

## 電磁気学 講義ノート 理科一類 37 組

## ～はじめに～

二学期の必修科目,電磁気学 A の講義ノートです.基本的には板書の内容をそのまま文字にしますが,一部端折ったり,または補足説明などを加えたりする場合があります.また,付録として「ベクトル解析の基礎知識」を設けたので,適宜参照してください.

…ちなみに,全部で 55 ページです.

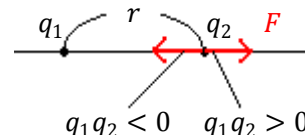
## 第1章 静電場

## § 1.1 Coulomb の法則

とりあえずは高校ですでに学習した Coulomb の法則を基礎として議論を進めていくことになります.Coulomb の法則は静電気力,すなわち止まっている電荷(保存量で,正負の符号を持つ)の間に働く力に関する法則で,次のように書けるのでした:

**Coulomb の法則** 距離 $r$ だけ離れた真空中の 2 つの点電荷 $q_1, q_2$ の間に働く力を $F$ とすると,

$$F = k \frac{q_1 q_2}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2}.$$



$k$ は **Coulomb 定数**と呼ばれ,その値は

$$k \approx 8.99 \times 10^9 [\text{Nm}^2/\text{C}^2]$$

です.また, $\epsilon_0$ は**真空の誘電率**で,その値は

$$\epsilon_0 \approx 8.854 \times 10^{-12} [\text{C}^2/\text{Nm}^2]$$

となります.

Coulomb の法則を記述するときに点電荷という言葉を使いましたが,点電荷とは

「点とみなせるくらい小さな空間領域に集中して存在する電荷」

のことです.ちょうど力学における質点の概念に相当します.

2 つ以上の点電荷から同時に Coulomb 力を受ける場合の力は,各点電荷から受ける Coulomb 力のベクトル和となります.

## § 1.2 電場

これも既習事項です.現代の静電気学における解釈は

「電荷が電場を作り,電荷は(他の電荷が作る)電場から力を受ける」

というものだそうです.

ここからの話をスムーズに進めるため,ベクトルの記号をいくつか導入します.位置ベクトル $\vec{r}$ は,直交座標系において

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

と書けるのでした。 $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ は $x, y, z$ 方向の単位ベクトル(規格直交基底)です。これらを $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$ と書くこともあります。すなわち

$$\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}.$$

また, $\vec{0}$ でないベクトル $\vec{r}$ に対し, $\vec{r}$ 方向の単位ベクトルを $\hat{r}$ と書きます:

$$\hat{r} = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}.$$

$\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$ の成分表示 $\vec{r} = (x, y, z)$ もしばしば使われます。

さて,1つの点電荷が作る電場を考えます。このとき電場 $\vec{E}$ は,点電荷を基準点とする位置ベクトル $\vec{r}$ の関数として書くことができますから,そのことを強調して $\vec{E}(\vec{r})$ と書きます。すると

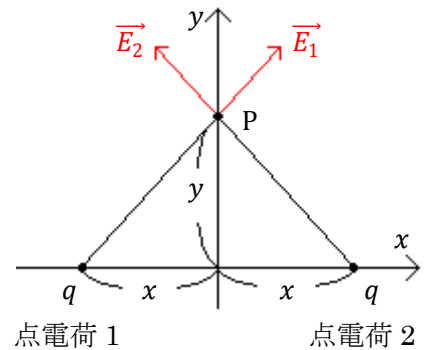
$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{kq}{r^2} \hat{r} = \frac{kq}{r^3} \vec{r}.$$

2つ以上の点電荷が作る電場 $\vec{E}(\vec{r})$ は,各点電荷が作る電場のベクトル和となります(電場における重ね合わせの原理)。つまり,位置 $\vec{r}_i$ に点電荷 $q_i$ が存在するとき

$$\vec{E}(\vec{r}) = k \sum_i \frac{q_i(\vec{r} - \vec{r}_i)}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3}.$$

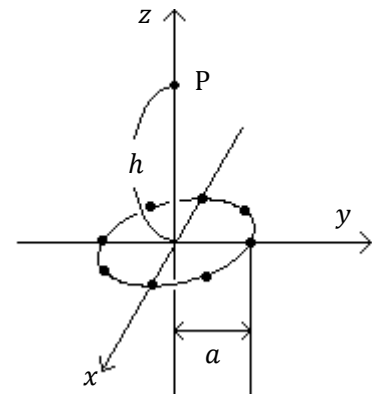
**Ex1.2.1** 右図において,

- (1) 点電荷1が点Pに作る電場 $\vec{E}_1$ を求めよ。
- (2) 点Pにおける電場 $\vec{E} (= \vec{E}_1 + \vec{E}_2)$ を求めよ。



**Ex1.2.2**

- (1) 右図のように,半径 $a$ の円周上に点電荷 $q$ が $2N$ 個,等間隔に並んでいる( $N$ は自然数).点Pにおける電場 $\vec{E}(P)$ を求めよ。
- (2)  $\frac{\text{総電荷}}{\text{円周}} = \frac{q \times 2N}{2\pi a} (= \sigma)$ 一定の下で, $N \rightarrow \infty$ での $\vec{E}(P)$ を求めよ。



★(2)の結果は,半径 $a$ の円周上,一様に分布した電荷(円周単位長さあたり $\sigma$ )が作る電場に等しくなります。

§1.3 連続的に空間分布する電荷が作る電場 (cf. 演習問題(1) 第1問, 第2問)

ここでは, 前のセクションの結果を応用して, 電荷が連続的に分布する場合に作られる電場について議論します. すなわち, 各電荷間の距離が観測点Pからの距離と比べて極めて小さいく, その分布が連続的とみなせる場合を考えます. ずいぶん複雑になった感じもありますが, 考え方はいたって自然なものですからしっかりと理解しましょう.

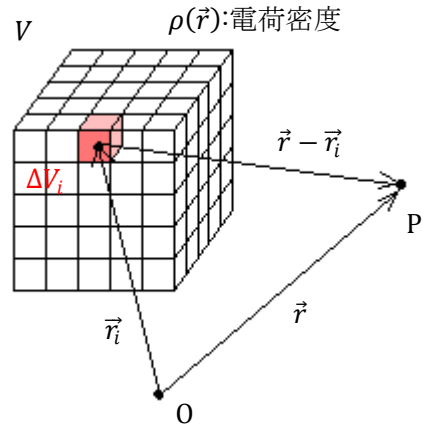
電荷分布領域を $V$ とし, その電荷分布を $\rho(\vec{r})$ とします.  $V$ を微小領域に分割し, その体積を $\Delta V_i$ とします. 代表点 $\vec{r}_i$ を選べば, 微小領域 $i$ 内の電荷は $\rho(\vec{r}_i)\Delta V_i$ と書けます. この電荷がPに作る電場は

$$k\rho(\vec{r}_i)\Delta V_i \frac{\vec{r} - \vec{r}_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3}$$

これを $i$ について足し上げ $\Delta V_i \rightarrow 0$ とすると, 求める電場が得られます. すなわち, 体積積分の記号を用いて

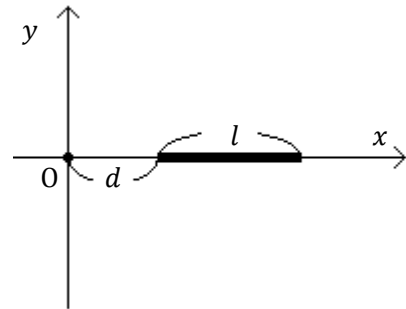
$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r}) &= \lim_{\Delta V_i \rightarrow 0} \sum_i \frac{k\rho(\vec{r}_i)(\vec{r} - \vec{r}_i)}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3} \Delta V_i \\ &= \int_V \frac{k\rho(\vec{r}')(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV' \end{aligned}$$

と書くことができます.  $dV'$ を $d\vec{r}'$ と書く場合もあります.



**Ex1.3.1**  $x$ 軸上にある一様に帯電した棒が原点に作る電場を求めよ. 棒上の全電荷を $Q$ , 単位長さあたりの電荷を $\lambda = \frac{Q}{l}$ とする.

★ $d \gg l$ とすると, 点電荷が作る電場に帰着します.



§1.4 スカラー場とベクトル場

ここからはしばらく数学の準備をすることになります. まずは最も基本的な概念であるスカラー場及びベクトル場を定義します.

定義(スカラー場, ベクトル場)

- 空間の各点に実数が与えられているとき, その空間分布をスカラー場という.
- 空間の各点にベクトルが与えられているとき, その空間分布をベクトル場という.

たとえば、温度の空間分布 $T(x, y, z)$ や気圧の空間分布 $p(x, y, z)$ はスカラー場です。それに対し、風向きの空間分布 $\vec{V}(x, y, z)$ はベクトル場となります。

次に、スカラー場から自然に導かれるベクトル場である **gradient**(勾配)を定義します。

**定義(gradient)** スカラー場 $f(x, y, z)$ に対し、

$$\text{grad } f = \frac{\partial f}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial f}{\partial y} \hat{y} + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{z}$$

とおき、 $f$ の **gradient** と呼ぶ。

ここで、ベクトル演算子 $\vec{\nabla}$ を

$$\vec{\nabla} = \hat{x} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial}{\partial z}$$

と定義すると

$$\text{grad } f = \vec{\nabla} f$$

と書くことができます。

さて、 $\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$ と、その近くの点 $\vec{r} + \Delta\vec{r} = (x + \Delta x)\hat{x} + (y + \Delta y)\hat{y} + (z + \Delta z)\hat{z}$ における $f$ の差 $\Delta f$ を考えます：

$$\Delta f = f(\vec{r} + \Delta\vec{r}) - f(\vec{r}) = f(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) - f(x, y, z).$$

ここで、Taylor の定理より

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) = f(x, y, z) + \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial f}{\partial z} \Delta z + O((\Delta\vec{r})^2).$$

ただし、 $O((\Delta\vec{r})^2)$ は微小量の2次以上を表します。すると

$$\begin{aligned} \Delta f &= \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial f}{\partial z} \Delta z + O((\Delta\vec{r})^2) \\ &= \left( \frac{\partial f}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial f}{\partial y} \hat{y} + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{z} \right) \cdot (\Delta x \hat{x} + \Delta y \hat{y} + \Delta z \hat{z}) + O((\Delta\vec{r})^2) \\ &= (\vec{\nabla} f) \cdot \Delta\vec{r} + O((\Delta\vec{r})^2) \end{aligned}$$

となります。この式は以降しばしば使います。

…一応定義から書きましたが、**gradient** 自体はすでに夏学期に力学でも扱いましたね(保存力の場 $\vec{F}(\vec{r})$ と、そのポテンシャルエネルギー $U(\vec{r})$ について $\vec{F}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}U(\vec{r})$ )。

**Ex1.4.1**  $r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ とする.このとき,次を示せ.

(1)  $\vec{\nabla} r = \frac{\vec{r}}{r}$ .

(2)  $\vec{\nabla} \frac{1}{r} = -\frac{\vec{r}}{r^3}$ .

(3) 定ベクトル $\vec{c}$ に対し, $\vec{\nabla}(\vec{c} \cdot \vec{r}) = \vec{c}$ .

証明は省略しますが,スカラー場 $f, g$ 及び実数 $k$ に対し,次の公式が成り立ちます:

$$\vec{\nabla}(f + g) = \vec{\nabla}f + \vec{\nabla}g,$$

$$\vec{\nabla}(kf) = k\vec{\nabla}f,$$

$$\vec{\nabla}(fg) = g\vec{\nabla}f + f\vec{\nabla}g,$$

$$\vec{\nabla}\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{g\vec{\nabla}f - f\vec{\nabla}g}{g^2} \quad (g \neq 0).$$

§ 1.5 ベクトル場の線積分

向きのついた曲線 $C$ 上の,ベクトル場 $\vec{V}(\vec{r})$ の線積分を定義します.

まず曲線 $C$ を細かく分割し,微小線素 $i$ 内の代表点 $\vec{r}_i$ を選びます.次に,代表点におけるベクトル場と,線素ベクトル $\Delta\vec{r}_i = \vec{r}_{i+1} - \vec{r}_i$ との内積 $\vec{V}(\vec{r}_i) \cdot \Delta\vec{r}_i$ を作ります.あとはこれを $i$ について足し上げ,分割を十分細かくしたものがベクトル場 $\vec{V}(\vec{r})$ の線積分です.すなわち

$$\int_C \vec{V}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \lim_{|\Delta\vec{r}_i| \rightarrow 0} \sum_i \vec{V}(\vec{r}_i) \cdot \Delta\vec{r}_i.$$

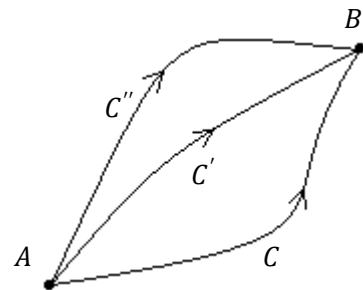
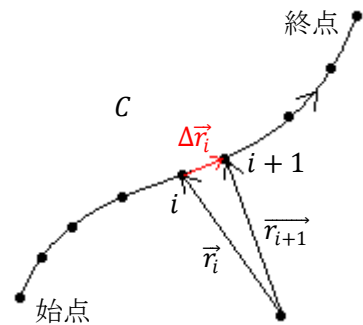
線積分は一般に始点と終点だけで決定されるものではなく,その経路に依存します.しかし,ベクトル場によっては,線積分が経路によらない場合もあります.そのようなベクトル場を**渦なしの場**と呼びます.すなわち,右図において

$$\int_C \vec{V}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \int_{C'} \vec{V}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \int_{C''} \vec{V}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$$

が成り立つ場合です.このとき

$$\int_C \vec{V}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} - \int_{C'} \vec{V}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = 0$$

が成り立ちますが,左辺は $C$ 及び $C'$ によって作られる閉曲線に関する線積分を意味することを考えると,この条件は



任意の閉曲線に関する線積分の値が0であること

と同値だということが分かります。

たとえば、保存力 $\vec{F}(\vec{r})$ は渦なしの場です。なぜならば、線積分

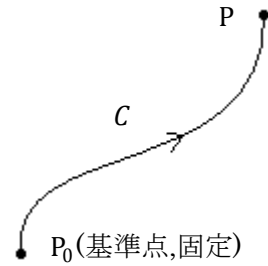
$$W = \int_C \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$$

は $\vec{F}(\vec{r})$ がする仕事ですが、保存力の定義よりその値は $C$ に依存しないからです。

渦なしのベクトル場 $\vec{V}(\vec{r})$ に対して、1つのスカラー場が定まります：

$$f(P) = \int_C \vec{V}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}.$$

渦なしの場の定義より、右辺は $P$ (と $P_0$ )だけで決まります。その意味で左辺を $f(P)$ と書くわけです。このスカラー場を $\vec{V}(\vec{r})$ の**スカラーポテンシャル**と呼びます。



保存力 $\vec{F}(\vec{r})$ は渦なしの場でした。そのスカラーポテンシャルは $-U(\vec{r})$ です。

証明は省略しますが、渦なしの場 $\vec{V}(\vec{r})$ とそのスカラーポテンシャル $f(\vec{r})$ との間に

$$\vec{V}(\vec{r}) = \nabla f(\vec{r})$$

の関係が成り立ちます。このことは先に述べた保存力の例から理解できると思います。

**Ex1.5.1** 点電荷が作る電場は渦なしの場であることを示せ。

**Ex1.5.2** 次のスカラー場 $f(\vec{r})$ とベクトル場 $\vec{V}(\vec{r})$ について、 $f(\vec{r})$ が $\vec{V}(\vec{r})$ のスカラーポテンシャルであることを示せ( $\vec{r}_0$ :基準点):

$$f(\vec{r}) = -\sum_i \frac{a_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|} + \sum_i \frac{a_i}{|\vec{r}_0 - \vec{r}_i|}, \quad \vec{V}(\vec{r}) = \sum_i \frac{a_i(\vec{r} - \vec{r}_i)}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3}.$$

**§ 1.6 電位** (cf.演習問題(2) 第1問,第2問)

物理の話に戻ります。点電荷の集まりが作る電場(cf. § 1.2)

$$\vec{E}(\vec{r}) = k \sum_i \frac{q_i(\vec{r} - \vec{r}_i)}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3}$$

は渦なしの場です。また、そのスカラーポテンシャルは、Ex1.5.2 より

$$f(\vec{r}) = -k \sum_i \frac{q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|} + k \sum_i \frac{q_i}{|\vec{r}_0 - \vec{r}_i|}.$$

これを用いて電位を定義します：

**定義(電位)** 電位 $\phi(\vec{r})$ は,

$$\phi(\vec{r}) = -f(\vec{r}) = - \int_c \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$$

で与えられるスカラー場である.

いくつか性質を列挙します:

- $\vec{\nabla}\phi(\vec{r}) = -\vec{E}(\vec{r})$ が成立する.
- $q\phi(\vec{r})$ は,基準点から $P(\vec{OP} = \vec{r})$ まで電荷 $q$ を準静的に(外力 $\vec{F}_{\text{ex}}(\vec{r})$ と $q\vec{E}(\vec{r})$ がほぼ釣り合った状態で)運ぶときに外力がする仕事に等しい:

$$W = \int_c \vec{F}_{\text{ex}}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \left( - \int_c \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} \right) \times q = q\phi(\vec{r}).$$

- $\vec{r}_a$ から $\vec{r}_b$ まで電荷 $q$ を準静的に運ぶのに外力がする仕事は, $q\phi(\vec{r}_b) - q\phi(\vec{r}_a)$ .

重力ポテンシャルエネルギーと同様に,基準点は無限遠にとることが多いです.このとき

$$\phi(\vec{r}) = k \sum_i \frac{q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|}$$

電荷が連続的に空間分布している場合にも電位は定義できます.具体的には § 1.3 で説明したのと同様の方法で計算します:

$$\phi(\vec{r}) = \lim_{\Delta V_i \rightarrow 0} \sum_i \frac{k\rho(\vec{r}_i)}{|\vec{r} - \vec{r}_i|} \Delta V_i = \int_V \frac{k\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'$$

### § 1.7 電気双極子

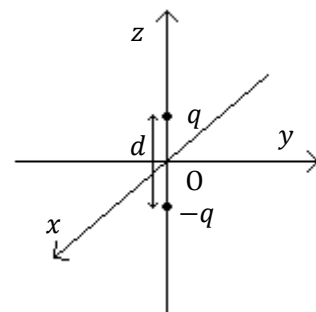
微小な距離 $d$ 離れた $\pm q$ の点電荷の対を**電気双極子**といいます. 原点にある電気双極子が位置ベクトル $\vec{r}$ の点Pに作る電位と電場を考えましょう.

