2007 年度　力学 A(下村裕)　期末試験略解

教科書の内容を理解していれば標準的な問題だと思います.自分の理解が中途半端な上,急いで作ったので間違いとかあるかもしれません.見つけたら高橋まで連絡お願いします.

第 1 問

2 次元直交座標(x, y)に対し

$$x = r\cos\theta\ , y = r\sin\theta$$

が成り立つ.このとき速度のx, y成分v_x, v_yは

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \dot{r}\cos\theta - r\dot{\theta}\sin\theta,$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = \dot{r}\sin\theta + r\dot{\theta}\cos\theta$$

である.よって座標系をθだけ回転して,

$$\begin{pmatrix} v_r \\ v_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{r} \\ r\dot{\theta} \end{pmatrix}.$$

同様に,加速度のx, y成分a_x, a_yは

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \ddot{r}\cos\theta - 2\dot{r}\dot{\theta}\sin\theta - r\ddot{\theta}\sin\theta - r\dot{\theta}^2\cos\theta,$$

$$a_y = \frac{dv_y}{dt} = \ddot{r}\sin\theta + 2\dot{r}\dot{\theta}\cos\theta + r\ddot{\theta}\cos\theta - r\dot{\theta}^2\sin\theta$$

であるから

$$\begin{pmatrix} a_r \\ a_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \\ 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} \end{pmatrix}.$$

第 2 問

$$U = -\frac{1}{2}ax^2y$$

とおくと

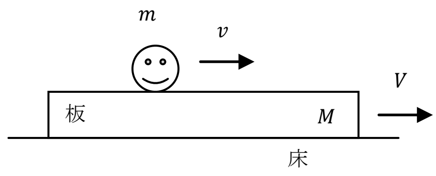
$$f_x = -\frac{\partial U}{\partial x}\ , f_y = -\frac{\partial U}{\partial y}$$

が成り立つ.従って$\vec{f}$は保存力であり,そのポテンシャルは$U = -\frac{1}{2}ax^2y$.

第 3 問

図のように,速度をそれぞれv, Vとする.始め人と板は静止していたから,運動量保存則より

$$mv + MV = 0.$$



また,始めの時刻を$t = 0$,人が板の他端に着いたときの時刻を$t = t_0$とすると

$$\int_0^{t_0} (v - V)dt = -\frac{m + M}{m} \int_0^{t_0} V dt = l$$

が成り立つ.従って,板の動く距離は

$$\left| \int_0^{t_0} V dt \right| = \frac{m}{m + M} l.$$

第 4 問

(面倒なのでちょっと省略.教科書$p. 168$の例題 1 と同様に考えます)

振子の鉛直からの傾きをθとすると,(7.14)式より運動方程式は

$$I \frac{d^2\theta}{dt^2} = -Mgl \sin\theta$$

となる.ただしIは支点のまわりの振子の慣性モーメントであって,

$$I = \frac{2}{5} Ma^2 + Ml^2$$

である.従って,この振子は長さが

$$l' = \frac{I}{Ml}$$

で与えられる単振子と同じ運動をする.振子の振れ幅は微小だとしているから,その周期は

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l'}{g}} = 2\pi \sqrt{\frac{I}{Mgl}} = 2\pi \sqrt{\frac{2a^2 + 5l^2}{5gl}}.$$

第 5 問

(これも面倒なのでちょっと省略.教科書$p. 178$「斜面を転がる球」と同様に考えます)

円柱の半径をaとし,底面の中心を通る軸のまわりの慣性モーメントをIとすると,(7.46)式より

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{M}{M + \frac{I}{a^2}} g \sin\alpha$$

すなわち

$$x=\frac{1}{2}\left(\frac{M}{M+\frac{I}{a^2}}g\sin\alpha\right)t^2$$

が成り立つ.

(1) 中が詰まった一様な密度の円柱のとき

$$I=\frac{1}{2}Ma^2$$

であるから

$$x=\frac{1}{3}gt^2\sin\alpha.$$

(2) 中が空で一様な面密度の外面を持つ円柱のとき

(1),(2)で考える円柱をそれぞれC_1,C_2とし,それぞれの慣性モーメントをI_1,I_2とする.C_1の密度をρ,高さをhとすると

$$I_1=\frac{\pi}{2}\rho a^4 h$$

が成り立つ.ここでaを微小量daだけ増やしたときの慣性モーメントの増分がI_2だから,

$$I_2=dI_1=2\pi\rho a^3 hda.$$

また,このときの質量の増分は

$$M=2\pi a\rho da$$

であるから,

$$I_2=Ma^2$$

となる.従って

$$x=\frac{1}{4}gt^2\sin\alpha.$$

以上,略解でした.いささか説明不足だとは思いますが,お許しを.僕らの試験は

2009 年 9 月 3 日(木) 2 時限(10:55~) 1313 教室

で行われます.最後の試験ですね.頑張りましょう!