x+y, x-y) = f(s,t)$ を x で偏微分すると
$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial s}\cdot\frac{\partial s}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial t}\cdot\frac{\partial t}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x}(x+y, x-y) + \frac{\partial f}{\partial y}(x+y, x-y)$$
正確に書くと、
$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial s}(s,t)\cdot\frac{\partial s}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial t}(s,t)\cdot\frac{\partial t}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial s}(s,t) + \frac{\partial f}{\partial t}(s,t) = \frac{\partial f}{\partial x}(x+y, x-y) + \frac{\partial f}{\partial y}(x+y, x-y)$$
$F(x,y) = f(x+y, x-y) = f(s,t)$ を y で偏微分すると
$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial s}\cdot\frac{\partial s}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial t}\cdot\frac{\partial t}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial s} - \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x}(x+y, x-y) - \frac{\partial f}{\partial y}(x+y, x-y)$$

また、$\dfrac{\partial f}{\partial x}(x+y, x-y) = f_x(x+y, x-y) \quad \dfrac{\partial f}{\partial y}(x+y, x-y) = f_y(x+y, x-y)$

$f(x+y, x-y) - 2f(x,y) = x$ を x, y で偏微分すると
$$f_x(x+y, x-y) + f_y(x+y, x-y) - 2f_x(x,y) = 1 \qquad (a)$$
$$f_x(x+y, x-y) - f_y(x+y, x-y) - 2f_y(x,y) = 0 \qquad (b)$$
(1), (2) に $x = 0, y = 0$ を代入して
$$f_x(0,0) + f_y(0,0) - 2f_x(0,0) = 1 \;\;,\;\; f_x(0,0) - f_y(0,0) - 2f_y(0,0) = 0$$
よって、 $f_x(0,0) = -\dfrac{3}{2}$, $f_y(0,0) = -\dfrac{1}{2}$

(2) (a) を x で偏微分、(b) を y で偏微分する。
$$f_{xx}(x+y, x-y) + f_{xy}(x+y, x-y) + f_{yx}(x+y, x-y) + f_{yy}(x+y, x-y) - 2f_{xx}(x,y) = 0$$
$$f_{xx}(x+y, x-y) - f_{xy}(x+y, x-y) - f_{yx}(x+y, x-y) + f_{yy}(x+y, x-y) - 2f_{yy}(x,y) = 0$$
この二つの式を足して
$$2f_{xx}(x+y, x-y) + 2f_{yy}(x+y, x-y) - 2f_{xx}(x,y) - 2f_{yy}(x,y) = 0$$
$$\therefore \quad f_{xx}(x+y, x-y) + f_{yy}(x+y, x-y) = f_{xx}(x,y) + f_{yy}(x,y)$$

問４　(1) は難しいかもしれません。(2) は計算すればすぐ求められます。

(1) $x=\sum_{n=1}^{\infty}a_n(e^x-1)^n$ に $x=\log(1+t)$ を代入する。

$\log(1+t)\ =\sum_{n=1}^{\infty}a_n\ t^n$

よって、$a_n=\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$ であり、$-1<t\leqq 1$ で成り立つ。

$t=e^x-1$ だから、求める x の範囲は $x\leqq\log 2$

(2) $x\to 0$ では、$e^x=1+x+\dfrac{1}{2!}x^2+\dfrac{1}{3!}x^3+\dfrac{1}{4!}x^4+o(x^4)$

$$\frac{x}{e^x-1}=\frac{x}{x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{4!}x^4+o(x^4)}=\frac{1}{1+\frac{1}{2}x+\frac{1}{6}x^2+\frac{1}{24}x^3+o(x^3)}$$

$\dfrac{x}{e^x-1}=a+bx+cx^2+dx^3+o(x^3)$ となるので、

$$1+o(x^3)=\left(1+\frac{1}{2}x+\frac{1}{6}x^2+\frac{1}{24}x^3+o(x^3)\right)\left(a+bx+cx^2+dx^3+o(x^3)\right)$$

$$\left(1+\frac{1}{2}x+\frac{1}{6}x^2+\frac{1}{24}x^3+o(x^3)\right)\left(a+bx+cx^2+dx^3+o(x^3)\right)$$

$$=a+\left(\frac{1}{2}a+b\right)x+\left(\frac{1}{6}a+\frac{1}{2}b+c\right)x^2+\left(\frac{1}{24}a+\frac{1}{6}b+\frac{1}{2}c+d\right)x^3+o(x^3)$$