点電荷 $\pm q$ の位置ベクトルを $\pm \frac{1}{2}\vec{d}$ とおき, $q\vec{d}(=p$ :電気双極子モーメント)一定のまま $d \rightarrow 0$ とします.点Pにおける電位は

$$\phi(\vec{r}) = \frac{kq}{|\vec{r} - \frac{1}{2}\vec{d}|} - \frac{kq}{|\vec{r} + \frac{1}{2}\vec{d}|}$$

となりますが,

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\vec{r} - \frac{1}{2}\vec{d}|} &= \left( \left( \vec{r} - \frac{1}{2}\vec{d} \right)^2 \right)^{-\frac{1}{2}} = \left( r^2 - \vec{r} \cdot \vec{d} + \frac{d^2}{4} \right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{r} \left( 1 - \frac{\vec{r} \cdot \vec{d}}{r^2} + \frac{d^2}{4r^2} \right)^{-\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{r} \left( 1 + \frac{\vec{r} \cdot \vec{d}}{2r^2} + o\left(\frac{d^2}{r^2}\right) \right), \end{aligned}$$



同様に

$$\frac{1}{|\vec{r} + \frac{1}{2}\vec{d}|} = \frac{1}{r} \left( 1 - \frac{\vec{r} \cdot \vec{d}}{2r^2} + O\left(\frac{d^2}{r^2}\right) \right)$$

も成り立ちますから

$$\begin{aligned} \phi(\vec{r}) &= \frac{kq}{r} \left( 1 + \frac{\vec{r} \cdot \vec{d}}{2r^2} + O\left(\frac{d^2}{r^2}\right) \right) - \frac{kq}{r} \left( 1 - \frac{\vec{r} \cdot \vec{d}}{2r^2} + O\left(\frac{d^2}{r^2}\right) \right) = \frac{k(q\vec{d}) \cdot \vec{r}}{r^3} + kO\left(\frac{qd^2}{r^2}\right) \\ &\rightarrow k \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3} \quad (q\vec{d} = \vec{p}, d \rightarrow 0). \end{aligned}$$

また,点Pにおける電場は

$$E(\vec{r}) = -\vec{\nabla}\phi(\vec{r}) = -k \frac{r^3 \vec{\nabla}(\vec{p} \cdot \vec{r}) - (\vec{p} \cdot \vec{r}) \vec{\nabla}r^3}{r^6} = -k \frac{r^3 \vec{p} - (\vec{p} \cdot \vec{r}) \cdot 3r\vec{r}}{r^6} = k \frac{3(\vec{p} \cdot \vec{r})\vec{r} - r^2 \vec{p}}{r^5}.$$

**§ 1.8 ベクトル場の面積分** (cf.演習問題(2) 第3問,第4問,第5問)

再び数学の準備です.始めに,後に述べる Gauss の法則や「電気力線の本数」といった概念の定式化,精密化に必要なベクトル場の面積分を導入します.

考えるベクトル場を $\vec{V}(\vec{r})$ とし,曲面 $S$ は向きが定められているものとします.すなわち表と裏が決まっているとします.曲面 $S$ を細かく分割して得られる微小平面のインデックスを $i$ としましょう. $i$ 上の代表点 $P_i$ を選び, $\vec{OP}_i = \vec{r}_i$ とおきます.さらに, $i$ の法線方向,裏から表向きの単位ベクトル(法線ベクトル)を $\vec{n}_i$ とし, $i$ の面積を $\Delta S_i$ とします.このとき, $i$ の面積ベクトルを $\Delta \vec{S}_i = (\Delta S_i)\vec{n}_i$ と定義します.内積 $\vec{V}(\vec{r}_i) \cdot \Delta \vec{S}_i$ を $i$ について足し上げ, $\Delta S_i \rightarrow 0$ の極限をとったものが曲面 $S$ 上のベクトル場 $\vec{V}(\vec{r})$ の面積分です:

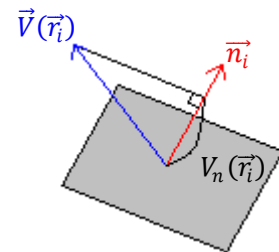
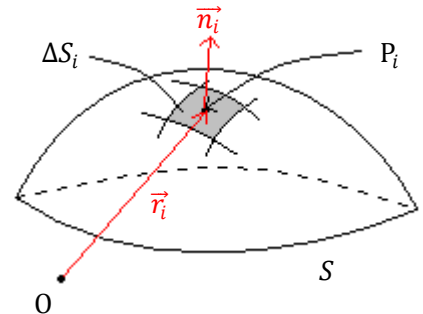
$$\lim_{\Delta S_i \rightarrow 0} \sum_i \vec{V}(\vec{r}_i) \cdot \Delta \vec{S}_i = \int_S \vec{V}(\vec{r}) \cdot d\vec{S}.$$

ここで

$$\vec{V}(\vec{r}_i) \cdot \Delta \vec{S}_i = \vec{V}(\vec{r}_i) \cdot (\Delta S_i)\vec{n}_i = (\vec{V}(\vec{r}_i) \cdot \vec{n}_i)\Delta S_i$$

ですから, $\vec{V}(\vec{r}_i)$ の法線成分を $V_n(\vec{r}_i)$ と書けば

$$\begin{aligned} \int_S \vec{V}(\vec{r}) \cdot d\vec{S} &= \lim_{\Delta S_i \rightarrow 0} \sum_i \vec{V}(\vec{r}_i) \cdot \Delta \vec{S}_i = \lim_{\Delta S_i \rightarrow 0} \sum_i V_n(\vec{r}_i)\Delta S_i \\ &= \int_S V_n(\vec{r})dS \end{aligned}$$





と表すこともできます。

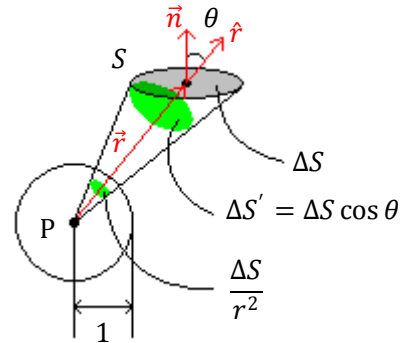
次に、これも後で用いる立体角という概念を紹介します。向きが定められた曲面に対し立体角というものを考えるわけですが、例によって曲面を十分細かく分割し、得られた微小平面の立体角を足し合わせるという方法で定義します：

まず向きが定められた微小平面 $S$ の立体角を定義しましょう。微小平面の面積を $\Delta S$ 、法線ベクトルを $\vec{n}$ 、点 $P$ から $S$ までの位置ベクトルを $\vec{r} = r\hat{r}$ とすると、 $P$ から見た微小平面 $S$ の立体角は

$$\Delta\Omega = \Delta S \frac{\vec{n} \cdot \vec{r}}{r^3} = \Delta S \frac{\vec{n} \cdot \hat{r}}{r^2}$$

で与えられます。

( $\cos\theta > 0$ の場合)



立体角の幾何学的意味を考察しましょう。 $\vec{n}$ と $\hat{r}$ とのなす角を $\theta$ とし、 $\Delta S' = \Delta S \cos\theta$ とおくと

$$\Delta\Omega = \Delta S \frac{\cos\theta}{r^2} = \frac{\Delta S'}{r^2} \quad (\because |\vec{n}| = |\hat{r}| = 1)$$

ですから、 $|\Delta\Omega|$ は $P$ を頂点、 $S$ を底面とする錐体が $P$ を中心とする単位球面から切り取る面積に等しくなります(絶対値をつけたのは、 $\theta$ が鈍角の場合 $\Delta\Omega < 0$ となるからです)。

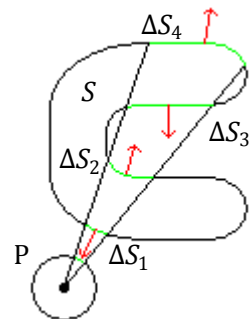
さて、向きが定められた曲面 $S$ の立体角を定義します。 $S$ を分割して得られた微小平面(インデックス: $i$ )の、 $P$ から見た立体角を $\Delta\Omega_i$ とすると、 $P$ から見た曲面 $S$ の立体角は

$$\Omega = \lim_{\Delta S_i \rightarrow 0} \sum_i \Delta\Omega_i = \lim_{\Delta S_i \rightarrow 0} \sum_i \Delta S \frac{\vec{n} \cdot \vec{r}}{r^3} = \int_S \frac{\vec{r}}{r^3} \cdot d\vec{S}$$

となります。実際に、いくつかの特殊な場合について立体角を求めてみましょう：

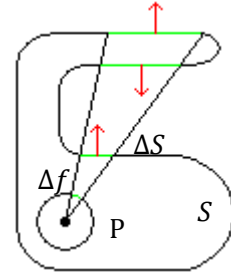
**例 1.**  $P$ を囲まない外向き閉曲面 $S$ の立体角

$P$ を頂点とする微小頂角の錐体が、曲面 $S$ から切り取る微小平面を、たとえば $\Delta S_1, \Delta S_2, \Delta S_3, \Delta S_4$ としましょう。これらは必ず $\Delta S_1$ と $\Delta S_2, \Delta S_3$ と $\Delta S_4$ というように、2つずつ対をなしています。各組、たとえば $\Delta S_1$ と $\Delta S_2$ では、 $P$ から見た $\Delta S_1$ の立体角は負ですが、 $\Delta S_2$ の立体角は正で、その大きさは等しいです。従って、その和は0となります。他の組の微小平面の立体角についても同様ですから、曲面 $S$ 全体の立体角も0となります。



**例 2.** Pを囲む外向き閉曲面Sの立体角

先程の例と同様に,Pを頂点とする微小頂角の錐体を考えると,奇数個の微小平面が切り取られます.対をなしている微小平面の立体角は打ち消しあいますから,そのうちの一つ,たとえば $\Delta S$ の立体角だけを考えればよいこととなります.この錐体がPを中心とする単位球面から切り取る面積を $\Delta f$ とすると,これが $\Delta S$ の立体角ですから,これらの和 $\sum \Delta f = 4\pi$  (単位球の表面積)が曲面Sの立体角となります.



**例 3.** Pを囲む内向き閉曲面Sの立体角

議論の流れは例 2 と同じですが,各微小平面の法線ベクトルの向きが反対になるため,立体角も符号が反転して $-4\pi$ となります.

例 1 及び例 2 から,外向き閉曲面Sに対して次が成り立ちます:

$$\int_S \frac{\vec{r}}{r^3} \cdot d\vec{S} = \begin{cases} 4\pi & (\text{原点: } S \text{ の内部}) \\ 0 & (\text{原点: } S \text{ の外部}) \end{cases}$$

**Ex1.8.1** ベクトル場

$$\vec{V}(\vec{r}) = \sum_{\alpha=1}^N \frac{a_{\alpha}(\vec{r} - \vec{r}_{\alpha})}{|\vec{r} - \vec{r}_{\alpha}|^3}$$

の外向き閉曲面S上の面積分は

$$\int_S \vec{V}(\vec{r}) \cdot d\vec{S} = 4\pi \sum_{\alpha: \vec{r}_{\alpha} \in (S \text{ の内部})} a_{\alpha}$$

となることを示せ.

**§ 1.9 Gauss の法則** (cf. 演習問題(2) 第 6 問, 第 7 問)

前のセクションの結果を用いて,次の Gauss の法則を導きます:

**Gauss の法則** 電場 $\vec{E}(\vec{r})$ と電荷配置 $(\vec{r}_1, q_1; \vec{r}_2, q_2; \dots; \vec{r}_N, q_N)$ の間に

$$\int_S \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \times (S \text{ の内部の総電荷})$$

が成立する.ただし,Sは任意の外向き閉曲面である.

**[証明]** 電荷配置 $(\vec{r}_1, q_1; \vec{r}_2, q_2; \dots; \vec{r}_N, q_N)$ による電場は,

$$\vec{E}(\vec{r}) = k \sum_{\alpha=1}^N \frac{q_{\alpha}(\vec{r} - \vec{r}_{\alpha})}{|\vec{r} - \vec{r}_{\alpha}|^3}$$

で与えられる (§ 1.2).従って,Ex1.8.1 の結果を用いると

$$\int_S \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{S} = \int_S k \sum_{\alpha=1}^N \frac{q_\alpha (\vec{r} - \vec{r}_\alpha)}{|\vec{r} - \vec{r}_\alpha|^3} \cdot d\vec{S} = 4\pi k \sum_{\alpha: \vec{r}_\alpha \in (S \text{ の内部})} q_\alpha = \frac{1}{\epsilon_0} \times (S \text{ の内部の総電荷})$$

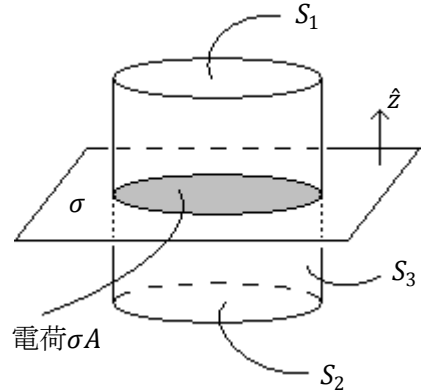
を得る. (Q.E.D.)

電荷分布が連続的な場合にも,Gauss の法則は成り立ちます.一つ例を見てみましょう:

$xy$  平面上一様に分布する電荷(面密度  $\sigma$ )が作る電場を考えます.このとき

$$\vec{E}(x, y, z) = (\text{sgn } z) \times \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{z} \quad (\text{sgn: 符号関数})$$

となります(演習問題(1) 第 2 問).閉曲面  $S$  としては, $z > 0$  の部分に上面, $z < 0$  の部分に下面を持つような,底面積  $A$  の直円柱の表面(外向き)を選ぶことにします. $S$  の上面を  $S_1$ , 下面を  $S_2$ , 側面を  $S_3$  としましょう.すると



$$\begin{aligned} \int_{S_1} \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{S} &= \lim_{\Delta S_i \rightarrow 0} \sum_i \vec{E}(\vec{r}_i) \cdot \vec{n}_i \Delta S_i = \lim_{\Delta S_i \rightarrow 0} \sum_i \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{z} \cdot \hat{z} \Delta S_i = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \lim_{\Delta S_i \rightarrow 0} \sum_i \Delta S_i = \frac{\sigma A}{2\epsilon_0}, \\ \int_{S_2} \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{S} &= \lim_{\Delta S_i \rightarrow 0} \sum_i \vec{E}(\vec{r}_i) \cdot \vec{n}_i \Delta S_i = \lim_{\Delta S_i \rightarrow 0} \sum_i \frac{\sigma}{2\epsilon_0} (-\hat{z}) \cdot (-\hat{z}) \Delta S_i = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \lim_{\Delta S_i \rightarrow 0} \sum_i \Delta S_i = \frac{\sigma A}{2\epsilon_0}, \\ \int_{S_3} \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{S} &= \lim_{\Delta S_i \rightarrow 0} \sum_i \vec{E}(\vec{r}_i) \cdot \vec{n}_i \Delta S_i = 0 \quad (\because \vec{E}(\vec{r}_i) \perp \vec{n}_i) \\ \therefore \int_S \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{S} &= \sum_{i=1}^3 \int_{S_i} \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{S} = \frac{\sigma A}{\epsilon_0}. \end{aligned}$$

$\sigma A$  は  $S$  の内部の総電荷に等しいので,Gauss の法則の成立が確認できました.

Gauss の法則を用いると,電荷分布から電場を求めることができます.たとえば,半径  $a$  の球殻上,一様に分布した電荷(全電荷  $Q$ )が地点  $P$  ( $\vec{OP} = \vec{r}$ )に作る電場を計算してみましょう:

対称性より,電場も球対称であると考えられます.すなわち,その大きさは  $O$  からの距離  $r = |\vec{r}|$  だけの関数であって, $\vec{r}$  と同じ方向を向いています:

$$\vec{E}(\vec{r}) = E(r) \hat{r}.$$

閉曲面  $S$  としては, $O$  を中心,半径  $r$  の球面(外向き)をとることにしましょう.このとき

$$\int_S \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{S} = \lim_{\Delta S_i \rightarrow 0} \sum_i \vec{E}(\vec{r}_i) \cdot \vec{n}_i \Delta S_i = \lim_{\Delta S_i \rightarrow 0} \sum_i E(r) \hat{r} \cdot \hat{r} \Delta S_i = E(r) \lim_{\Delta S_i \rightarrow 0} \sum_i \Delta S_i = 4\pi r^2 E(r)$$

となります.Gauss の法則より

$$4\pi r^2 E(r) = \begin{cases} \frac{Q}{\epsilon_0} & (r > a) \\ 0 & (r < a) \end{cases}$$

$$\therefore \vec{E}(\vec{r}) = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r} & (r > a) \\ \vec{0} & (r < a). \end{cases}$$

この場合, $r = a$ を境に $E(r)$ は不連続となっています.

一般にこのような空間的対称性がない場合には,Gauss の法則によって具体的に電場を計算するのは難しいです.

**Ex1.9.1** 半径 $a$ の球内部,一様に分布した電荷(全電荷 $Q$ )が地点 $P$  ( $\overline{OP} = \vec{r}$ )に作る電場を求めよ.

### § 1.10 静電場の基礎方程式

Coulomb の法則から導かれた 2 つの定理がありました:

- ・ 静電場は渦なしの場である(この講義では「渦なしの場の法則」と呼びます) → Ex1.5.1

$$\oint_{\text{閉曲線 } C} \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = 0 \quad (\oint \text{は「閉曲線に関する線積分」の意味}).$$

- ・ Gauss の法則 → § 1.9

$$\int_{\text{外向き閉曲面 } S} \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \times (S \text{ の内部の総電荷})$$

これらを合わせて,静電場の基礎方程式と呼びます.というのは,後述の電磁場の基礎方程式(Maxwell 方程式)との相性が Coulomb の法則よりも良く,かつ逆にこれら 2 つを基礎として Coulomb の法則を導くことが可能だからです.より詳しく,Gauss の法則は Maxwell 方程式の一部であって,渦なしの場の法則については磁束の時間変化をも包含した

$$\oint_{\text{閉曲線 } C} \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = -\frac{\partial \Phi}{\partial t} \quad (\Phi: C \text{ を貫く磁束})$$

が Maxwell 方程式の一部(電磁誘導の法則)となっています(第 4 章).

### § 1.11 divergence(発散)

Gauss の法則の微分形,Maxwell の方程式(後出)を記述するのに必要な,divergence(発散)を導入します.divergence は,ベクトル場から自然に導かれるスカラー場です:

**定義(divergence)**  $V$ を点 $P$ を含む領域(体積 $V$ )とし, $V$ の外向き表面を $S$ とする.このとき,ベクトル場 $\vec{A}(\vec{r})$ の点 $P$ における **divergence**,  $\text{div } \vec{A}(P)$ は

$$\text{div } \vec{A}(P) = \lim_{V \rightarrow P} \frac{1}{V} \int_S \vec{A} \cdot d\vec{S}$$

で与えられる.

すなわち,「面積分の体積密度」を **divergence** と呼びます.点 $P$ における **divergence** のことを $(\text{div } \vec{A})_P$  などと書く場合もあります.

証明は省略しますが,直交座標系において $\vec{A} = A_x \hat{x} + A_y \hat{y} + A_z \hat{z}$ のとき

$$\text{div } \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

が成り立ちます.**gradient** を定義したときに紹介した,ベクトル演算子 $\vec{\nabla}$ を用いれば

$$\text{div } \vec{A} = \vec{\nabla} \cdot \vec{A}$$

のように,ベクトルの内積として書くことができます.

参考までに,ベクトル解析における **Gauss** の定理を述べておきましょう:

**Gauss の定理** 有界領域 $V$ に対し,その境界(外向き)を $S$ とおくと

$$\int_V (\text{div } \vec{A}) dV = \int_S \vec{A} \cdot d\vec{S}$$

が成立する.

$\text{div } \vec{A}$ は「 $\vec{A}$ の面積分の体積密度」ですから,それを体積積分すれば $\vec{A}$ の面積分となると考えるのは自然ですね.

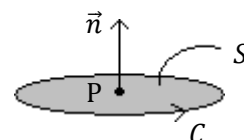
### § 1.12 rotation(回転)

渦なしの場の法則の微分形,Maxwell の方程式(後出)を記述するのに必要な,rotation (回転)を導入します.rotation は,ベクトル場から自然に導かれるベクトル場です

**定義(rotation)** ベクトル場 $\vec{A}(\vec{r})$ の点 $P$ における **rotation** の $n$ 成分, $(\text{rot } \vec{A})_P \cdot \vec{n}$ は

$$(\text{rot } \vec{A})_P \cdot \vec{n} = \lim_{S \rightarrow P} \frac{1}{S} \int_C \vec{A} \cdot d\vec{r}$$

で与えられる.ただし, $S$ は $P$ を囲む法線 $\vec{n}$ の微小平面, $C$ は $S$ の境界であって, $S$ の法線の向きと $C$ の向きは右ねじの法則に従うものとする.



すなわち、「線積分の面密度」を **rotation** と呼ぶのです。

証明は省略しますが、直交座標系において  $\vec{A} = A_x \hat{x} + A_y \hat{y} + A_z \hat{z}$  のとき

$$\text{rot } \vec{A} = \left( \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \hat{x} + \left( \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \hat{y} + \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \hat{z}$$

が成り立ちます。gradient を定義したときに紹介した、ベクトル演算子  $\vec{\nabla}$  を用いれば

$$\text{rot } \vec{A} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = \det \begin{pmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{pmatrix}$$

のように、ベクトルの外積として書くことができます。

参考までに、ベクトル解析における Stokes の定理を述べておきましょう：

**Stokes の定理** 曲面  $S$  に対し、その境界を  $C$  とおくと

$$\int_S (\text{rot } \vec{A}) \cdot d\vec{S} = \int_C \vec{A} \cdot d\vec{r}$$

が成立する。ただし、 $S$  の法線の向きと  $C$  の向きは右ねじの法則に従うものとする。

$\text{rot } \vec{A}$  は「 $\vec{A}$  の線積分の面密度」ですから、それを面積分すれば  $\vec{A}$  の線積分となるのはやっぱり当たり前です。

### § 1.13 静電場の基礎方程式の微分形

§ 1.10 で、2 つの法則を「静電場の基礎方程式」として採用しました。しかし、それらは積分を用いて書かれていて、「物理の法則はすべからく局所的に書かれるべき」という理念に反しています。そこで、このセクションでは静電場の基礎方程式を微分形に書き直します。

まずは Gauss の法則です。有界領域  $V$  (体積  $V$ ) に対し、その境界(外向き)を  $S$  とおくと

$$\int_S \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \times (V \text{ の総電荷})$$

が成立するというわけですが、 $V$  の総電荷は電荷密度  $\rho(\vec{r})$  の体積積分ですから

$$\int_S \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho(\vec{r}) dV$$

が成り立ちます。両辺を  $V$  で割り、 $S$  を 1 点  $P$  に縮める極限をとると、左辺は  $\vec{E}$  の divergence、右辺についても

$$\lim_{S \rightarrow P} \frac{1}{V} \int_V \rho(\vec{r}) dV = \rho(P)$$

となりますから、結局

$$(\operatorname{div} \vec{E})_P = \frac{\rho(P)}{\epsilon_0}$$

を得ます。

ところで、点電荷がある場合には  $\rho(\vec{r})$  が記述できず、従って Gauss の法則は適用できません。そこで  $\delta$  関数と呼ばれるものを導入します。 $\delta$  関数とは次の性質を満たす関数です：

$$\delta(\vec{r}) = \begin{cases} \infty & (\vec{r} = 0) \\ 0 & (\vec{r} \neq 0) \end{cases}, \quad \int_{\text{全空間}} \delta(\vec{r}) d\vec{r} = 1.$$

$\delta$  関数を用いると、たとえば点  $\vec{r}_\alpha$  に点電荷  $q_\alpha$  が存在するとき

$$\rho(\vec{r}) = \sum_{\alpha} q_{\alpha} \delta(\vec{r} - \vec{r}_{\alpha})$$

と書くことができます。このとき確かに

$$\int_V \rho(\vec{r}) dV = \int_V \left( \sum_{\alpha} q_{\alpha} \delta(\vec{r} - \vec{r}_{\alpha}) \right) dV = \sum_{\alpha} \left( q_{\alpha} \int_V \delta(\vec{r} - \vec{r}_{\alpha}) dV \right) = \sum_{\alpha} q_{\alpha} = (V \text{ の総電荷})$$

となっています。

次に、渦なしの場の法則を書き直してみましよう。P を含む円板 S (面積 S) の縁を C とすると

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{r} = 0$$

が成立する、というのがその内容でした。ただし、右ねじの法則に従うように S の法線 ( $\vec{n}$  とする) の向きと C の向きとを定めておきます。両辺を S で割って、 $\vec{n}$  は一定のまま S を 1 点 P に縮める極限をとると、左辺は  $\vec{E}$  の点 P における rotation の n 成分ですから

$$(\operatorname{rot} \vec{E})_P \cdot \vec{n} = 0$$

となりますが、 $\vec{n}$  は任意にとることができるので

$$(\operatorname{rot} \vec{E})_P = \vec{0}$$

が得られます。

このように、静電場の基礎方程式を微分形で表示することができました。もう一度結果をまとめておきましょう：

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad \operatorname{rot} \vec{E} = \vec{0}.$$

### § 1.14 静電平衡にある導体

これまでに論じた静電場の基礎法則と、物質の理想化模型(単純化模型)とを組み合わせ、その帰結としての現象を論じます。物質の電磁気学的性質を特徴づけるパラメータは、次の3つです：

$C$  : capacitance (§ 1.16)

$R$  : resistance (§ 2.2)

$L$  : inductance (§ C.2).

さて、このセクションでは「静電平衡にある導体」について議論するわけですが、まずは静電平衡と導体とを定義することから始めなければなりません。特に注意はしませんでした、前のセクションまで話題にしていた静電場は、電荷密度  $\rho$  が時間的に一定 ( $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ ) であることを要求していました。静電平衡においては、それに「正味の電流なし」という制約が加わります。また、導体とは「自由に動くことのできる電荷が内部に存在する物質」のことです。静電場かつ静電平衡でない場合、すなわち「電荷密度が時間的に一定だが電流はある」という場合があることに注意しましょう(たとえば、一様な電荷密度を持つ空間全体が一斉に同じ速度で動く場合)。

静電平衡と導体の定義から、次の 5 つの性質が導かれます:

- (1) 導体内部で  $\vec{E} = \vec{0}$ ,
- (2) 導体内部で  $\rho = 0$ ,
- (3) 導体表面には電荷分布あり,
- (4) 等電位,
- (5) 表面すぐ外の電場は表面と直交.

それぞれ確認してみましょう:

- (1) について

導体内部には「自由に動くことのできる電荷」が存在するため、 $\vec{E} \neq \vec{0}$  ならばそれらが動きだし、電流が生ずる。これは静電平衡の条件に反するので  $\vec{E} = \vec{0}$ 。

- (2) について

$\rho \neq 0$  とすると、Gauss の法則より  $\text{div } \vec{E} \neq 0$  となるから  $\vec{E} \neq \vec{0}$ 。これは(1)と矛盾する。

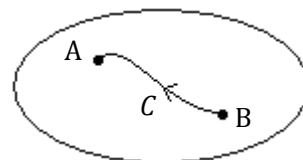
- (3) について

内部に電場を作らない(つまり、(1)と矛盾しない)表面電荷は存在し得る (§ 1.9)。

- (4) について

導体内部の任意の 2 点 A, B に対し、それらを結ぶ導体内部の経路 C を選べば

$$\phi_A - \phi_B = - \int_C \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = 0 \quad (\because (1) \text{ より } \vec{E} = 0).$$



- (5) について

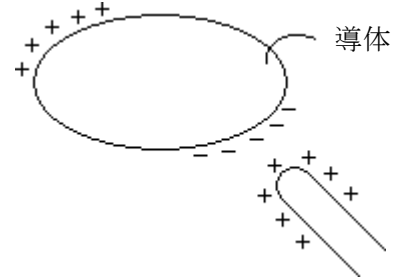
表面に沿った方向に電場の成分が存在すると、その方向に電流が生じてしまう。



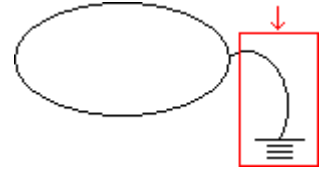
**Ex1.14.1** 静電平衡にある導体の表面すぐ外で  $\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n}$  となることを示せ.

**§ 1.15 静電誘導** (cf. 演習問題(3) 第1問, 第2問)

導体に電場をかけると(あるいは電荷を近づけると), 導体内部の電場が 0 となるように導体表面に電荷分布が生じます. このことを **静電誘導** と呼びます. 従って, 静電誘導の問題は「外部電場ないし外部電荷が与えられたとき, 導体表面の電荷分布を決定する」といったものになります.



それから, ときどき右図のような記号を目にすることがあると思います. これは **接地(アース)** の記号で, 導体が地球と導線でつながっていることを意味します. このとき導体は地球と等電位になるわけですが, 地球は導体に比して無限と言ってもいい程大きいので, その等しい電位は無限遠の電位(すなわち 0)として構いません.



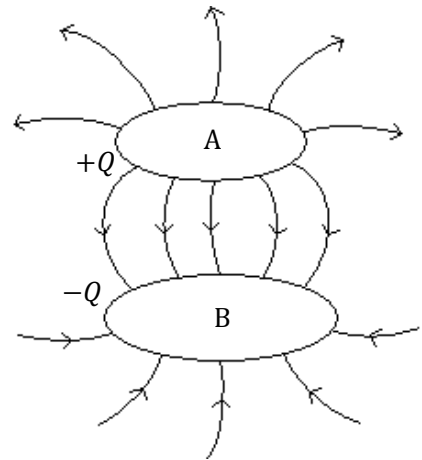
注: 地球は導体です (§ 2.2)

**§ 1.16 静電容量(capacitance)**

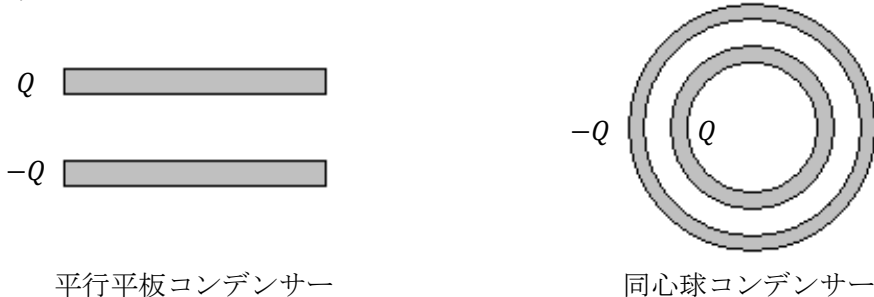
導体A, Bにそれぞれ  $+Q, -Q$  の電荷が帯電しているときの電位差  $\phi_A - \phi_B$  を  $V$  とし, この2つの導体に  $+Q', -Q'$  の電荷を帯電させたときの電位差を  $V'$  とすると, 任意の  $Q, Q'$  に対して

$$\frac{Q}{V} = \frac{Q'}{V'}$$

が成立します. すなわち,  $\frac{Q}{V}$  は導体の形状, 配置だけで決まる定数ですから, これを **電気容量** または **静電容量** と呼び  $C$  と書きます(単位: F(ファラド) = C/V). 静電容量  $C$  は, どれだけ多くの電荷を貯めることができるかの指標です.



一般に,  $\pm Q$  の電荷を持つ導体の対を **コンデンサー** と呼びます. もっとも, よく話題に上がるのは次のような単純な場合だけです:



実際に,極板面積 $S$ ,対向距離 $d$ の平行平板コンデンサーの静電容量を求めてみましょう.極板上の電荷面密度の大きさを $\sigma$ とすると

$$\sigma = \frac{Q}{S}.$$

また,極板上の電荷が作る電場の大きさを $E_1$ とおくと

$$E_1 = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

が成り立ちます(必要なら Gauss の法則で確かめましょう).極板間の電場の大きさは

$$E = 2E_1 = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

ですから,電位差は

$$V = Ed = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \times d = \frac{Qd}{\epsilon_0 S}$$

$$\therefore C = \frac{Q}{V} = \frac{\epsilon_0 S}{d}.$$

次に,半径 $a, b$  ( $a < b$ )2 つの球からなる同心球コンデンサーの静電容量を求めます.位置 $\vec{r}$ における電場は, $a < r < b$ のとき

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r}$$

となります(§ 1.9).右図のような経路 $C$ を考えると,球殻間の電位差は

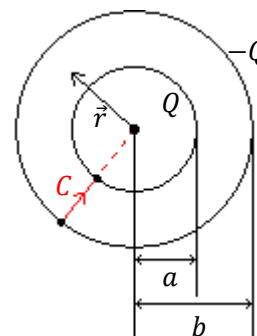
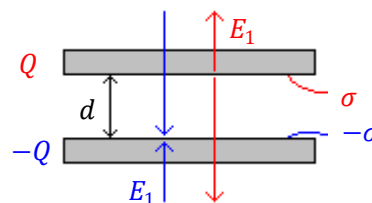
$$\begin{aligned} V &= - \int_C \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = - \int_C \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r} \cdot \hat{r} dr = - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_a^b \frac{dr}{r^2} \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) \end{aligned}$$

$$\therefore C = \frac{Q}{V} = 4\pi\epsilon_0 \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)^{-1} = 4\pi\epsilon_0 \frac{ab}{b-a}.$$

これらの例からも分かる通り,コンデンサーの静電容量はサイズに比例します.より具体的に,静電容量 $C$ のコンデンサーを $\lambda$ 倍に相似拡大すると,静電容量は $\lambda C$ になります.

### § 1.17 静電エネルギー

電荷分布を作るためには仕事をして電荷を運ぶ必要がありますから,電荷分布はエネルギーを蓄えていると考えられます.このエネルギーを静電エネルギーと呼びます.実際に,コンデンサーの静電エネルギーを計算してみましょう.



電荷を持たない 2 つの導体 A, B について, B から A へ少しずつ電荷を移動させ, 最終的に A, B がそれぞれ  $Q, -Q$  の電荷を持つ状態にすることを考えます. その途中の A, B がそれぞれ  $\lambda Q, -\lambda Q$  ( $0 \leq \lambda \leq 1$ ) の電荷を持っている状態において, B から A へ微小な電荷  $\Delta\lambda Q$  ( $0 < \Delta\lambda \ll 1$ ) を移動させるのに外力がする仕事は

$$\Delta W = V \times \Delta\lambda Q = \frac{\lambda Q}{C} \times \Delta\lambda Q = \frac{Q^2}{C} \lambda \Delta\lambda$$

$$\therefore W = \int_0^1 \frac{Q^2}{C} \lambda d\lambda = \frac{Q^2}{2C} = \frac{QV}{2}.$$

これがコンデンサーの静電エネルギーです. この議論は任意のコンデンサーで成り立つということに注意しましょう.

### § 1.18 電場のエネルギー密度

静電エネルギーは「電荷分布に蓄えられたエネルギー」ですが, 電荷分布は電場を作りますから, 「電場に蓄えられたエネルギー」という見方をすることもできます.

たとえば極板面積  $S$ , 対向距離  $d$  の平行平板コンデンサーを考えます. 極板間の電場の大きさは

$$E = \frac{Q}{\epsilon_0 S}$$

ですから, 静電エネルギーは

$$\frac{QV}{2} = \frac{\epsilon_0 ES}{2} \times Ed = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} \times Sd$$

$Sd$  は極板で挟まれた空間, すなわち電場の体積ですから, この式は

$$\text{「電場は単位体積当たり } \frac{\epsilon_0 E^2}{2} \text{ のエネルギーを持つ」}$$

と解釈できます.

証明は省略しますが, 任意の導体系の静電エネルギーは,  $\frac{\epsilon_0 E^2}{2}$  の体積積分に等しいことが知られています.

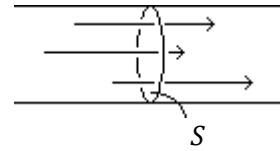
**Ex1.18.1** 同心球コンデンサーの静電エネルギーが  $\frac{\epsilon_0 E^2}{2}$  の体積積分に等しいことを示せ.