係数を比較して

$a=1$, $\dfrac{1}{2}a+b=0$, $\dfrac{1}{6}a+\dfrac{1}{2}b+c=0$, $\dfrac{1}{24}a+\dfrac{1}{6}b+\dfrac{1}{2}c+d=0$

$\therefore\quad a=1$, $b=-\dfrac{1}{2}$, $c=\dfrac{1}{12}$, $d=0$

問５

$f_x(x,y)=3x^2-6y$, $f_y(x,y)=-6x+24y^2$

$$\begin{cases} f_x(x,y)=0 \\ f_y(x,y)=0 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x^2-2y=0 \\ -x+4y^2=0 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} (x,y)=(0,0) \\ (x,y)=\left(1,\dfrac{1}{2}\right) \end{cases}$$

これより極値を取る点の候補は

$(x,y)=(0,0)\left(1,\dfrac{1}{2}\right)$

$f_{xx}=6x$, $f_{xy}=-6$, $f_{yy}=48y$

これより、$Hesse$ 行列 H は、$H=\begin{pmatrix} 6x & -6 \\ -6 & 48y \end{pmatrix}$

$(x,y)=(0,0)$ では $H=\begin{pmatrix} 0 & -6 \\ -6 & 0 \end{pmatrix}$

$ab-h^2=-36<0$

$(0,0)$ は f のsaddle point

$(x,y)=\left(1,\dfrac{1}{2}\right)$ では $H=\begin{pmatrix} 6 & -6 \\ -6 & 24 \end{pmatrix}$

$ab-h^2=108>0$　で $6>0$

$f\left(1,\dfrac{1}{2}\right)=-1$ だから、f は $\left(1,\dfrac{1}{2}\right)$ で極小値 -1 をとる。

2004年

問１　(1)n が大きいと $a_n - a_{n-1}$が$\dfrac{1}{n^2}$に近くなるので収束しそうです。
収束の定義を考えて解きましょう。

$\lim_{n\to\infty} n^2(a_n - a_{n-1}) = 1$ より収束の定義で$\varepsilon = 1$ として
$n > N \Rightarrow \ \left|n^2(a_n - a_{n-1}) - 1\right| < 1 \Leftrightarrow 0 < n^2(a_n - a_{n-1}) < 2$ となる自然数 N がある
$0 < n^2(a_n - a_{n-1}) < 2$ より $0 < a_n - a_{n-1} < \dfrac{2}{n^2}$である ← こうなれば
　　コーシーの判定法or上に有界な単調増加数列は収束することを使うだけです

1. $n > m > N$ として

$$|a_n - a_m| = |a_n - a_{n-1} + a_{n-1} - a_{n-2} + a_{n-2} - \cdots - a_{m+1} + a_{m+1} - a_m|$$
$$\leqq |a_n - a_{n-1}| + |a_{n-1} - a_{n-2}| + \cdots + |a_{m+1} - a_m| \ \leftarrow \ \text{三角不等式}$$
$$< \frac{2}{n^2} + \frac{2}{(n-1)^2} + \cdots + \frac{2}{(m+1)^2}$$
$$< \frac{2}{n\times(n-1)} + \frac{2}{(n-1)\times(n-2)} + \cdots + \frac{2}{(m+1)\times m}$$
$$= -\frac{2}{n} + \frac{2}{n-1} - \frac{2}{n-1} + \frac{2}{n-2} - \frac{2}{n-2} + \frac{2}{n-3} - \cdots - \frac{2}{m+1} + \frac{2}{m}$$
$$= \frac{2}{m} - \frac{2}{n} < \frac{2}{m}$$

$\forall \varepsilon' > 0$ に対して, $N > \dfrac{2}{\varepsilon'}$ と自然数 N をとれば、
$n > m > N \ \Rightarrow |a_n - a_m| < \varepsilon'$となる
よって　コーシーの判定法より数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$は収束する