第2章 定常電流

§ 2.1 電流と電流密度

§ 1.14 以降静電平衡を扱ってきましたが、ここからは静電場かつ静電平衡でない場合を扱います(つまり、電荷密度は時間的に一定だが電流は存在する場合)。

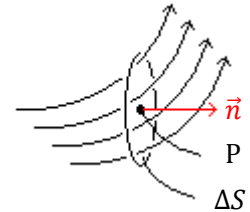
まずは電荷の流れが空間上一様な場合を考えます。このとき、単位時間あたりに平面 $S$ を通過する電気量を**電流の強さ**と呼び、 $I, I(S)$ などと書きます(単位:A(アンペア) = C/s)。



電荷の流れが空間変化している場合には、空間上の点 $P$ に対してそれを含む微小平面 $\Delta S$ (法線ベクトル $\vec{n}$ )を考えます。 $\Delta S$ の近くの電荷の流れは一様と見なせますから、電流の強さが定義できます。このとき

$$\lim_{\Delta S \rightarrow P} \frac{I(\Delta S)}{\Delta S} = \vec{j}(P) \cdot \vec{n}$$

となるベクトル場 $\vec{j}(P)$ を**電流密度**といいます。



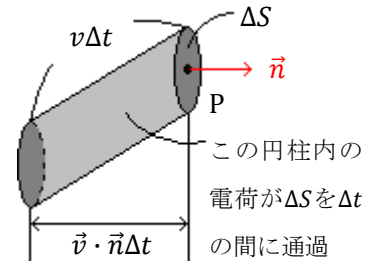
実際に、2つの単純な場合に電流密度を求めてみましょう：

例 1. 点電荷 $q$ が体積数密度 $n_0$ 、速度 $\vec{v}$ で一様に流れる場合

$$I(\Delta S) = \frac{(\vec{v} \cdot \vec{n} \Delta t \Delta S) n_0 q}{\Delta t} = (n_0 q \vec{v}) \cdot \vec{n} \Delta S.$$

従って

$$\begin{aligned} \frac{I(\Delta S)}{\Delta S} &= (n_0 q \vec{v}) \cdot \vec{n} \\ \therefore \vec{j}(P) &= n_0 q \vec{v}. \end{aligned}$$

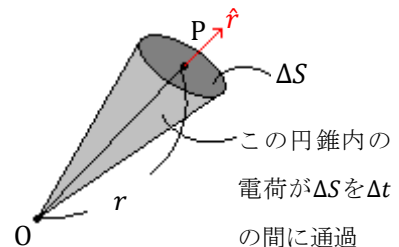


例 2. 原点から放射状に電流 $I$ が流れ出ている場合

$$I(\Delta S) = I \times \frac{\Delta S}{4\pi r^2}.$$

従って

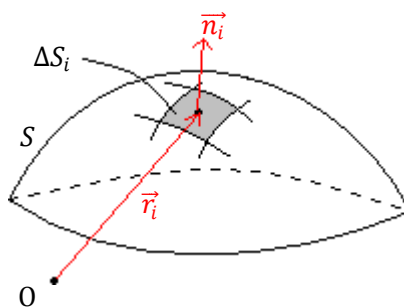
$$\begin{aligned} \frac{I(\Delta S)}{\Delta S} &= \frac{I}{4\pi r^2} = \left( \frac{I}{4\pi r^2} \hat{r} \right) \cdot \hat{r} \\ \therefore \vec{j}(P) &= \frac{I}{4\pi r^2} \hat{r}. \end{aligned}$$



向きの定まった曲面を貫く電流は

$$I(S) = \lim_{\Delta S_i \rightarrow 0} \sum_i I(\Delta S_i) = \lim_{\Delta S_i \rightarrow 0} \sum_i \vec{j}(\vec{r}_i) \cdot \vec{n}_i \Delta S_i$$

$$= \int_S \vec{j}(\vec{r}) \cdot d\vec{S}$$



と表されます.これを用いて,電荷保存則の微分形を導いてみましょう.

有界領域V(体積V)に対して境界(外向き)をSとおき,V内の電荷をQ,Sを貫く電流をIとします.このとき

$$-\frac{dQ}{dt} = I$$

が成り立ちます.というのは,左辺はV内の電荷の減少分を表し,右辺はVから外へ出ていく電荷を表し,電荷保存則によればこれらは等しくなるからです.ここで

$$I(S) = \int_S \vec{j}(\vec{r}) \cdot d\vec{S} \quad , \quad Q = \int_V \rho(\vec{r}, t) d\vec{r}$$

を用いると

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} d\vec{r} + \int_S \vec{j}(\vec{r}) \cdot d\vec{S} = 0$$

が従いますから,両辺をVで割ってV → 0とすると

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} \vec{j} = 0$$

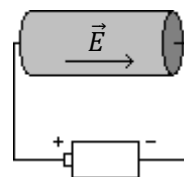
を得ます.これが**電荷保存則の微分形**です.この式は電荷密度が時間変化する場合にも成り立ちます.

### § 2.2 Ohm の法則

図のような単純化模型においては,次の**局所的 Ohm 則**が成り立ちます:

$$\vec{j}(\vec{r}) = \sigma \vec{E}(\vec{r}).$$

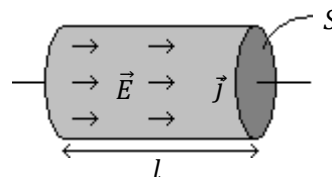
ここで,σは電気伝導度という物理量です.電気伝導度は物質の種類,温度に依存します.



局所的 Ohm 則から,Ohm の法則V = IRを導いてみましょう.

底面積S,高さlの柱状導体内部でE,jが一定のとき,V = El,I = jSが成り立つので

$$V = El = \frac{j}{\sigma} \times l = \frac{l}{\sigma S} I.$$



従って

$$R = \frac{l}{\sigma S}$$

とおけば  $V = IR$  を得ます. このことから,  $\lambda$  倍の相似拡大によって, 導体の抵抗  $R$  は  $1/\lambda$  倍になることが従います. すると, 電気伝導度  $\sigma$  が小さくてもサイズが十分大きければ導体と見なせます. § 1.15 で地球は導体だと言いましたが, それはこのような意味です.

**Ex2.2.1** 半径  $a, b$  ( $a < b$ ) 2 つの同心導体球殻の内側表面, 外側表面に電位差  $V$  を与えたとき, 流れる電流  $I$  を求めよ. ただし, 電気伝導度を  $\sigma$  とする.

§ 2.3 起電力

電池は, 電場に逆らって電荷を持ち上げるポンプのような働きをします. 実際にはその内部で化学反応や物理反応が起こっていて, それによって放出されるエネルギーで電池としての役割を果たしているわけですが, ここでは電池内部の反応には特に触れません.

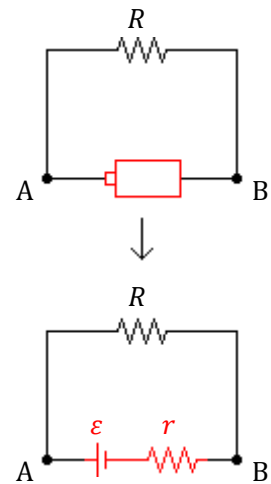
電池の両端(右図の AB 間)の電位差  $V$  と, 導体を流れる電流  $I$  との関数関係  $V(I)$  は, 電池によって決まります. そこで

$$\lim_{I \rightarrow 0} V(I) = \varepsilon, \quad \lim_{I \rightarrow 0} \frac{V(I) - \varepsilon}{I} = -r \quad (r > 0)$$

とおき,  $\varepsilon$  を電池の起電力,  $r$  を内部抵抗と呼びます. すなわち

$$V(I) = \varepsilon - rI + O(I^2).$$

このとき, 電池は右図のように単純化して表現されます.



§ 2.4 Joule 熱

§ 2.2 で Ohm の法則を導いたときと同様の模型を考えます. 質量  $m$ , 電荷  $q$  を持った粒子が一樣な電場  $\vec{E}$  から力を受け, 速度  $\vec{v}$  で粘性抵抗力  $-\eta\vec{v}$  ( $\eta > 0$ ) を受けながら進むとしましょう. 電場の方向を正とすると, 粒子の運動方程式は

$$m \frac{dv}{dt} = qE - \eta v.$$

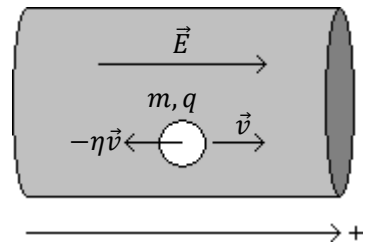
十分時間が経ち,  $v$  が一定(終端速度)となった定常状態では

$$m \cdot 0 = qE - \eta v$$

$$\therefore v = \frac{qE}{\eta}.$$

このとき, 粒子の体積数密度を  $n_0$  とおくと

$$j = n_0 qv = \frac{n_0 q^2}{\eta} E$$



ですから、電気伝導度は

$$\sigma = \frac{n_0 q^2}{\eta}$$

となっています。

さて、粒子の運動方程式の両辺に $v$ を掛けると

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{mv^2}{2} \right) = qEv - \eta v^2$$

が従います。右辺において $qEv$ は電場が、 $-\eta v^2$ は粘性抵抗力が単位時間当たりにする仕事を意味しています。静電場は渦なしの場でしたから、電場から受ける力 $q\vec{E}$ は保存力です。一方、粘性抵抗力 $-\eta\vec{v}$ は非保存力ですから、その仕事に $-1$ を掛けて得られる $\eta v^2$ だけ熱が発生します。

定常状態では $\frac{d}{dt} \left( \frac{mv^2}{2} \right) = 0$ ですから、結局単位時間、1粒子当たり発生する熱量は

$$P = qEv$$

となります。これを単位体積あたりに換算すると

$$P = n_0 qEv = jE.$$

より一般に

$$P = \vec{j}(\vec{r}) \cdot \vec{E}(\vec{r})$$

が成り立ちます。

特に、底面積 $S$ 、高さ $l$ の柱状導体全体で発生する熱は

$$jE \times Sl = jS \times El = IV.$$

一般に、任意の形状で

$$\int_V \vec{j} \cdot \vec{E} dV = IV$$

が成立します。

**Ex2.4.1** 半径 $a, b$  ( $a < b$ ) 2つの同心導体球殻の内側表面、外側表面に電位差 $V$ が与えられている場合について、電流密度と電場との内積の体積積分が $IV$ に等しいことを示せ。

### 第3章 静磁場

#### § 3.1 既習事項

すでに高校でいくつかの事実を学んでいます. 主なものを羅列しましょう:

##### (1) Lorentz 力

電荷  $q$  を持つ粒子が, 速度  $\vec{v}$  で電場  $\vec{E}$ , 磁場  $\vec{B}$  中を運動するときに受ける力は

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}).$$

##### (2) 電流が磁場から受ける力

直線電流  $\vec{I}$  が単位長さあたり磁場  $\vec{B}$

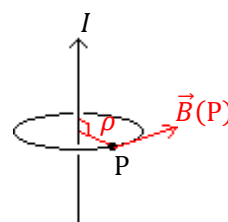
$$\vec{F} = \vec{I} \times \vec{B}$$

##### (3) 直線電流が作る磁場

直線電流  $I$  から距離  $\rho$  の点  $P$  における磁場  $\vec{B}(P)$  の大きさは

$$|\vec{B}(P)| = \frac{\mu_0 I}{2\pi \rho}.$$

ここで,  $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} [\text{Tm/A}]$  は真空の透磁率である (T (テスラ) は磁場の単位:  $\text{T} = \text{N/Am}$ ).

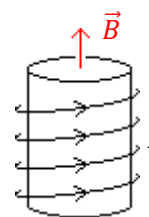


##### (4) ソレノイドが作る磁場

単位長さあたりの巻き数  $n$  のソレノイドに電流  $I$  を流したとき, 内部に生じる磁場は

$$|\vec{B}| = n\mu_0 I.$$

ただし, その向きは電流の方向に右ねじを回したとき, ねじが進む方向である.



この内(2)は(1)から従い, また(3)と(4)についても後述の Biot-Savart の法則から導かれるので, これ以降 Lorentz 力と Biot-Savart の法則を基礎に議論を進めていくことになります.

注: この講義では  $\vec{B}$  を磁場と呼んでいますが, 高校では磁束密度と教わったかも知れません. その上で磁束密度とは別に磁場という概念が存在してそれを  $\vec{H}$  と書き,  $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$  という関係があるのでした. 言葉に注意しながら読み進めてください.

### § 3.2 Biot-Savart の法則

Biot-Savart の法則は, 電流がある曲線に沿って流れるとき, 空間の各点における磁場を定式化したものです. その主張は次のようになります:

**Biot-Savart の法則** 電流  $I$  が曲線  $C$  に沿って流れるとき, 点  $P(\vec{OP} = \vec{r})$  における磁場は

$$\vec{B}(P) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \lim_{|\Delta \vec{r}_i| \rightarrow 0} \sum_i \frac{\Delta \vec{r}_i \times \vec{R}_i}{R_i^3} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{d\vec{r}' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}.$$

ただし, 曲線  $C$  の分点  $P_i$  に対し  $\vec{OP}_i = \vec{r}_i$  とし,  $\Delta \vec{r}_i = \vec{r}_{i+1} - \vec{r}_i$ ,  $\vec{R}_i = \vec{r} - \vec{r}_i$  とおいた.



簡単にこの式を解釈しましょう。微小線素  $P_i P_{i+1}$  を流れる電流が点  $P$  に作る磁場  $\Delta \vec{B}_i$  の重ね合わせが  $\vec{B}(P)$  だと考えます。直線電流が作る磁場と同様に考え、 $\Delta \vec{B}_i$  は  $\Delta \vec{r}_i \times \vec{R}_i$  の方向を向くべきです。さらに、 $|\Delta \vec{B}_i|$  は微小線素の長さ  $|\Delta \vec{r}_i|$  及び電流の強さ  $I$  に比例し、かつ微小線素からの距離  $R_i$  の2乗に反比例すると考えるのが自然ですから、これらの要請を満足するように  $\Delta \vec{B}_i$  を書いてみると、比例定数を  $k_m$  として

$$\Delta \vec{B}_i = k_m I \frac{\Delta \vec{r}_i \times \vec{R}_i}{R_i^3}$$

となります。ここで

$$k_m = \frac{\mu_0}{4\pi} = 10^{-7} [\text{Tm/A}]$$

として磁場の単位を定めると

$$\vec{B}(P) = \lim_{|\Delta \vec{r}_i| \rightarrow 0} \sum_i \Delta \vec{B}_i = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \lim_{|\Delta \vec{r}_i| \rightarrow 0} \sum_i \frac{\Delta \vec{r}_i \times \vec{R}_i}{R_i^3}$$

となり、Biot-Savart の法則を得ます。

Biot-Savart の法則から、直線電流が作る磁場を求めてみましょう。直線電流  $I$  は  $z$  軸正方向に流れているものとし、 $I$  が点  $P$  ( $\vec{OP} = \vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$ ) に作る磁場を考えます。

線分  $x = y = 0, -L \leq z \leq L$  を分割し、分点を  $P_i$  ( $\vec{OP}_i = \vec{r}_i = z_i \hat{z}$ ) とします。さらに

$$\Delta \vec{r}_i = \vec{r}_{i+1} - \vec{r}_i = (z_{i+1} - z_i) \hat{z} = \Delta z_i \hat{z},$$

$$\vec{R}_i = \vec{r} - \vec{r}_i = x\hat{x} + y\hat{y} + (z - z_i) \hat{z} = \vec{\rho} + (z - z_i) \hat{z}$$

とおくと

$$R_i^3 = (\rho^2 + (z - z_i)^2)^{\frac{3}{2}},$$

$$\Delta \vec{r}_i \times \vec{R}_i = \Delta z_i \hat{z} \times (\vec{\rho} + (z - z_i) \hat{z}) = \Delta z_i \hat{z} \times \vec{\rho} \quad (\hat{z} \times \hat{z} = \vec{0})$$

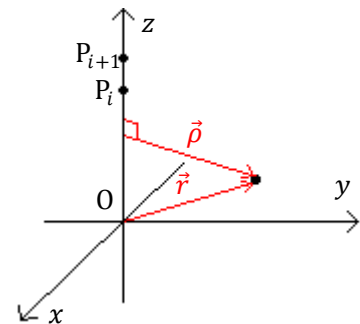
となりますから

$$\begin{aligned} \vec{B}(P) &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \lim_{\Delta \vec{r}_i \rightarrow 0} \sum_i \frac{\Delta \vec{r}_i \times \vec{R}_i}{R_i^3} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \lim_{\Delta \vec{r}_i \rightarrow 0} \sum_i \frac{\Delta z_i}{(\rho^2 + (z - z_i)^2)^{\frac{3}{2}}} \times (\hat{z} \times \vec{\rho}) \\ &= \frac{\mu_0 I (\hat{z} \times \vec{\rho})}{4\pi} \int_{-L}^L \frac{dz'}{(\rho^2 + (z - z')^2)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

ここで

$$\int \frac{dz'}{(\rho^2 + (z - z')^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{z - z'}{\rho^2 \sqrt{\rho^2 + (z - z')^2}} + C$$

ですから、 $L$  を十分大きくとると



$$\vec{B}(P) = \frac{\mu_0 I (\hat{z} \times \vec{\rho})}{4\pi \rho^2} \left( \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\rho}{z-L}\right)^2}} + \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\rho}{z+L}\right)^2}} \right) \rightarrow \frac{\mu_0 I (\hat{z} \times \vec{\rho})}{2\pi \rho^2} \quad (L \rightarrow \infty).$$

$\hat{z} \perp \vec{\rho}$ ですから,このとき確かに

$$|\vec{B}(P)| = \frac{\mu_0 I}{2\pi \rho}$$

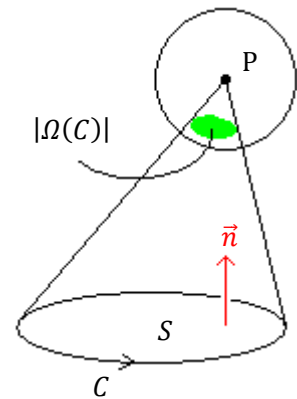
が成り立っています.

### § 3.3 ループ電流が作る磁場

Biot-Savart の法則の特別な場合として,閉曲線を流れる電流(ループ電流)が作る磁場を考えます.この結果は後述する Ampère の法則に役立ちます.