2. $a_n = a_n - a_{n-1} + a_{n-1} - a_{n-2} + \cdots - a_{N+1} + a_{N+1} - a_N + a_N$

$$< \frac{2}{n^2} + \frac{2}{(n-1)^2} + \cdots + \frac{2}{(N+1)^2} + a_N$$
$$< \frac{2}{n\times(n-1)} + \frac{2}{(n-1)\times(n-2)} + \cdots + \frac{1}{(N+1)\times N} + a_N$$
$$= -\frac{2}{n} + \frac{2}{n-1} - \frac{2}{n-1} + \frac{2}{n-2} - \frac{2}{n-2} + \frac{2}{n-3} - \cdots - \frac{2}{N+1} + \frac{2}{N} + a_N$$
$$= a_N + \frac{2}{N} - \frac{1}{n} < a_N + \frac{2}{N}$$

と, この数列 $\{a_n\}_{n=N}^{\infty}$は上に有界で単調増加数列
よって $\{a_n\}_{n=N}^{\infty}$は収束し、$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$は収束する。

(2) テスト対策編だけでは解けません。
この命題は誤っています。このような偏微分可能でも微分可能にならないという反例を作るには分母 $= 0$ となるところを利用するといいです。反例は

$$f(\varphi, \psi) = \begin{cases} \dfrac{\varphi\psi}{\varphi^2 + \psi^2} & (\varphi, \psi) = (0, 0) \\ 0 & (\varphi, \psi) = (0, 0) \end{cases} \qquad \varphi(t) = t, \psi(t) = t \qquad \text{です}$$

f が $\mathbf{R}^2$上の偏微分可能な関数であることを示す。
f はφ とψの対称式だから f_φが存在することを言えばいい。
$\psi \neq 0$ のとき　$\varphi^2 + \psi^2 \neq 0$ だから f_φが存在
$\psi = 0$ のとき　$f(\varphi, \psi) = 0$ だから f_φが存在
よって、f は偏微分可能
φ, ψは $\mathbf{R}$ 上の微分可能な関数
しかし、$F(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} & t \neq 0 \\ 0 & t = 0 \end{cases}$ となり
$F(t)$ は微分可能ではない。

問２　(1) は g を消去すること (2) は f を消去することを考えます
$xf(z)+g(z)=y$ をそれぞれ x,y で偏微分して
$f(z)+xf'(z)z_x+g'(z)z_x=0 \qquad (a)$
$xf'(z)z_y+g'(z)z_y=1 \qquad (b)$
$(a)\times z_y-(b)\times z_x$ より
$f(z)z_y=-z_x$
$\therefore z_x+f(z)z_y=0$
(2)$z_x+f(z)z_y=0$ をそれぞれ x,y で偏微分する。
z が C^2級関数だから $z_{yx}=z_{xy}$であることを考えて
$z_{xx}+f'(z)z_xz_y+f(z)z_{xy}=0 \qquad (c)$
$z_{xy}+f'(z){z_y}^2+f(z)z_{yy}=0 \qquad (d)$
$(c)\times z_y-(d)\times z_x$ より
$z_yz_{xx}+f(z)z_yz_{xy}-z_xz_{xy}-f(z)z_xz_{yy}=0$
$z_yz_{xx}-z_xz_{xy}+f(z)(z_yz_{xy}-z_xz_{yy})=0$
${z_y}^2z_{xx}-z_xz_yz_{xy}+f(z)z_y(z_yz_{xy}-z_xz_{yy})=0$
$z_x+f(z)z_y=0$ より $f(z)z_y=-z_x$ だから、これを代入して
${z_y}^2z_{xx}-z_xz_yz_{xy}-z_x(z_yz_{xy}-z_xz_{yy})=0$
これを整理して
${z_y}^2z_{xx}-2z_xz_yz_{xy}+{z_x}^2z_{yy}=0$

問３ $x=u+v, y=u-v$ とみて多変数合成関数の偏微分公式を使います。
$F(u,v)=f(u+v,u-v)=f(x,y)$ とします。
(1) $\dfrac{\partial F}{\partial u}+\dfrac{\partial F}{\partial v}=\dfrac{\partial f}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial x}{\partial u}+\dfrac{\partial f}{\partial y}\cdot\dfrac{\partial y}{\partial u}+\dfrac{\partial f}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial x}{\partial v}+\dfrac{\partial f}{\partial y}\cdot\dfrac{\partial y}{\partial v}$
$=\dfrac{\partial f}{\partial x}+\dfrac{\partial f}{\partial y}+\dfrac{\partial f}{\partial x}-\dfrac{\partial f}{\partial y}=2\dfrac{\partial f}{\partial x}$だから
$\dfrac{\partial F}{\partial u}+\dfrac{\partial F}{\partial v}$の $(u,v)=(2,1)$ における値は
$\dfrac{\partial F}{\partial u}(2,1)-\dfrac{\partial F}{\partial v}(2,1)=2\dfrac{\partial f}{\partial x}(2+1,2-1)$
$=2\dfrac{\partial f}{\partial x}(3,1)=2\times 1=2$
よって$\dfrac{\partial F}{\partial u}(2,1)+\dfrac{\partial F}{\partial v}(2,1)=2$

(2) $\dfrac{\partial^2 F}{\partial u^2}-\dfrac{\partial^2 F}{\partial v^2}=\dfrac{\partial}{\partial u}\left(\dfrac{\partial F}{\partial u}+\dfrac{\partial F}{\partial v}\right)-\dfrac{\partial}{\partial v}\left(\dfrac{\partial F}{\partial u}+\dfrac{\partial F}{\partial v}\right)$

$$=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial u}+\frac{\partial F}{\partial v}\right)\cdot\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial u}+\frac{\partial F}{\partial v}\right)\cdot\frac{\partial y}{\partial u}$$

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial u}+\frac{\partial F}{\partial v}\right)\cdot\frac{\partial x}{\partial v}-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial u}+\frac{\partial F}{\partial v}\right)\cdot\frac{\partial y}{\partial v}$$

$$=\frac{\partial}{\partial x}\left(2\frac{\partial f}{\partial x}\right)\cdot\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial}{\partial y}\left(2\frac{\partial f}{\partial x}\right)\cdot\frac{\partial y}{\partial u}-\frac{\partial}{\partial x}\left(2\frac{\partial f}{\partial x}\right)\cdot\frac{\partial x}{\partial v}-\frac{\partial}{\partial y}\left(2\frac{\partial f}{\partial x}\right)\cdot\frac{\partial y}{\partial v}$$

$$=\frac{\partial}{\partial x}\left(2\frac{\partial f}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(2\frac{\partial f}{\partial x}\right)-\frac{\partial}{\partial x}\left(2\frac{\partial f}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(2\frac{\partial f}{\partial x}\right)$$

$=2\dfrac{\partial}{\partial y}\left(2\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)=4\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=4\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$ $\leftarrow$ f は C^2級関数
よって$\dfrac{\partial^2 F}{\partial u^2}-\dfrac{\partial^2 F}{\partial v^2}$の $(u,v)=(2,1)$ における値は
$\dfrac{\partial^2 F}{\partial u^2}(2,1)-\dfrac{\partial^2 F}{\partial v^2}(2,1)=4\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(2+1,2-1)=-4$

問４ (1) はテイラー展開で簡単に解けます。(2) は難しいかもしれません。

(1)$|x|<1$ なので $\log(1+x), \dfrac{1}{1-x}$ のテイラー展開を考える。それぞれのテイラー展開は

$$\log(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n \quad , \quad \frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n$$

ここで $b_n=\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$ とおく。このとき、$\log(1+x)=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}b_nx^n$ となる。

$\dfrac{\log(1+x)}{1-x}$ のテイラー展開は

$$\frac{\log(1+x)}{1-x}=\sum_{n=1}^{\infty}b_nx^n\times\sum_{n=0}^{\infty}x^n$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(x^n\times\sum_{i=1}^{n}b_i\right) \leftarrow \ x^n\text{の項がない}\,n=0\,\text{からを省いた}$$

よって $a_1=\displaystyle\sum_{i=1}^{1}b_i=b_1=1,\quad a_2=\sum_{i=1}^{2}b_i=b_1+b_2=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\quad a_3=\sum_{i=1}^{3}b_i=b_1+b_2+b_3=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{5}{6}$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ である。