ループ電流が作る磁場を記述するために,閉曲線 $C$ に対する立体角を定義しましょう.閉曲線 $C$ の立体角 $\Omega(C)$ を, $C$ を縁とする曲面 $S$ の立体角 $\Omega(S)$ とします.ただし, $S$ の向きと $C$ の向きは右ねじの法則に従って定めるものとします.

たとえば右図では $\Omega(C) = \Omega(S) < 0$ で,その大きさは単位球面から錐体が切り取る面積に等しくなります.



**定理(ループ電流が作る磁場)** ループ電流 $I$ が点 $P(\vec{OP} = \vec{r})$ に作る磁場 $\vec{B}(P) = \vec{B}(\vec{r})$ は, $P$ から見たループ $C$ の立体角を $\Omega(C; P)$ とすると

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \vec{\nabla} \Omega(C; P)$$

で与えられる.

**[証明]** 点 $P$ から見たループ $C$ の立体角 $\Omega(C; P)$ と, $P$ を微小なベクトル $\delta\vec{r}$ だけずらした点 $P'$ から見た立体角 $\Omega(C; P')$ との差は, $\Omega$ を $P$ の関数と考えれば

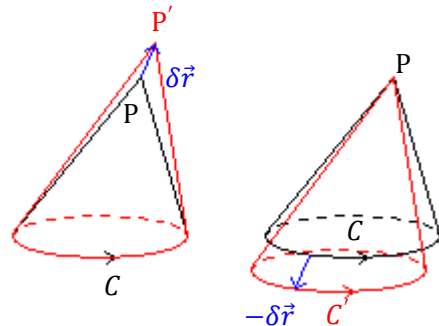
$$\Omega(C; P) - \Omega(C; P') = \vec{\nabla} \Omega(C; P) \cdot \delta\vec{r} + O((\delta\vec{r})^2)$$

と書ける (§ 1.4).  $\Omega(C; P)$ は $C$ と $P$ との相対的な位置関係で定まるから, $P$ を $\delta\vec{r}$ だけずらす代わりに $C$ を $-\delta\vec{r}$ だけずらしたループ $C'$ を考えると

$$\Omega(C; P) - \Omega(C; P') = \Omega(C'; P) - \Omega(C; P)$$

$$\therefore \Omega(C'; P) - \Omega(C; P) = \vec{\nabla} \Omega(C; P) \cdot \delta\vec{r} + O((\delta\vec{r})^2)$$

が成り立つ.



次に,ループ $C, C'$ で作られる柱状領域の外向き表面を $S$ とすると, $P$ は $S$ の外側にあるので $\Omega(S; P) = 0$  (§ 1.8).一方 $S$ の側面を $\bar{S}$ とすると, $C'$ の法線が $S$ の内側に向いていることに注意して

$$\Omega(S; P) = \Omega(C; P) - \Omega(C'; P) + \Omega(\bar{S}; P)$$

が成り立つから,結局

$$\Omega(\bar{S}; P) = \Omega(C'; P) - \Omega(C; P) = \vec{\nabla}\Omega(C; P) \cdot \delta\vec{r} + O((\delta\vec{r})^2)$$

を得る.

さて, $\Omega(\bar{S}; P)$ を計算しよう. $C'$ を微小線素に分割し,代表点を $\vec{r}_i$ とおく.さらに $\Delta\vec{r}_i = \vec{r}_{i+1} - \vec{r}_i, \vec{R}_i = \vec{r} - \vec{r}_i$ とおいて, $\Delta\vec{r}_i$ と $\delta\vec{r}$ とで張られる微小平行四辺形の面積を $\Delta S_i$ とする.このとき, $\Delta S_i$ の立体角への寄与 $\Delta\Omega_i(P)$ は

$$\Delta\Omega_i(P) = \frac{\Delta S_i \vec{n}_i \cdot (-\vec{R}_i)}{R_i^3}$$

となるが, $\Delta S_i = |\Delta\vec{r}_i \times \delta\vec{r}|, \vec{n}_i \perp \Delta\vec{r}_i, \vec{n}_i \perp \delta\vec{r}$ より

$$\Delta S_i \vec{n}_i = \Delta\vec{r}_i \times \delta\vec{r}$$

が成り立つから, $(\delta\vec{r} \times \Delta\vec{r}_i) \cdot \vec{R}_i = \delta\vec{r} \cdot (\Delta\vec{r}_i \times \vec{R}_i)$ に注意して

$$\Delta\Omega_i(P) = \frac{(\delta\vec{r} \times \Delta\vec{r}_i) \cdot \vec{R}_i}{R_i^3} = \frac{(\delta\vec{r} \times \Delta\vec{r}_i) \cdot \vec{R}_i}{R_i^3} = \delta\vec{r} \cdot \frac{\Delta\vec{r}_i \times \vec{R}_i}{R_i^3}$$

$$\therefore \Omega(\bar{S}; P) = \delta\vec{r} \cdot \left( \lim_{|\Delta\vec{r}_i| \rightarrow 0} \sum_i \frac{\Delta\vec{r}_i \times \vec{R}_i}{R_i^3} \right).$$

以上より

$$\vec{\nabla}\Omega(C; P) = \lim_{|\Delta\vec{r}_i| \rightarrow 0} \sum_i \frac{\Delta\vec{r}_i \times \vec{R}_i}{R_i^3}$$

を得るから,Biot-Savart の法則より

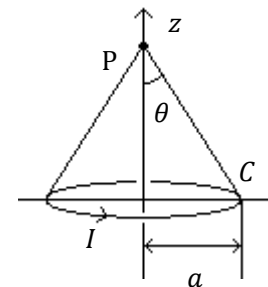
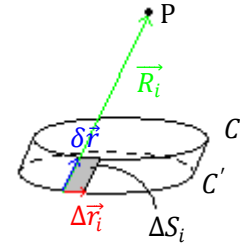
$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \lim_{|\Delta\vec{r}_i| \rightarrow 0} \sum_i \frac{\Delta\vec{r}_i \times \vec{R}_i}{R_i^3} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \vec{\nabla}\Omega(C; P). \quad (\text{Q.E.D.})$$

例として,円電流がその軸線上に作る磁場を考えてみましょう. $xy$ 平面上,原点を中心とする半径 $a$ の円 $C$ を反時計回りに流れる電流が,点 $P(0,0,z)$  ( $z > 0$ )に作る磁場を求めます.

$P$ を頂点, $C$ を底面の縁とする円錐の半頂角を $\theta$ とすると, $P$ から見た $C$ の立体角は,法線ベクトルの向きに注意して

$$\Omega(C; P) = 2\pi(\cos\theta - 1) = 2\pi \left( \frac{z}{\sqrt{a^2 + z^2}} - 1 \right)$$

となります(演習問題(2) 第5問).対称性より, $\vec{B}(P)$ の $x$ 成分, $y$ 成分は0としてよいので, $z$ 成分 $B_z$ のみを考えると



$$B_z = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \times \frac{\partial}{\partial z} \Omega(C; P) = \frac{\mu_0 I}{2} \times \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{z}{\sqrt{a^2 + z^2}} - 1 \right) = \frac{\mu_0 I a^2}{2(a^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\therefore \vec{B}(P) = \frac{\mu_0 I a^2}{2(a^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \hat{z}.$$

この式は  $z \leq 0$  の場合にも成り立ちます. 確かめてみてください.

### § 3.4 磁気双極子

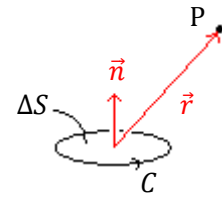
原点近くの微小ループ  $C$  が作る磁場を考えます.  $C$  を縁とする曲面を  $\Delta S$  とし, その向きは右ねじの法則に従うものとします. このとき, 点  $P(\vec{OP} = \vec{r})$  に対して

$$\Omega(C; P) = -\Delta S \frac{\vec{n} \cdot \vec{r}}{r^3}$$

が成り立ちますから,

$$\vec{B}(P) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \vec{\nabla} \Omega(C; P) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \vec{\nabla} \left( \frac{(I \Delta S \vec{n}) \cdot \vec{r}}{r^3} \right) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \vec{\nabla} \left( \frac{\vec{m} \cdot \vec{r}}{r^3} \right)$$

を得ます.  $\vec{m} = I \Delta S \vec{n}$  を磁気モーメントと呼びます.



§ 1.7 において, 電気双極子が作る電場は

$$\vec{E}(P) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \vec{\nabla} \left( \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3} \right)$$

と表されました. このことから, 以下のような対応関係が容易に見てとれます:

$$\mu_0 \leftrightarrow \frac{1}{\epsilon_0}, \quad \vec{m} \leftrightarrow \vec{p}.$$

実際, 真空の誘電率  $\epsilon_0$  と真空の透磁率  $\mu_0$  との間には, 次の関係が成り立ちます:

$$\frac{1}{\epsilon_0 \mu_0} = c^2 \quad (c: \text{真空中の光速}).$$

これらの関係を踏まえ, 上のような形の磁場の源を **磁気双極子** と呼びます. 構造化学で登場した電子の固有角運動量(スピン)も, 磁気双極子です.

### § 3.5 Ampère の法則 (cf. 演習問題(4) 第1問, 第2問, 第3問)

Biot-Savart の法則より,  $z$  軸正方向の直線電流  $I$  から距離  $\rho$  の点  $P$  における磁場は

$$|\vec{B}(P)| = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho} \quad (\text{接線方向})$$

となることが導かれました (§ 3.2). この磁場を  $xy$  平面上, 原点を中心とする円周  $C$  上で線積分してみましょう. 円周の分点を  $\vec{r}_i$  とし,  $\Delta\vec{r}_i = \vec{r}_{i+1} - \vec{r}_i$  とすると

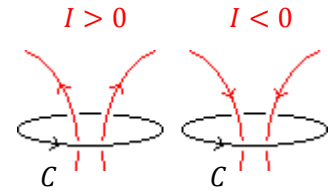
$$\oint_C \vec{B}(P) \cdot d\vec{r} = \lim_{|\Delta\vec{r}_i| \rightarrow 0} \sum_i \vec{B}(\vec{r}_i) \cdot \Delta\vec{r}_i = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho} \times \lim_{|\Delta\vec{r}_i| \rightarrow 0} \sum_i |\Delta\vec{r}_i| = \mu_0 I$$

となります.これをより一般の場合に拡張したものが, Ampère の法則です:

**Ampère の法則** 向きづけられた任意の閉曲線  $C$  において

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{r} = \mu_0 \times (C \text{ を貫く電流})$$

が成立する.ただし電流の符号は, $C$ に沿って一周するとき右ねじが進む向きを正とする.



いくつか例を見てみましょう.

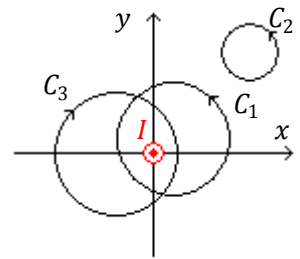
**例 1. 直線電流**

簡単のため,電流は $z$ 軸正方向,閉曲線は $xy$ 平面上にあるものとする(位置ベクトルを $\vec{\rho}$ と書く).  
右図において

$$\oint_{C_1} \vec{B} \cdot d\vec{\rho} = \mu_0 I,$$

$$\oint_{C_2} \vec{B} \cdot d\vec{\rho} = 0,$$

$$\oint_{C_3} \vec{B} \cdot d\vec{\rho} = -\mu_0 I.$$

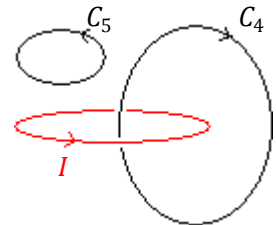


**例 2. ループ電流**

右図において

$$\oint_{C_4} \vec{B} \cdot d\vec{r} = \mu_0 I,$$

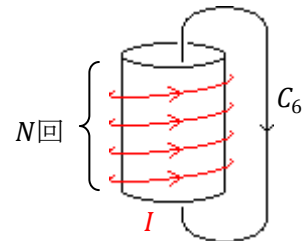
$$\oint_{C_5} \vec{B} \cdot d\vec{r} = 0.$$



**例 3. ソレノイド**

右図において

$$\oint_{C_6} \vec{B} \cdot d\vec{r} = N\mu_0 I.$$



例 1,2 の結果の導出については,演習問題とします.例 3 の結果は,例 2 を認めれば納得できるでしょう.

**Ex3.5.1** 例 1,2 のそれぞれについて,磁場の線積分がこのように与えられることを示せ.

## § 3.6 静磁場の基礎方程式

まずは前のセクションで見た, Ampère の法則の微分形を導出します.

点Pを含む微小平面S(縁をCとする)を考えましょう. 電流は電流密度の面積分で表されましたから (§ 2.1), Ampère の法則は

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{r} = \mu_0 \int_S \vec{j} \cdot d\vec{S}$$

と書けます(ただし, CとSの向きは右ねじの法則によります). 両辺を面積Sで割り, 法線ベクトル $\vec{n}$ は一定のままSを1点Pに縮める極限をとると

$$(\text{rot } \vec{B})_P \cdot \vec{n} = (\mu_0 \vec{j}(P)) \cdot \vec{n}$$

となりますが,  $\vec{n}$ は任意にとることができるので結局

$$(\text{rot } \vec{B})_P = \mu_0 \vec{j}(P)$$

が得られます.

ところで静電場の基礎方程式は, 電場の divergence 及び rotation に関するものでした (§ 1.13). 静磁場の場合も同様に記述されることが期待できますから, 今度は磁場の divergence を計算してみましよう.

Biot-Savart の法則より

$$\text{div } \vec{B} = \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \lim_{|\Delta \vec{r}_i| \rightarrow 0} \sum_i \vec{\nabla} \cdot \left( \Delta \vec{r}_i \times \frac{\vec{R}_i}{R_i^3} \right)$$

となります. 公式

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) - \vec{A} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B})$$

を用いると

$$\text{div } \vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \lim_{|\Delta \vec{r}_i| \rightarrow 0} \sum_i \left( \frac{\vec{R}_i}{R_i^3} \cdot (\vec{\nabla} \times \Delta \vec{r}_i) - \Delta \vec{r}_i \cdot \left( \vec{\nabla} \times \frac{\vec{R}_i}{R_i^3} \right) \right).$$

ここで,  $\vec{\nabla} \times \vec{r} = \vec{0}$ より

$$\vec{\nabla} \times \Delta \vec{r}_i = \vec{\nabla} \times \vec{r}_{i+1} - \vec{\nabla} \times \vec{r}_i = \vec{0}.$$

また,  $\frac{\vec{R}_i}{R_i^3}$ は, 原点にある点電荷が位置 $\vec{R}_i$ に作る電場ですから, 渦なしの場の法則 (§ 1.13)より

$$\vec{\nabla} \times \frac{\vec{R}_i}{R_i^3} = \vec{0}.$$

従って

$$\text{div } \vec{B} = 0$$

となります. これを磁場の Gauss の法則と呼ぶこともあります.

電場の Gauss の法則は

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

と表されました。この式は、電荷密度  $\rho$  が電場の源であると捉えることができます。磁場の **divergence** が 0 というのは、電荷に相当するような「磁荷」が単独では存在しないことを示唆しています。

ちなみに、磁場の Gauss の法則の積分形は

$$\int_{S(\text{閉曲面})} \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

となります。

最後にもう一度、静磁場の基礎方程式をまとめて書いておきましょう：

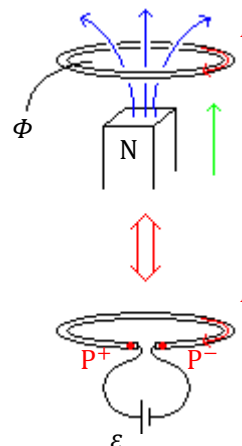
$$\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} \quad , \quad \operatorname{div} \vec{B} = 0.$$

### 第 4 章 時間に依存する電磁場

#### § 4.1 電磁誘導 (cf.演習問題(5) 第 1 問)

前の章までに導いた,静電場及び静磁場の基礎方程式によって,電磁場が時間に依存しない場合の現象が記述できるようになりました.この章の目標は,時間に依存する電磁場に対する基礎方程式を導出することです.

その典型例が,高校時代に学習した電磁誘導です.たとえば右図のように磁石のN極を導体リングCに近づけると,Cを貫く磁束Φが増加し,それを打ち消す方向に電流が流れます.そしてその電流の大きさは,磁束の時間変化と同じ大きさの起電力εを持つ内部抵抗0の電池を,小さな切れ込みを入れたリングにつないだときに流れる電流の大きさに等しくなります:



$$\varepsilon = \frac{\partial \Phi}{\partial t}.$$

この電磁誘導の法則を,電場 $\vec{E}$ 及び磁場 $\vec{B}$ を用いて定式化してみましょう.まずは,Cを縁とする曲面Sを貫く磁束を

$$\Phi(S) = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

と定義します(法線ベクトルの向きは,右ねじの法則により定める).次に,切れ込みの低電位側の点P<sup>-</sup>と高電位側の点P<sup>+</sup>の間の電位差は,C内の電場によるもので

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{r} = -\varepsilon$$

が成り立ちます.これらにより

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{r} = - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

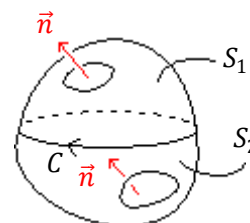
が得られます.これを改めて電磁誘導の法則と呼ぶことにします.

ところで,右辺の面積分に現れる曲面Sには任意性がありますから,その値がSのとり方によらないことを確かめる必要があります.そのためにCを縁とする2つの曲面 $S_1, S_2$ を考え,面積分の差

$$\int_{S_1} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} - \int_{S_2} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

を計算します(右図).ここで, $S_2$ の向きを反対にした曲面を $S_2'$ とすると

$$\int_{S_2} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} = - \int_{S_2'} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$





が成り立ち、かつ  $S_1$  と  $S_2'$  は 1 つの外向き閉曲面を作るので

$$\int_{S_1} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} - \int_{S_2} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} = \int_{S_1} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} + \int_{S_2'} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} = \int_{S_1+S_2'} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{S_1+S_2'} \vec{B} \cdot d\vec{S}.$$

従って静磁場と同様、電磁場が時間に依存する場合においても

$$\int_{S(\text{閉曲面})} \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

が成り立つと仮定すれば、電磁誘導の法則の右辺の値は一意的に定まり、矛盾なく説明できます(単独磁荷が存在すると仮定すると、修正が必要です(cf.演習問題(5) 第3問)).

さて、電磁誘導の法則を微分形に書き直しましょう. 詳しい操作は、静電場と静磁場の基礎方程式に関する場合と同じなので省略します:

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}.$$

磁場が時間変化しないときには

$$\text{rot } \vec{E} = \vec{0}$$

となりますから、電磁誘導の法則は、静電場における渦なしの場の法則を一般化したものとなっていることが分かります.

#### § 4.2 Ampère-Maxwell 則 (cf.演習問題(5) 第2問)

静磁場において、Ampère の法則は

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{r} = \mu_0 \int_S \vec{j} \cdot d\vec{S}$$

と記述されました. しかし、電磁場が時間変化する場合には右辺の面積分の値が  $S$  のとり方によって異なってしまいます. 実際、前のセクションと同様に閉曲線  $C$  を縁とする 2 つの曲面  $S_1, S_2$  上の面積分の差は

$$\int_{S_1} \vec{j} \cdot d\vec{S} - \int_{S_2} \vec{j} \cdot d\vec{S} = \int_{S_1} \vec{j} \cdot d\vec{S} + \int_{S_2'} \vec{j} \cdot d\vec{S} = \int_{S_1+S_2'} \vec{j} \cdot d\vec{S}$$

となりますが、電荷保存則 (§ 2.1) より、外向き閉曲面  $S_1 + S_2'$  で囲まれる体積を  $V$  とすると

$$\int_{S_1+S_2'} \vec{j} \cdot d\vec{S} = \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV$$

となります. 静電場でない場合、すなわち  $\frac{\partial \rho}{\partial t} \neq 0$  の場合には、この体積積分が必ずしも 0 とならないというわけです.

そこで、時間変化を考えた補正項(「変位電流」の項)を加えて

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{r} = \mu_0 \int_S \left( \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{S}$$

とし, 次の2つの要求を満たすようにベクトル場 $\vec{D}$ を定めます:

(1) 静電場かつ静磁場, すなわち $\vec{E}, \vec{B}, \rho, \vec{j}$ が $t$ によらないとき

$$\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \vec{0}$$

が成り立つ(→Ampèreの法則に帰着).

(2) 右辺の面積分が, $C$ を縁とする曲面 $S$ のとり方によらない.

先程と同様の議論により, 条件(2)は

$$\int_{S(\text{閉曲面})} \left( \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{S} = 0$$

と表現しても同じことです. これを微分形に書き直すと

$$\text{div} \left( \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) = 0.$$

電荷保存則 (§ 2.1) より

$$\frac{\partial}{\partial t} (-\rho + \text{div} \vec{D}) = 0.$$

さて, 静電場における Gauss の法則は

$$\text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

でした. 従って,  $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}$  とし, 電磁場が時間変化する場合にも Gauss の法則が成り立つものと仮定すれば辻褃が合います.

以上より, Ampère の法則の一般化としての Ampère-Maxwell 則

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{r} = \mu_0 \int_S \left( \vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{S}$$

が得られました. 微分形は

$$\text{rot} \vec{B} = \mu_0 \left( \vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$$

で与えられます.

### § 4.3 Maxwell 方程式

前のセクションまでに, 時間に依存する電磁場に対しても成立する4つの方程式を導きました. まとめて書いておきましょう:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0}, & \operatorname{div} \vec{B} &= 0, \\ \operatorname{rot} \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, & \operatorname{rot} \vec{B} &= \mu_0 \left( \vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right). \end{aligned}$$

電場の変化が磁場に影響し、磁場の変化が電場に影響する、という関係が見て取れます。一方で静磁場、静電場の場合には、電場と磁場の式は完全に分離しています。

特別な場合として、真空、すなわち  $\rho = 0, \vec{j} = \vec{0}$  の場合には、Maxwell 方程式は

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{E} &= 0, & \operatorname{div} \vec{B} &= 0, \\ \operatorname{rot} \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, & \operatorname{rot} \vec{B} &= \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \left( = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \end{aligned}$$

となります。電場と磁場の対称性がはっきりと分かりますね。

#### §4.4 電磁波

Maxwell 方程式から導かれる 1 つの帰結として、電磁波を紹介します。

真空中において、 $x, y$  方向に一樣な電磁場  $\vec{E}(z, t), \vec{B}(z, t)$  を考えます。 $\operatorname{div} \vec{E} = 0$  より

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0.$$

従って電場の  $z$  成分  $E_z$  は定数となります。 $E_z = 0$  とおいても差し支えありません。

同様に、 $\operatorname{div} \vec{B} = 0$  より  $B_z = 0$  とおくことができます。

次に、 $\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$  より

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) \hat{x} + \left( \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) \hat{y} + \left( \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) \hat{z} &= -\frac{\partial E_y}{\partial z} \hat{x} + \frac{\partial E_x}{\partial z} \hat{y} \\ &= -\frac{\partial B_x}{\partial t} \hat{x} - \frac{\partial B_y}{\partial t} \hat{y} - \frac{\partial B_z}{\partial t} \hat{z} \\ \therefore -\frac{\partial E_y}{\partial z} &= -\frac{\partial B_x}{\partial t} \dots (1), \quad \frac{\partial E_x}{\partial z} = -\frac{\partial B_y}{\partial t} \dots (2). \end{aligned}$$

同様に、 $\operatorname{rot} \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$  より

$$-\frac{\partial B_y}{\partial z} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial E_x}{\partial t} \dots (3), \quad \frac{\partial B_x}{\partial z} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial E_y}{\partial t} \dots (4).$$

(1)式の両辺を  $z$  で偏微分したものと、(4)式の両辺を  $t$  で偏微分したものとを足し合わせると

$$-\frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = 0$$

となり,電場の $y$ 成分 $E_y$ が 1 次元の波動方程式を満たすことが分かります.この方程式の一般解は

$$E_y = f(z + ct) + g(z - ct)$$

の形に書けることが知られています(D'Alembert の解).

同様に $E_x$ も 1 次元の波動方程式を満たします.また,(2)式と(3)式から, $B_x$ と $B_y$ も波動方程式の解となることが確認できます.

一般に,真空中の電磁場は 3 次元の波動方程式を満たします(ExI.3.5).

## 補章

## § C.1 Maxwell 方程式と電磁場のエネルギー密度

静電場のエネルギー密度は, § 1.18 で述べたように

$$\frac{\varepsilon_0 E^2}{2} \left( = \frac{\varepsilon_0 \vec{E}^2}{2} \right)$$

で与えられました( $\vec{E}^2 = \vec{E} \cdot \vec{E}$ ).一方,電場と磁場には

$$\varepsilon_0 \leftrightarrow \frac{1}{\mu_0}, \quad \vec{E} \leftrightarrow \vec{B}$$

という対応関係がありましたから,静磁場のエネルギー密度は

$$\frac{B^2}{2\mu_0} \left( = \frac{\vec{B}^2}{2\mu_0} \right)$$

となることが予想されます(実際正しいです).ここでは,時間に依存する電磁場のエネルギー密度について考察します.

真空中,すなわち $\rho = 0, \vec{j} = \vec{0}$ の場合を考えましょう.このとき,Ampère-Maxwell 則より

$$\text{rot } \vec{B} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

が成り立ちますから

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\varepsilon_0 \vec{E}^2}{2} \right) = \vec{E} \cdot \frac{\partial}{\partial t} (\varepsilon_0 \vec{E}) = \vec{E} \cdot \text{rot } \frac{\vec{B}}{\mu_0}$$

となります.これは一般には 0 となりませんから,エネルギーが時間変化,つまり保存しないことになってしまいそうです.

また,電磁誘導の法則より

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

が成り立つので

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\vec{B}^2}{2\mu_0} \right) = \frac{\vec{B}}{\mu_0} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} \cdot \text{rot } \vec{E}$$

となります.これも一般には 0 とならず,やはりエネルギーが保存していないかのように見えます.

このように,静電場,静磁場においては保存していた量が,それぞれ時間変化が加わることで保存しなくなります.それではこれらの量が何の意味も持たないかということのようなことはなく,実はこれらの和が保存しているのです.このことを確かめてみましょう.上の計算から

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\varepsilon_0 \vec{E}^2}{2} + \frac{\vec{B}^2}{2\mu_0} \right) = \vec{E} \cdot \text{rot } \frac{\vec{B}}{\mu_0} + \frac{\vec{B}}{\mu_0} \cdot \text{rot } \vec{E} = -\text{div} \left( \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B} \right)$$

が成り立ちます(ベクトル解析の公式を用いました. § I.3 を参照). § 2.1 で登場した電荷保存則と同じ形ですね:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\operatorname{div} \vec{j}.$$

電荷密度 $\rho$ の全空間における体積積分

$$Q = \int_{\text{全空間}} \rho dV$$

は空間全体の電荷を意味しますから, 当然保存量となります.

これらを比較すると, 次のことが分かります:

- ・電磁場のエネルギー密度:

$$\frac{\epsilon_0 \vec{E}^2}{2} + \frac{\vec{B}^2}{2\mu_0}.$$

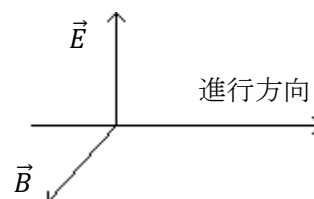
- ・真空中において

$$\int_{\text{全空間}} \left( \frac{\epsilon_0 \vec{E}^2}{2} + \frac{\vec{B}^2}{2\mu_0} \right) dV$$

は保存量.

- ・電磁場のエネルギー流密度(Poynting ベクトル):

$$\frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B}.$$

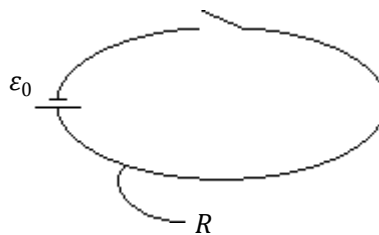


Poynting ベクトルの方向は, 電磁波の進行方向と一致しています(電磁波は横波です. すなわち, 波の進行方向と振動方向とが直交しています).

## § C.2 自己インダクタンス

起電力 $\epsilon_0$ を持つ内部抵抗のない電池とスイッチからなる回路(全抵抗 $R$ )を考えます(右図). スイッチを入れてしばらくすると電流 $I$ は

$$I = \frac{\epsilon_0}{R}$$



となりますが, 入れた瞬間にこの大きさの電流が流れるわけではありません. これは回路の自己インダクタンスの効果によるものです.

自己インダクタンス $L$ とは, 閉曲線 $C$ を流れる電流 $I$ と,  $C$ を縁とする曲面 $S$ (向きは右ねじの法則により定める)を貫く磁束 $\Phi(S)$ の比例係数です:

$$\Phi(S) = LI.$$

$L$ は $C$ の形状のみで決まり, その値は正となります.

回路の閉曲線 $C$ を、導線 $C_1$ と電池内部 $C_2$ に分けると、曲線 $C_1$ については Ohm の法則より

$$\int_{C_1} \vec{E} \cdot d\vec{r} = RI.$$

また, $C_2$ については

$$\int_{C_2} \vec{E} \cdot d\vec{r} = -\varepsilon_0.$$

が成り立ちます(電場の向きに注意).

一方、電磁誘導の法則(§ 4.1)より

$$\int_{C_1} \vec{E} \cdot d\vec{r} + \int_{C_2} \vec{E} \cdot d\vec{r} = \int_C \vec{E} \cdot d\vec{r} = - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} = - \frac{d\Phi(S)}{dt} = -L \frac{dI}{dt}$$

も成り立ちます.これらを合わせると

$$RI = \varepsilon_0 - L \frac{dI}{dt}$$

が従います.この式から、電流の時間変化によって

$$-L \frac{dI}{dt}$$

という起電力が与えられることが分かります(いわゆる「逆起電力」).

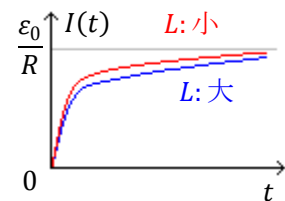
あるいは, $I$ を含む項だけを左辺に移項すると

$$L \frac{dI}{dt} + RI = \varepsilon_0.$$

これは $I$ についての 1 階線型非同次微分方程式です.これを初期条件 $I(0) = 0$ の下で解くと

$$I(t) = \frac{\varepsilon_0}{R} \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right), \quad \tau = \frac{L}{R}: \text{時定数}$$

となります.従って, $L$ は電流 $I$ の時間変化のしにくさ(慣性)を表すと解釈することができます.



### § C.3 コイルのインダクタンス

通常 single-loop の自己インダクタンスは小さいので、回路がコイルを含む場合には、磁場はコイル内に集中しています.そこで、コイル形状からインダクタンスを求めてみましょう.

長さ $l$ ,断面積 $A$ ,巻数 $N$ のソレノイドコイルを考えます.回路全体の抵抗を $R$ とすると,Ohm の法則より

$$\int_C \vec{E} \cdot d\vec{r} = RI.$$

一方、巻きが十分密であるとする、コイルは  $N$  個の **single-loop** と見なせます。従って、それぞれを貫く磁束を  $\Phi$  とすると、電磁誘導の法則より

$$\int_C \vec{E} \cdot d\vec{r} = N \times \left( -\frac{\partial \Phi}{\partial t} \right)$$

が成り立ちます。ここで、§ 3.1 で述べたように、コイル内の磁場の大きさは一定で

$$B = \frac{N}{l} \mu_0 I$$

で与えられたので

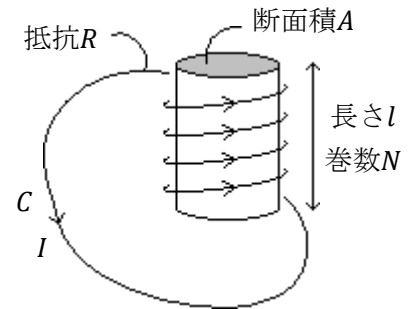
$$\Phi = BA = \frac{N}{l} \mu_0 I \times A$$

$$\therefore RI = N \times \left( -\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{N}{l} \mu_0 I \times A \right) \right) = -\frac{N^2 \mu_0 A}{l} \frac{dI}{dt}$$

よって、コイルのインダクタンスは

$$L = \frac{N^2 \mu_0 A}{l}$$

となります。



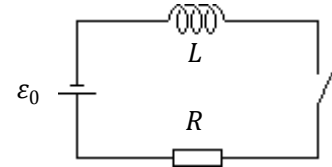
### § C.4 コイルのエネルギー

抵抗、コイル、起電力からなる回路を考えます(右図)。このとき、§ C.2 と同様にして

$$\varepsilon_0 = RI + L \frac{dI}{dt}$$

両辺に  $I$  を掛けると

$$\varepsilon_0 I = RI^2 + \frac{d}{dt} \left( \frac{LI^2}{2} \right)$$



が従います。左辺は電池がする仕事、右辺第 1 項は **Joule 熱**(いずれも単位時間あたり)を表しますから、右辺第 2 項の微分記号の中身はコイルに蓄えられるエネルギー、すなわち(コイル内部の)**磁場に蓄えられるエネルギー**と解釈することができます。

なお、§ C.3 と同じ記号を使えば

$$\frac{LI^2}{2} = \frac{N^2 \mu_0 A}{2l} I^2 = \frac{1}{2} \left( \frac{N}{l} \mu_0 I \right)^2 \frac{Al}{\mu_0} = \frac{B^2}{2\mu_0} \times Al = \frac{B^2}{2\mu_0} \times (\text{磁場が分布する体積})$$

となります。一般に磁場のエネルギーは、エネルギー密度の体積積分で与えられます:

$$\frac{LI^2}{2} = \int_V \frac{B^2}{2\mu_0} dV.$$



## 付録I ベクトル解析の基礎知識

## §I.1 スカラー三重積

以降xyz直交座標を考えます。まずは内積と外積とを確認しましょう。

ベクトル $\vec{A} = A_x\hat{x} + A_y\hat{y} + A_z\hat{z}$ ,  $\vec{B} = B_x\hat{x} + B_y\hat{y} + B_z\hat{z}$ に対し,その内積(スカラー積)は

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$$

で与えられるスカラー量です。幾何学的には, $\vec{A}$ の大きさと, $\vec{B}$ の $\vec{A}$ 方向の成分との積(あるいはその逆)を表します:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}||\vec{B}| \cos \theta \quad (\theta: \vec{A} \text{ と } \vec{B} \text{ のなす角}).$$

一方, $\vec{A}$ と $\vec{B}$ の外積(ベクトル積)は

$$\vec{A} \times \vec{B} = (A_y B_z - A_z B_y)\hat{x} + (A_z B_x - A_x B_z)\hat{y} + (A_x B_y - A_y B_x)\hat{z}$$

で与えられるベクトル量です。行列式の形で

$$\vec{A} \times \vec{B} = \det \begin{pmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{pmatrix}$$

と書くと印象に残りやすいでしょう。幾何学的には, $\vec{A}$ と $\vec{B}$ で張られる平行四辺形の面積と等しい大きさを持ち, $\vec{A}$ から $\vec{B}$ の方に(回転角は大きくない方をとる)右ねじを回すとき,ねじの進む方向を向いたベクトルを表します:

$$|\vec{A} \times \vec{B}| = |\vec{A}||\vec{B}| \sin \theta \quad (\theta: \vec{A} \text{ と } \vec{B} \text{ のなす角}, 0 \leq \theta \leq \pi).$$

内積は交換法則を満たしますが,外積に関しては成立しないことに注意しましょう:

$$\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}.$$

さて,スカラー三重積とは

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) \quad \text{あるいは} \quad (\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{C}$$

の形で与えられるスカラー量です。これを直交座標の成分で表すと

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = A_x(B_y C_z - B_z C_y) + A_y(B_z C_x - B_x C_z) + A_z(B_x C_y - B_y C_x) = \det \begin{pmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{pmatrix}$$

となります。線型代数で学んだように,行列式の各行を循環的に交換しても,その値は変わらないので

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B} \cdot (\vec{C} \times \vec{A}) = \vec{C} \cdot (\vec{A} \times \vec{B})$$

が成り立ちます。また,内積の順序を入れ替えた

$$(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{C}, (\vec{B} \times \vec{C}) \cdot \vec{A}, (\vec{C} \times \vec{A}) \cdot \vec{B}$$

も同じ値となります。

**ExI.1.1** スカラー三重積 $\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C})$ の絶対値が, $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$ で張られる平行六面体の体積に等しいことを示せ。

## § I.2 ベクトル三重積

ベクトル三重積とは

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) \quad \text{あるいは} \quad (\vec{A} \times \vec{B}) \times \vec{C}$$

の形で与えられるベクトル量です. $x$ 成分を計算すると

$$\begin{aligned} (\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}))_x &= A_y(\vec{B} \times \vec{C})_z - A_z(\vec{B} \times \vec{C})_y = A_y(B_x C_y - B_y C_x) - A_z(B_z C_x - B_x C_z) \\ &= (A_x C_x + A_y C_y + A_z C_z)B_x - (A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z)C_x \\ &= (\vec{A} \cdot \vec{C})B_x - (\vec{A} \cdot \vec{B})C_x \end{aligned}$$

従って

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = (\vec{A} \cdot \vec{C})\vec{B} - (\vec{A} \cdot \vec{B})\vec{C}$$

が得られます.