$\log(1+x)$ のテイラー展開は

$$\log(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n$$ で成り立つ x の範囲は $-1<x\leqq 1$

ここで、このテイラー展開の式に $x=1$ を代入すると

$$\log 2=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}b_n$$

よって $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\log 2$

問５

$f_x(x,y)=3x^2+3y^2-3$, $f_y(x,y)=6xy$

$$\begin{cases} f_x(x,y)=0 \\ f_y(x,y)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2-1=0 \\ xy=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x,y)=(0,\pm1) \\ (x,y)=(\pm1,0) \end{cases}$$

これより極値を取る点の候補は

$(x,y)=(0,1),\ (0,-1),\ (1,0),\ (-1,0)$

$f_{xx}=6x, f_{xy}=6y, f_{yy}=6x$ より

$Hesse$ 行列 H は、$H=\begin{pmatrix} 6x & 6y \\ 6y & 6x \end{pmatrix}$

$(x,y)=(0,1)$ では $H=\begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$

$ab-h^2=-36<0$

$(0,1)$ は f のsaddle point

$(x,y)=(0,-1)$ では $H=\begin{pmatrix} 0 & -6 \\ -6 & 0 \end{pmatrix}$

$ab-h^2=-36<0$

$(0,-1)$ は f のsaddle point

$(x,y)=(1,0)$ では $H=\begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$

$ab-h^2=36>0$ で $a>0$
$f(1,0)=-2$ だから、f は $(1,0)$ で極小値 -2 をとる
$(x,y)=(-1,0)$ では $H=\begin{pmatrix}-6 & 0\\ 0 & -6\end{pmatrix}$
$ab-h^2=36>0$ で $a<0$
$f(-1,0)=2$ だから、f は $(-1,0)$ で極大値 2 をとる

よって、f は $(1,0)$ で極小値 -2、$(-1,0)$ で極大値 2 をとる

2003 年
問１　(1) 見た感じ収束しそうです。コーシーの判定法or上に有界な単調増加数列は収束することを使います。

$n \geqq 2$ より $a_n - a_{n-1} = \dfrac{1}{n^n} \leqq \dfrac{1}{n^2}$ $\leftarrow \dfrac{1}{n^\alpha}$の形のほうが示しやすい
1. $n>m>N$ として
$|a_n-a_m| = |a_n-a_{n-1}+a_{n-1}-a_{n-2}+a_{n-2}-\cdots-a_{m+1}+a_{m+1}-a_m|$
$\leqq |a_n-a_{n-1}|+|a_{n-1}-a_{n-2}|+\cdots+|a_{m+1}-a_m|$ $\leftarrow$ 三角不等式
$< \dfrac{1}{n^2}+\dfrac{1}{(n-1)^2}+\cdots+\dfrac{1}{(m+1)^2}$
$< \dfrac{1}{n\times(n-1)}+\dfrac{1}{(n-1)\times(n-2)}+\cdots+\dfrac{1}{(m+1)\times m}$
$= -\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n-1}-\dfrac{1}{n-1}+\dfrac{1}{n-2}-\dfrac{1}{n-2}+\dfrac{1}{n-3}\cdots-\dfrac{1}{m+1}+\dfrac{1}{m}$
$= \dfrac{1}{m}-\dfrac{1}{n}<\dfrac{1}{m}$
$\forall\varepsilon>0$ に対して, $N>\dfrac{1}{\varepsilon}$とすれば、
$n>m>N \ \Rightarrow |a_n-a_m|<\varepsilon$となる
よって　コーシーの判定法より $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$は収束して、$\lim\limits_{n\to\infty} a_n$が存在する

2. $a_n = a_n-a_{n-1}+a_{n-1}-a_{n-2}+\cdots+a_2-a_1+a_1$
$< \dfrac{1}{n^2}+\dfrac{1}{(n-1)^2}+\cdots+\dfrac{1}{2^2}+a_1$
$< \dfrac{1}{n\times(n-1)}+\dfrac{1}{(n-1)\times(n-2)}+\cdots+\dfrac{1}{2\times 1}+a_1$
$= -\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n-1}-\dfrac{1}{n-1}+\dfrac{1}{n-2}-\dfrac{1}{n-2}+\dfrac{1}{n-3}-\cdots-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{1}+a_1$
$= 1+a_1-\dfrac{1}{n}<1+a_1$
と, この数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$は上に有界で
$a_n=\dfrac{1}{n^n}+a_{n-1}$ より単調増加数列
よって $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$は収束して、$\lim\limits_{n\to\infty} a_n$が存在する