同様に

$$(\vec{A} \times \vec{B}) \times \vec{C} = -\vec{C} \times (\vec{A} \times \vec{B}) = -(\vec{B} \cdot \vec{C})\vec{A} + (\vec{A} \cdot \vec{C})\vec{B}$$

となります.

**ExI.2.1** 次の等式を示せ:

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) + \vec{B} \times (\vec{C} \times \vec{A}) + \vec{C} \times (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{0}.$$

## § I.3 ベクトル演算子

§ 1.4 においてスカラー場の **gradient** を, § 1.11 と § 1.12 ではそれぞれベクトル場の **divergence**, **rotation** を定義しました.それらはベクトル演算子  $\vec{\nabla} = \hat{x} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial}{\partial z}$  を用いて,

次のように書くことができました:

スカラー場  $f$ , ベクトル場  $\vec{A} = A_x \hat{x} + A_y \hat{y} + A_z \hat{z}$  に対して

$$\text{grad } f = \vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial f}{\partial y} \hat{y} + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{z},$$

$$\text{div } \vec{A} = \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z},$$

$$\text{rot } f = \vec{\nabla} \times f = \left( \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \hat{x} + \left( \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \hat{y} + \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \hat{z} = \det \begin{pmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{pmatrix}.$$

そもそもこのような概念を導入したのは,電磁気学において物理量がこれらの演算によって結びつけられるからでした(**Maxwell 方程式**).従って,その計算方法を理解しておくことは自然と重要なこととなります.以下では,ベクトル演算子  $\vec{\nabla}$  に関する諸公式を紹介します.

**定理 I.3.1** スカラー関数  $f, g$  及びベクトル関数  $\vec{A}, \vec{B}$  について, 以下が成り立つ.

- (1)  $\vec{\nabla}(fg) = g\vec{\nabla}f + f\vec{\nabla}g$
- (2)  $\vec{\nabla} \cdot (f\vec{A}) = \vec{\nabla}f \cdot \vec{A} + f\vec{\nabla} \cdot \vec{A}$
- (3)  $\vec{\nabla} \times (f\vec{A}) = \vec{\nabla}f \times \vec{A} + f\vec{\nabla} \times \vec{A}$
- (4)  $\vec{\nabla} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) - \vec{A} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B})$
- (5)  $\vec{\nabla} \times (\vec{A} \times \vec{B}) = (\vec{B} \cdot \vec{\nabla})\vec{A} - (\vec{A} \cdot \vec{\nabla})\vec{B} + (\vec{\nabla} \cdot \vec{B})\vec{A} - (\vec{\nabla} \cdot \vec{A})\vec{B}$
- (6)  $\vec{\nabla}(\vec{A} \cdot \vec{B}) = (\vec{A} \cdot \vec{\nabla})\vec{B} + (\vec{B} \cdot \vec{\nabla})\vec{A} + \vec{A} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}) + \vec{B} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A})$
- (7)  $\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}f = \Delta f$
- (8)  $\vec{\nabla} \times \vec{\nabla}f = \vec{0}$
- (9)  $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = 0$
- (10)  $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \Delta\vec{A}$

ただし  $\Delta$  は

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

という演算子で, **ラプラシアン** とよばれます(スカラー関数にもベクトル関数にも作用).

**ExI.3.1** 定理 I.3.1 を証明せよ.

**ExI.3.2**  $\text{rot rot rot } \vec{A} = -\Delta \text{ rot } \vec{A}$  を示せ.

**ExI.3.3** 球対称なベクトル場  $\vec{A}$  に対し,  $\text{rot } \vec{A} = \vec{0}$  を示せ.

**ExI.3.4** Ampère-Maxwell 則 (§ 4.2) から, 電荷保存則 (§ 2.1) を導け.

**ExI.3.5** 真空中の電磁場が, 次を満たすことを示せ:

$$\Delta \vec{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}, \quad \Delta \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}.$$

付録 II 問題の解答

(Ex1.2.1)

(1)  $\vec{E}_1$ は $x\hat{x} + y\hat{y}$ の方向で,その大きさは

$$|\vec{E}_1| = k \frac{q}{x^2 + y^2}$$

$$\therefore \vec{E}_1 = k \frac{q}{x^2 + y^2} \cdot \frac{x\hat{x} + y\hat{y}}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{kq}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} (x\hat{x} + y\hat{y}).$$

(2)  $\vec{E}_1$ と同様にして

$$\vec{E}_2 = \frac{kq}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} (-x\hat{x} + y\hat{y})$$

$$\therefore \vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \frac{2kqy}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} \hat{y}.$$

(Ex1.2.2)

(1) 原点について互いに点対称な位置にある電場の対からの電場への寄与 $\Delta\vec{E}$ は,Ex1.2.1より

$$\Delta\vec{E} = \frac{2kqh}{(a^2 + h^2)^{\frac{3}{2}}} \hat{z}$$

で与えられる.対の数は $N$ であるから

$$\vec{E}(P) = N\Delta\vec{E} = \frac{2kqhN}{(a^2 + h^2)^{\frac{3}{2}}} \hat{z}.$$

(2)

$$\vec{E}(P) = \frac{2kqh}{(a^2 + h^2)^{\frac{3}{2}}} \hat{z} \times N = \frac{2kqh}{(a^2 + h^2)^{\frac{3}{2}}} \hat{z} \times \frac{\pi a \sigma}{q} = \frac{2\pi k a h \sigma}{(a^2 + h^2)^{\frac{3}{2}}} \hat{z}.$$

(Ex1.3.1)

棒を微小領域 $i$ (長さ $\Delta x_i$ )に分割し,代表点の $x$ 座標を $x_i$ とする. $i$ 内の電荷が原点に作る電場は

$$\vec{E}_i = -k \frac{\lambda \Delta x_i}{x_i^2} \hat{x}$$

であるから,求める電場は

$$\vec{E} = \lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \sum_i \vec{E}_i = -k\lambda \hat{x} \times \lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \sum_i \frac{\Delta x_i}{x_i^2} = -k\lambda \hat{x} \int_d^{d+l} \frac{dx}{x^2} = -k\lambda \hat{x} \left( \frac{1}{d} - \frac{1}{d+l} \right) = -\frac{k\lambda l}{d(d+l)} \hat{x}$$

$$= -\frac{kQ}{d(d+l)} \hat{x}.$$

**(Ex1.4.1)**

(1)

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{x}{r}.$$

同様に

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r}, \quad \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{r}$$

$$\therefore \vec{\nabla} r = \frac{x}{r} \hat{x} + \frac{y}{r} \hat{y} + \frac{z}{r} \hat{z} = \frac{\vec{r}}{r}.$$

(2)

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{r} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = -\frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{x}{r^3}$$

同様に

$$\frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{r} = -\frac{y}{r^3}, \quad \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{r} = -\frac{z}{r^3}$$

$$\therefore \vec{\nabla} \frac{1}{r} = -\frac{x}{r^3} \hat{x} - \frac{y}{r^3} \hat{y} - \frac{z}{r^3} \hat{z} = -\frac{\vec{r}}{r^3}.$$

(3)  $\vec{c} = c_x \hat{x} + c_y \hat{y} + c_z \hat{z}$  とすると

$$\vec{c} \cdot \vec{r} = c_x x + c_y y + c_z z$$

であるから

$$\frac{\partial}{\partial x} (\vec{c} \cdot \vec{r}) = \frac{\partial}{\partial x} (c_x x + c_y y + c_z z) = c_x.$$

同様に

$$\frac{\partial}{\partial y} (\vec{c} \cdot \vec{r}) = c_y, \quad \frac{\partial}{\partial z} (\vec{c} \cdot \vec{r}) = c_z$$

$$\therefore \vec{\nabla} (\vec{c} \cdot \vec{r}) = c_x \hat{x} + c_y \hat{y} + c_z \hat{z} = \vec{c}.$$

**(Ex1.5.1)**

原点にある点電荷  $q$  が作る電場は

$$\vec{E}(\vec{r}) = k \frac{q}{r^3} \vec{r}$$

であるから, 3次元空間の2点A, Bを結ぶ原点を通らない任意の曲線Cを考え, 分点を

$$\vec{r}_1 (= \overrightarrow{OA}), \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_n (= \overrightarrow{OB})$$

とすると

$$\int_C \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = kq \times \lim_{\Delta\vec{r}_i \rightarrow 0} \sum_i \frac{\vec{r}_i \cdot \Delta\vec{r}_i}{r_i^3}.$$

ここで、スカラー場  $f(\vec{r})$  の微小変化  $\Delta f$  は

$$\Delta f = f(\vec{r} + \Delta\vec{r}) - f(\vec{r}) = (\vec{\nabla}f) \cdot \Delta\vec{r} + O((\Delta\vec{r})^2)$$

と書ける (§ 1.4) から、 $f = \frac{1}{r}$  とすると、Ex1.4.1 より

$$\frac{1}{|\vec{r} + \Delta\vec{r}|} - \frac{1}{r} = -\frac{\vec{r}}{r^3} \cdot \Delta\vec{r} + O((\Delta\vec{r})^2)$$

$$\therefore \frac{\vec{r}_i \cdot \Delta\vec{r}_i}{r_i^3} = \frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_{i+1}} + O((\Delta\vec{r}_i)^2).$$

従って

$$\int_C \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = kq \times \lim_{\Delta\vec{r}_i \rightarrow 0} \sum_i \left( \frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_{i+1}} + O((\Delta\vec{r}_i)^2) \right) = kq \left( \frac{1}{OA} - \frac{1}{OB} \right).$$

つまり  $\vec{E}(\vec{r})$  の線積分は始点と終点のみで決定されるから、 $\vec{E}(\vec{r})$  は渦なしの場である。

より一般に、複数の点電荷が作る電場も渦なしの場となる。実際、点  $\vec{r}_\alpha$  に点電荷  $q_\alpha$  が存在するとき、各点電荷からの電場への寄与を  $\vec{E}_\alpha(\vec{r})$  とすると

$$\vec{E}(\vec{r}) = \sum_\alpha \vec{E}_\alpha(\vec{r})$$

であるから

$$\int_C \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \int_C \left( \sum_\alpha \vec{E}_\alpha(\vec{r}) \right) \cdot d\vec{r} = \sum_\alpha \int_C \vec{E}_\alpha(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$$

となるが、 $\vec{E}_\alpha(\vec{r})$  の線積分はそれぞれ  $C$  の始点と終点のみに依存するから、その和で表される  $\vec{E}(\vec{r})$  の線積分も始点と終点のみに依存し、 $C$  によらない。

**(Ex1.5.2)**

Ex1.4.1 より

$$\vec{\nabla} f(\vec{r}) = \vec{\nabla} \left( -\sum_i \frac{a_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|} + \sum_i \frac{a_i}{|\vec{r}_0 - \vec{r}_i|} \right) = -\vec{\nabla} \sum_i \frac{a_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|} = \sum_i \frac{a_i(\vec{r} - \vec{r}_i)}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3} = \vec{V}(\vec{r}).$$

よって  $f(\vec{r})$  は  $\vec{V}(\vec{r})$  のスカラーポテンシャルである。

**(Ex1.8.1)**

$$\int_S \frac{\vec{r} - \vec{r}_\alpha}{|\vec{r} - \vec{r}_\alpha|^3} \cdot d\vec{S} = \begin{cases} 4\pi & (\vec{r}_\alpha: S \text{ の内部}) \\ 0 & (\vec{r}_\alpha: S \text{ の外部}) \end{cases}$$

であるから

$$\int_S \vec{V}(\vec{r}) \cdot d\vec{S} = \sum_{\alpha=1}^N \left( a_\alpha \int_S \frac{\vec{r} - \vec{r}_\alpha}{|\vec{r} - \vec{r}_\alpha|^3} \cdot d\vec{S} \right) = 4\pi \sum_{\alpha: \vec{r}_\alpha \in (S \text{ の内部})} a_\alpha.$$

**(Ex1.9.1)**

対称性より,電場も球対称であるとしてよい.すなわち

$$\vec{E}(\vec{r}) = E(r)\hat{r}.$$

閉曲面 $S$ として $O$ を中心,半径 $r$ の球面(外向き)をとると

$$\int_S \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{S} = \lim_{\Delta S_i \rightarrow 0} \sum_i \vec{E}(\vec{r}_i) \cdot \vec{n}_i \Delta S_i = \lim_{\Delta S_i \rightarrow 0} \sum_i E(r)\hat{r} \cdot \hat{r} \Delta S_i = E(r) \lim_{\Delta S_i \rightarrow 0} \sum_i \Delta S_i = 4\pi r^2 E(r)$$

であるから,Gauss の法則より

$$4\pi r^2 E(r) = \begin{cases} \frac{Q}{\epsilon_0} & (r > a) \\ \frac{Q}{\epsilon_0} \left(\frac{r}{a}\right)^3 & (r < a) \end{cases}$$

$$\therefore \vec{E}(\vec{r}) = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r} & (r > a) \\ \frac{Qr}{4\pi\epsilon_0 a^3} \hat{r} & (r < a). \end{cases}$$

**(Ex1.14.1)**

右図のような,導体表面を貫く底面積 $\Delta S$ の直円柱の表面(外向き)を考える.円柱表面をその底面 $S_1, S_2$ 及び側面 $S_3$ に分けると,導体内部にある $S_2$ 上では $\vec{E} = \vec{0}$ ,また $S_3$ 上では $\vec{E} \perp \Delta\vec{S}_i$ であるから

$$\int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_{S_1} \vec{E} \cdot d\vec{S} = E\Delta S.$$

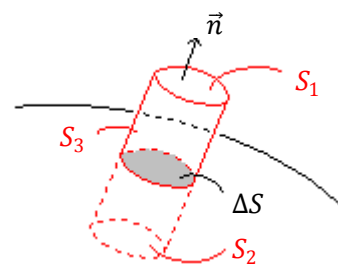
一方,Gauss の法則より

$$\int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{\sigma\Delta S}{\epsilon_0}$$

が成り立つから

$$E\Delta S = \frac{\sigma\Delta S}{\epsilon_0}$$

$$\therefore \vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n}.$$



**(Ex1.18.1)**

半径 $a, b$  ( $a < b$ )2つの球からなる同心球コンデンサーにおいて, $a < r < b$ における電場は

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r}$$

$$\therefore \frac{\varepsilon_0 E^2(r)}{2} = \frac{\varepsilon_0}{2} \left( \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \right)^2 = \frac{Q^2}{32\pi^2 \varepsilon_0 r^4}.$$

領域  $a < r < b$  を内径  $r_i$ , 外径  $r_{i+1} (= r_i + \Delta r_i)$  の球殻  $i$  に分割すると, その体積  $\Delta V_i$  は

$$\Delta V_i = \frac{4}{3} \pi ((r_i + \Delta r_i)^3 - r_i^3) = 4\pi r_i^2 \Delta r_i + O((\Delta r_i)^2)$$

と書けるから

$$\begin{aligned} \int_{a < r < b} \frac{\varepsilon_0 E^2(r)}{2} dV &= \lim_{\Delta r_i \rightarrow 0} \sum_i \frac{\varepsilon_0 E^2(r_i)}{2} \Delta V_i = \frac{Q^2}{32\pi^2 \varepsilon_0} \times \lim_{\Delta r_i \rightarrow 0} \sum_i \frac{4\pi r_i^2 \Delta r_i + O((\Delta r_i)^2)}{r_i^4} \\ &= \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0} \times \lim_{\Delta r_i \rightarrow 0} \sum_i \frac{\Delta r_i}{r_i^2} = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0} \int_a^b \frac{dr}{r^2} = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0} \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) = \frac{Q^2}{2} \times \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) \\ &= \frac{Q^2}{2C} \quad (\S 1.16). \end{aligned}$$

**(Ex2.2.1)**

球対称性より

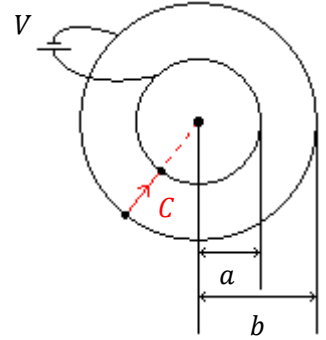
$$\vec{j}(\vec{r}) = \frac{I}{4\pi r^2} \hat{r}.$$

従って, 局所的 Ohm 則より

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\vec{j}(\vec{r})}{\sigma} = \frac{I}{4\pi r^2 \sigma} \hat{r}$$

が成り立つから, 右図の線分  $C$  を考え

$$\begin{aligned} V &= - \int_C \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = - \frac{I}{4\pi\sigma} \int_C \frac{\hat{r}}{r^2} \cdot d\vec{r} = - \frac{I}{4\pi\sigma} \int_b^a \frac{dr}{r^2} = \frac{I}{4\pi\sigma} \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) \\ \therefore I &= 4\pi\sigma V \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)^{-1} = 4\pi\sigma V \frac{ab}{b-a}. \end{aligned}$$



**(Ex2.4.1)**

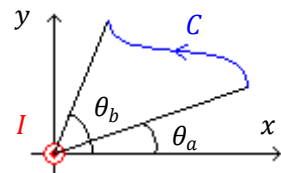
$$\vec{j}(\vec{r}) = \frac{I}{4\pi r^2} \hat{r}, \quad \vec{E}(\vec{r}) = \frac{\vec{j}(\vec{r})}{\sigma} = \frac{I}{4\pi r^2 \sigma} \hat{r}$$

であるから, (Ex1.18.1) と同様に計算して

$$\int_{a < r < b} \vec{j}(\vec{r}) \cdot \vec{E}(\vec{r}) dV = \frac{I^2}{(4\pi)^2 \sigma} \int_{a < r < b} \frac{dV}{r^4} = \frac{I^2}{(4\pi)^2 \sigma} \times 4\pi \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) = I \times \frac{I}{4\pi\sigma} \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) = IV.$$

**(Ex3.5.1)**

直線電流の場合, 最初に右図のような曲線  $C$  についての線積分を計算する.





$$\int_C \vec{B}(\vec{\rho}) \cdot d\vec{\rho} = \lim_{|\Delta\vec{\rho}_i| \rightarrow 0} \sum_i \vec{B}(\vec{\rho}_i) \cdot \Delta\vec{\rho}_i.$$

直線電流の作る磁場は, § 3.2 より

$$\vec{B}(\vec{\rho}) = \frac{\mu_0 I (\hat{z} \times \vec{\rho})}{2\pi\rho^2}$$

であるから,

$$\begin{aligned} \vec{B}(\vec{\rho}_i) \cdot \Delta\vec{\rho}_i &= \frac{\mu_0 I (\hat{z} \times \vec{\rho}_i)}{2\pi\rho_i^2} \cdot \Delta\vec{\rho}_i = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho_i^2} \hat{z} \cdot (\vec{\rho}_i \times \Delta\vec{\rho}_i) = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho_i^2} \hat{z} \cdot (\vec{\rho}_i \times (\vec{\rho}_i + \Delta\vec{\rho}_i)) \\ &= \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho_i^2} \hat{z} \cdot (\rho_i |\vec{\rho}_i + \Delta\vec{\rho}_i| \sin \Delta\theta_i) \hat{z} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \Delta\theta_i + O((\Delta\theta_i)^2, |\Delta\vec{\rho}_i| \Delta\theta_i). \end{aligned}$$

ただし,  $\Delta\theta_i$  は  $\vec{\rho}_i$  と  $\vec{\rho}_{i+1}$  がなす角である. 従って

$$\begin{aligned} \int_C \vec{B}(\vec{\rho}) \cdot d\vec{\rho} &= \lim_{|\Delta\vec{\rho}_i| \rightarrow 0} \sum_i \left( \frac{\mu_0 I}{2\pi} \Delta\theta_i + O((\Delta\theta_i)^2, |\Delta\vec{\rho}_i| \Delta\theta_i) \right) = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \times \lim_{|\Delta\vec{\rho}_i| \rightarrow 0} \sum_i \Delta\theta_i \\ &= \frac{\mu_0 I}{2\pi} (\theta_b - \theta_a). \end{aligned}$$

閉曲線  $C_1$  に関しては,  $\theta_a = 0, \theta_b = 2\pi$  とすれば

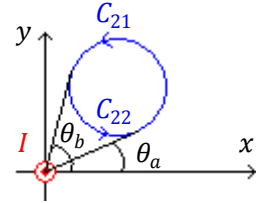
$$\oint_{C_1} \vec{B} \cdot d\vec{\rho} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \cdot 2\pi = \mu_0 I.$$

閉曲線  $C_3$  についても同様に,  $\theta_a = 0, \theta_b = -2\pi$  とすれば

$$\oint_{C_3} \vec{B} \cdot d\vec{\rho} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \cdot (-2\pi) = -\mu_0 I.$$

閉曲線  $C_2$  については, 曲線を右図のように 2 つに分けると

$$\begin{aligned} \oint_{C_2} \vec{B} \cdot d\vec{\rho} &= \oint_{C_{21}} \vec{B} \cdot d\vec{\rho} + \oint_{C_{22}} \vec{B} \cdot d\vec{\rho} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} (\theta_b - \theta_a) + \frac{\mu_0 I}{2\pi} (\theta_a - \theta_b) \\ &= 0. \end{aligned}$$



ループ電流の場合. ループ電流の作る磁場は, § 3.3 より

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \vec{\nabla} \Omega(C; \vec{r}).$$

また, 一般にスカラー場  $f(\vec{r})$  が曲線  $C$  (始点  $P$ , 終点  $P'$ ) 上で連続ならば

$$\int_C \vec{\nabla} f(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = f(P') - f(P)$$

が成り立つことに注意しておく (特に, 閉曲線上における **gradient** の線積分は 0 である).

まず閉曲線  $C_5$  について,

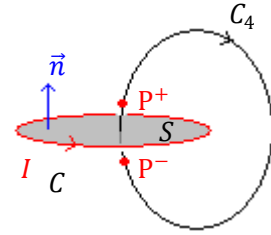
$$\oint_{C_5} \vec{B} \cdot d\vec{r} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_{C_5} \vec{\nabla} \Omega(C; \vec{r}) \cdot d\vec{r} = 0.$$

次に,閉曲線 $C_4$ について,電流が流れているループ $C$ を縁とする曲面を $S$ とする(法線ベクトルの向きは右ねじの法則により定める). $S$ を挟んで両側に非常に接近した 2 点を取り, $S$ の正側,負側の点をそれぞれ $P^+, P^-$ とおく.このとき

$$\Omega(C; P^+) = -2\pi, \quad \Omega(C; P^-) = 2\pi$$

であるから,

$$\oint_{C_4} \vec{B} \cdot d\vec{r} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} (\Omega(C; P^-) - \Omega(C; P^+)) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot 4\pi = \mu_0 I.$$



**(ExI.1.1)**

$\vec{A}$ と $\vec{B} \times \vec{C}$ のなす角を $\theta$ とすると

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = |\vec{A}| |\vec{B} \times \vec{C}| \cos \theta$$

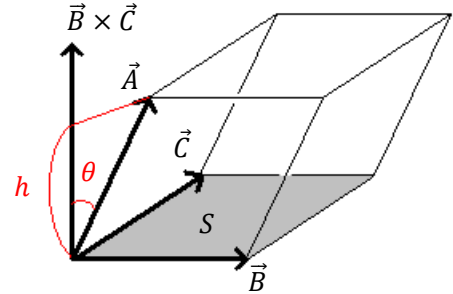
が成り立つ. $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$ で張られる平行六面体において, $\vec{B}, \vec{C}$ の作る底面積を $S$ とすれば

$$S = |\vec{B} \times \vec{C}|.$$

また,高さを $h$ とすると

$$h = |\vec{A}| \cos \theta$$

$$\therefore |\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C})| = Sh.$$



**(ExI.2.1)**

$$\begin{aligned} \vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) + \vec{B} \times (\vec{C} \times \vec{A}) + \vec{C} \times (\vec{A} \times \vec{B}) \\ = (\vec{A} \cdot \vec{C})\vec{B} - (\vec{A} \cdot \vec{B})\vec{C} + (\vec{B} \cdot \vec{A})\vec{C} - (\vec{B} \cdot \vec{C})\vec{A} + (\vec{C} \cdot \vec{B})\vec{A} - (\vec{C} \cdot \vec{A})\vec{B} \\ = (\vec{C} \cdot \vec{B} - \vec{B} \cdot \vec{C})\vec{A} + (\vec{A} \cdot \vec{C} - \vec{C} \cdot \vec{A})\vec{B} + (\vec{B} \cdot \vec{A} - \vec{A} \cdot \vec{B})\vec{C} = \vec{0}. \end{aligned}$$

**(ExI.3.1)**

(1)

$$\begin{aligned} (\vec{\nabla}(fg))_x = \frac{\partial}{\partial x}(fg) = g \frac{\partial f}{\partial x} + f \frac{\partial g}{\partial x} = g(\vec{\nabla}f)_x + f(\vec{\nabla}g)_x \\ \therefore \vec{\nabla}(fg) = g\vec{\nabla}f + f\vec{\nabla}g. \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot (f\vec{A}) = \frac{\partial}{\partial x}(fA_x) + \frac{\partial}{\partial y}(fA_y) + \frac{\partial}{\partial z}(fA_z) = \frac{\partial f}{\partial x}A_x + f \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}A_y + f \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z}A_z + f \frac{\partial A_z}{\partial z} \\ = \left( \frac{\partial f}{\partial x}A_x + \frac{\partial f}{\partial y}A_y + \frac{\partial f}{\partial z}A_z \right) + f \left( \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) = \vec{\nabla}f \cdot \vec{A} + f\vec{\nabla} \cdot \vec{A}. \end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}
 (\vec{\nabla} \times (f\vec{A}))_x &= \frac{\partial}{\partial y}(fA_z) - \frac{\partial}{\partial z}(fA_y) = \frac{\partial f}{\partial y}A_z + f\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial z}A_y - f\frac{\partial A_y}{\partial z} \\
 &= \frac{\partial f}{\partial y}A_z - \frac{\partial f}{\partial z}A_y + f\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right) = (\vec{\nabla}f \times \vec{A})_x + f(\vec{\nabla} \times \vec{A})_x \\
 \therefore \vec{\nabla} \times (f\vec{A}) &= \vec{\nabla}f \times \vec{A} + f\vec{\nabla} \times \vec{A}.
 \end{aligned}$$

★(1)~(3)の結果は、スカラー関数における積の微分法と同じ形をしているので、記憶しやすいでしょう。

(4)

$$\begin{aligned}
 \vec{\nabla} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) &= \vec{\nabla} \cdot \left( (A_yB_z - A_zB_y)\hat{x} + (A_zB_x - A_xB_z)\hat{y} + (A_xB_y - A_yB_x)\hat{z} \right) \\
 &= \frac{\partial}{\partial x}(A_yB_z - A_zB_y) + \frac{\partial}{\partial y}(A_zB_x - A_xB_z) + \frac{\partial}{\partial z}(A_xB_y - A_yB_x) \\
 &= \frac{\partial A_y}{\partial x}B_z + A_y\frac{\partial B_z}{\partial x} - \frac{\partial A_z}{\partial x}B_y - A_z\frac{\partial B_y}{\partial x} + \frac{\partial A_z}{\partial y}B_x + A_z\frac{\partial B_x}{\partial y} - \frac{\partial A_x}{\partial y}B_z - A_x\frac{\partial B_z}{\partial y} \\
 &\quad + \frac{\partial A_x}{\partial z}B_y + A_x\frac{\partial B_y}{\partial z} - \frac{\partial A_y}{\partial z}B_x - A_y\frac{\partial B_x}{\partial z} \\
 &= B_x\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right) + B_y\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) + B_z\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right) - A_x\left(\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z}\right) \\
 &\quad - A_y\left(\frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x}\right) - A_z\left(\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y}\right) = \vec{B} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) - \vec{A} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}).
 \end{aligned}$$

(5)

$$\begin{aligned}
 (\vec{\nabla} \times (\vec{A} \times \vec{B}))_x &= \frac{\partial}{\partial y}(\vec{A} \times \vec{B})_z - \frac{\partial}{\partial z}(\vec{A} \times \vec{B})_y \\
 &= \frac{\partial A_x}{\partial y}B_y + A_x\frac{\partial B_y}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial y}B_x - A_y\frac{\partial B_x}{\partial y} - \left(\frac{\partial A_z}{\partial z}B_x + A_z\frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial A_x}{\partial z}B_z - A_x\frac{\partial B_z}{\partial z}\right) \\
 &= \left(B_x\frac{\partial}{\partial x} + B_y\frac{\partial}{\partial y} + B_z\frac{\partial}{\partial z}\right)A_x - \left(A_x\frac{\partial}{\partial x} + A_y\frac{\partial}{\partial y} + A_z\frac{\partial}{\partial z}\right)B_x \\
 &\quad + \left(\frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z}\right)A_x - \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}\right)B_x \\
 &= (\vec{B} \cdot \vec{\nabla})A_x - (\vec{A} \cdot \vec{\nabla})B_x + (\vec{\nabla} \cdot \vec{B})A_x - (\vec{\nabla} \cdot \vec{A})B_x \\
 \therefore \vec{\nabla} \times (\vec{A} \times \vec{B}) &= (\vec{B} \cdot \vec{\nabla})\vec{A} - (\vec{A} \cdot \vec{\nabla})\vec{B} + (\vec{\nabla} \cdot \vec{B})\vec{A} - (\vec{\nabla} \cdot \vec{A})\vec{B}.
 \end{aligned}$$

(6)

$$\begin{aligned}
 (\vec{\nabla}(\vec{A} \cdot \vec{B}))_x &= \frac{\partial}{\partial x}(A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z) \\
 &= \frac{\partial A_x}{\partial x} B_x + A_x \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial x} B_y + A_y \frac{\partial B_y}{\partial x} + \frac{\partial A_z}{\partial x} B_z + A_z \frac{\partial B_z}{\partial x} \\
 &= \left( A_x \frac{\partial}{\partial x} + A_y \frac{\partial}{\partial y} + A_z \frac{\partial}{\partial z} \right) B_x + \left( B_x \frac{\partial}{\partial x} + B_y \frac{\partial}{\partial y} + B_z \frac{\partial}{\partial z} \right) A_x \\
 &\quad + \left( A_y \left( \frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} \right) - A_z \left( \frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x} \right) \right) \\
 &\quad + \left( B_y \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) - B_z \left( \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \right) \\
 &= (\vec{A} \cdot \vec{\nabla}) B_x + (\vec{B} \cdot \vec{\nabla}) A_x + (\vec{A} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}))_x + (\vec{B} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}))_x \\
 \therefore \vec{\nabla}(\vec{A} \cdot \vec{B}) &= (\vec{A} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B} + (\vec{B} \cdot \vec{\nabla}) \vec{A} + \vec{A} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}) + \vec{B} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}).
 \end{aligned}$$

★(4)~(6)は結構大変ですね.とりあえず導出過程を一度読んで理解しておけば十分です.

(7)

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} f = \vec{\nabla} \cdot \left( \frac{\partial f}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial f}{\partial y} \hat{y} + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{z} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \Delta f.$$

(8)

$$\begin{aligned}
 (\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} f)_x &= \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial z} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) = 0 \\
 \therefore \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} f &= \vec{0}.
 \end{aligned}$$

(9)

$$\begin{aligned}
 \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) &= \vec{\nabla} \cdot \left( \left( \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \hat{x} + \left( \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \hat{y} + \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \hat{z} \right) \\
 &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \\
 &= \left( \frac{\partial^2 A_x}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 A_x}{\partial z \partial y} \right) + \left( \frac{\partial^2 A_y}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 A_y}{\partial x \partial z} \right) + \left( \frac{\partial^2 A_z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 A_z}{\partial y \partial x} \right) = 0.
 \end{aligned}$$

(10)

$$\begin{aligned} (\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}))_x &= \frac{\partial}{\partial y} ((\vec{\nabla} \times \vec{A})_z) - \frac{\partial}{\partial z} ((\vec{\nabla} \times \vec{A})_y) = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) - \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) A_x = (\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}))_x - \Delta A_x \\ &\therefore \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \Delta \vec{A}. \end{aligned}$$

★(7)~(10)の結果は覚えておくとよいでしょう.

**(ExI.3.2)**

$$\text{rot rot rot } \vec{A} = \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \text{rot } \vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \text{rot } \vec{A}) - \Delta \text{rot } \vec{A}$$

ここで

$$\vec{\nabla} \cdot \text{rot } \vec{A} = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = 0$$

であるから,結局

$$\text{rot rot rot } \vec{A} = -\Delta \text{rot } \vec{A}$$

を得る.

**(ExI.3.3)**

球対称なベクトル場 $\vec{A}$ は,位置ベクトル $\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$ の関数として

$$\vec{A} = A(r)\hat{r} = f(r)\vec{r} \quad \left( f(r) = \frac{A(r)}{r} \right)$$

と書ける(大きさが $r = |\vec{r}|$ のみに依存).このとき

$$\text{rot } \vec{A} = \vec{\nabla} \times (f(r)\vec{r}) = \vec{\nabla} f(r) \times \vec{r} + f(r)\vec{\nabla} \times \vec{r}.$$

ここで $\vec{\nabla} \times \vec{r} = \vec{0}$ ,及び

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} f(r) &= \frac{\partial f(r)}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial f(r)}{\partial y} \hat{y} + \frac{\partial f(r)}{\partial z} \hat{z} = \frac{df(r)}{dr} \left( \frac{\partial r}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial r}{\partial y} \hat{y} + \frac{\partial r}{\partial z} \hat{z} \right) = \frac{df(r)}{dr} \left( \frac{x}{r} \hat{x} + \frac{y}{r} \hat{y} + \frac{z}{r} \hat{z} \right) \\ &= \frac{df(r)}{dr} \frac{\vec{r}}{r} \end{aligned}$$

が成り立つから

$$\text{rot } \vec{A} = \frac{df(r)}{dr} \frac{\vec{r}}{r} \times \vec{r} = \vec{0}.$$

**(ExI.3.4)**

Ampère-Maxwell 則

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \left( \vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$$

において,両辺の divergence をとると

$$0 = \mu_0 \left( \vec{\nabla} \cdot \vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) \right).$$

Gauss の法則より

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

であるから

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

となる.これは電荷保存則に他ならない.

**(ExI.3.5)**

真空中における電磁誘導の法則

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

において,両辺の rotation をとると

$$\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) - \Delta \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \times \vec{B}).$$

ここで,Gauss の法則と Ampère-Maxwell 則を用いれば

$$\begin{aligned} -\Delta \vec{E} &= -\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \\ \therefore \Delta \vec{E} &= \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}. \end{aligned}$$

また,Ampère-Maxwell 則

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

において,両辺の rotation をとると

$$\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) - \Delta \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \times \vec{E}).$$

磁場の Gauss の法則および電磁誘導の法則より

$$\begin{aligned} -\Delta \vec{B} &= \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \left( -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) \\ \therefore \Delta \vec{B} &= \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}. \end{aligned}$$

～あとがき～

### 更新履歴

この講義ノートの更新履歴です.主に間違いの訂正をしてゆきます.  
訂正箇所は,本文ではこの色に染めてあります.

2010.1.30      本講義ノート完成!

～あとがき～

もうすぐ試験ですね.なんだか1年があつという間に過ぎてしまったような気がします.

…さて,やっと講義ノートが完成しました.始めからじっくりと読んでいけば,二学期の講義がある程度再現できるようなノートにしたつもりです(試験直前に急いで勉強したい,という方には大変恐縮ですが).試験勉強としては,講義の HP に掲載されていた演習問題も参照することをおすすめします.

なお,補講の内容(「補章」の部分)も試験範囲なので,目を通しておいってください.

もし誤植などありましたらお知らせください.その他質問も,できる限り答えます.

2010年1月30日      高橋 一史