(2) これは明らかに違います。
反例は　$a_n=\begin{cases} 1 & n\text{を}3\text{で割ると}1\text{余るとき}\\ 1 & n\text{を}3\text{で割ると}2\text{余るとき}\\ -2 & n\text{が}3\text{の倍数のとき}\end{cases}$

問２　多変数合成関数の微分公式を使います

$s=x, t=y$ とおいて $\leftarrow$ このようにおくことによって公式を使う

$G(x,y)=F(x,y,f(x,y))=F(t,s,z)$ を x で偏微分すると多変数合成関数の微分公式より

$\dfrac{\partial G}{\partial x}=\dfrac{\partial F}{\partial s}\cdot\dfrac{\partial s}{\partial x}+\dfrac{\partial F}{\partial t}\cdot\dfrac{\partial t}{\partial x}+\dfrac{\partial F}{\partial z}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial x}$

$G(x,y)=0$　より　$\dfrac{\partial G}{\partial x}=0$

$\dfrac{\partial F}{\partial s}=F_x$, $\dfrac{\partial s}{\partial x}=1$, $\dfrac{\partial t}{\partial x}=0$, $\dfrac{\partial F}{\partial z}=F_z$ だから,

$0=F_x+F_z\cdot\dfrac{\partial z}{\partial x}$　よって　$\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{F_x}{F_z}$

同様に $G(x,y)$ を y で微分で微分して $\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{F_y}{F_z}$

問３　これは計算するだけです

(1) $\displaystyle\lim_{t\to\infty}\sqrt{t}\ =\infty$, $\displaystyle\lim_{t\to\infty}e^{-\frac{x^2}{4t}}=1$ より

$\displaystyle\lim_{t\to\infty}u(x,t)=\infty$

(2) $\dfrac{\partial u}{\partial t}=\dfrac{1}{2\sqrt{t}}e^{-\frac{x^2}{4t}}+\dfrac{x^2}{4t\sqrt{t}}e^{-\frac{x^2}{4t}}$

$\dfrac{\partial u}{\partial x}=-\dfrac{x}{2\sqrt{t}}e^{-\frac{x^2}{4t}}$

$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\dfrac{1}{2\sqrt{t}}e^{-\frac{x^2}{4t}}+\dfrac{x^2}{4t\sqrt{t}}e^{-\frac{x^2}{4t}}$

よって　$\dfrac{\partial u}{\partial t}-\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\dfrac{1}{\sqrt{t}}e^{-\frac{x^2}{4t}}$

(3) u は C^3級だから $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}-2\dfrac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial t}+\dfrac{\partial^4 u}{\partial x^4}=\dfrac{\partial}{\partial t}\left(\dfrac{\partial u}{\partial t}-\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)-\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\dfrac{\partial u}{\partial t}-\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)$

$\dfrac{\partial}{\partial t}\left(\dfrac{\partial u}{\partial t}-\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)=\dfrac{\partial}{\partial t}\left(\dfrac{1}{\sqrt{t}}e^{-\frac{x^2}{4t}}\right)$

$=-\dfrac{1}{2t\sqrt{t}}e^{-\frac{x^2}{4t}}+\dfrac{x^2}{4t^2\sqrt{t}}e^{-\frac{x^2}{4t}}$

$\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\dfrac{\partial u}{\partial t}-\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)=\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{t}}e^{-\frac{x^2}{4t}}\right)$

$=\dfrac{\partial}{\partial x}\left(-\dfrac{x}{2t\sqrt{t}}e^{-\frac{x^2}{4t}}\right)$

$=-\dfrac{1}{2t\sqrt{t}}e^{-\frac{x^2}{4t}}+\dfrac{x^2}{4t^2\sqrt{t}}e^{-\frac{x^2}{4t}}$

よって　$\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}-2\dfrac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial t}+\dfrac{\partial^4 u}{\partial x^4}=0$

問４　テイラー展開の問題です。覚えていれば解けます

$\log(1+t)$ のテイラー展開は

$\log(1+t) = t - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{4}t^4 + \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{n}t^n + \dots \quad (-1 < t \leqq 1)$ です

$$t = \frac{1}{x} \text{として} \log\left(1+\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{x}\right)^3 - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{x}\right)^4 + \dots$$
$$+ \frac{(-1)^{n+1}}{n}\left(\frac{1}{x}\right)^n + \dots \quad \left(-1 < \frac{1}{x} \leqq 1\right) \text{なので}$$

$$x - x^2\log\left(1+\frac{1}{x}\right) = x - x + \frac{1}{2} - \frac{1}{3}x^{-1} + \frac{1}{4}x^{-2} - \cdots - \frac{(-1)^{n+1}}{n}x^{n-2} + \dots$$
$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{3}x^{-1} + \frac{1}{4}x^{-2} - \cdots - \frac{(-1)^{n+1}}{n}x^{-(n-2)} + \dots$$

$-\frac{(-1)^{n+1}}{n}x^{-(n-2)} = \frac{(-1)^n}{n}x^{-(n-2)}$ であり、$n \to n+2$ と置き換えると

$$x - x^2\log\left(1+\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}x^{-1} + \frac{1}{4}x^{-2} - \cdots + \frac{(-1)^n}{n+2}x^{-n} + \dots$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+2}\cdot\frac{1}{x^n}$$

よって $a_n = \frac{(-1)^n}{n+2}$ で、この式が成り立つ x の条件は

$-1 < \frac{1}{x} \leqq 1$ より $x < -1, x \geqq 1$ である　← グラフを書くと分かり易い

また最初から $\sum$ を使っても議論できます

$t = \frac{1}{x}$ とする。$-1 < \frac{1}{x} \leqq 1$ つまり $x < -1, x \geqq 1$ なら $\log(1+t)$ のテイラー展開は

$$\log(1+t) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}t^n$$

よって $x - x^2\log\left(1+\frac{1}{x}\right)$ は

$$x - x^2\log\left(1+\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{t} - \frac{1}{t^2}\log(1+t)$$
$$= \frac{1}{t} - \frac{1}{t^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}t^n$$

$= \frac{1}{t} - \frac{1}{t} - \frac{1}{t^2}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}t^n$ ← $n=1$ を外に出した

$= -\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}t^{n-2}$ ← $\frac{1}{t^2}$ を $\sum$ の中に入れた

$= \sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}t^{n-2}$ ← $-$ を $\sum$ の中に入れた

$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+2}t^n$ ← n を $n+2$ と置き換えた

よって $a_n = \frac{(-1)^n}{n+2}$ で、この式が成り立つ x の条件は $x < -1, x \geqq 1$

問５　極値の問題です。計算ミスしなければ解けます

$f_x(x,y) = 3x^2 - y$, $f_y(x,y) = -x + 2y$

$$\begin{cases} f_x(x,y) = 0 \\ f_y(x,y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 - y = 0 \\ -x + 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x,y) = (0,0) \\ (x,y) = \left(\dfrac{1}{6}, \dfrac{1}{12}\right) \end{cases}$$

これより極値を取る点の候補は

$(x,y) = (0,0), \left(\dfrac{1}{6}, \dfrac{1}{12}\right)$

$f_{xx} = 6x, f_{xy} = -1, f_{yy} = 2$

これより、$Hesse$ 行列 H は、$H = \begin{pmatrix} 6x & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

$(x,y) = (0,0)$ では $H = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

$ab - h^2 = -1 < 0$　　$(0,0)$ は f のsaddle point

$(x,y) = \left(\dfrac{1}{6}, \dfrac{1}{12}\right)$ では $H = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

$ab - h^2 = 1 > 0$ で $a > 0$

f は $\left(\dfrac{1}{6}, \dfrac{1}{12}\right)$ で極小　極小値は $f\left(\dfrac{1}{6}, \dfrac{1}{12}\right) = -\dfrac{1}{432}$