ラプラシアンの球座標表示　　　　　　　2009-S1-37　*Uyan*

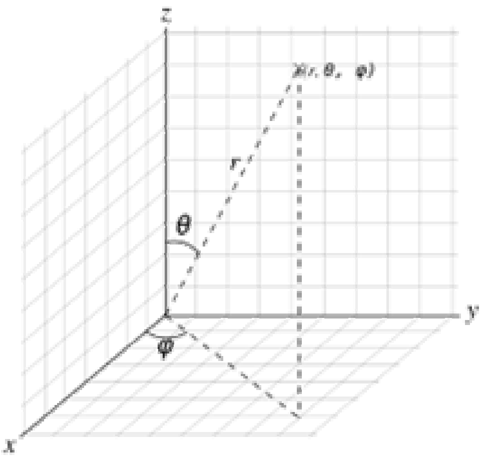
内容が構造化学のシケプリに相応しいかどうかどうか怪しいですが，気になる人の為にラプラシアンの球座標表示を導く計算をやってみます．人生で一回やればもうお腹いっぱいのかなーり面倒くさい計算ですし，ググればそこそこの事は調べが付く内容ではありますが．

球座標でのラプラシアンを導くには(一応)いくつかの方法があります．このﾌﾟﾘﾝﾄでは素直にｶﾞﾘｶﾞﾘと合成関数の微分法に忠実に従って計算していく方法(もはや方法とはいえませんが)と，途中からベクトル解析を用いて計算する方法を紹介します．後者の方が計算量は少なくて済みますが，ベクトル解析についての知識が必要ですし球座標の単位ベクトルについてのイメージを持ってないと何やら騙された気分になって終わるだけなので，原理にひたすら忠実な前者の証明を中心に見ていきます．

Ⅰ，【合成関数の微分でひたすら頑張る】

まず，球座標$\left(r,\theta,\varphi\right)$と直交座標$\left(x,y,z\right)$の間にある関係式を整理しておきます．

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases} \qquad (1.1)$$
$$(0 \le r \le \infty,\ 0 \le \theta \le \pi,\ 0 \le \varphi < 2\pi)$$



↑ by Wikipedia

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ \cos\theta = \dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \Leftrightarrow \theta = \cos^{-1}\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \\ \tan\varphi = \dfrac{y}{x} \Leftrightarrow \varphi = \tan^{-1}\dfrac{y}{x} \end{cases} \qquad (1.2)$$
$$(0 \le \theta \le \pi,\ 0 \le \varphi < 2\pi)$$

図を見れば(1.1)は明らかで, 球座標の定義です. (1.2)は一見分かりにくいですが, 逆に解いただけです. (分母が 0 になるときとか少し怪しいんですが結論には影響しません)

そして，(1.1),(1.2)の関係を用いて ラプラシアン演算子 $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$ を$\left(r,\theta,\varphi\right)$に関する微分で表すのがこの計算の最終目標です．段階的にやっていきます．

Step1　$\dfrac{\partial}{\partial x},\dfrac{\partial}{\partial y},\dfrac{\partial}{\partial z}$ を $\dfrac{\partial}{\partial r},\dfrac{\partial}{\partial \theta},\dfrac{\partial}{\partial \varphi}$ で表す

まずは合成関数の微分の規則を使って微分演算子 $\dfrac{\partial}{\partial x},\dfrac{\partial}{\partial y},\dfrac{\partial}{\partial z}$ を $\dfrac{\partial}{\partial r},\dfrac{\partial}{\partial \theta},\dfrac{\partial}{\partial \varphi}$ で表すところから始めます．

合成関数の微分のルールは次のようなものでした．(意図的に変数の表示を逆にしています)

(x,y,z) の 3 変数関数 $f(x,y,z)$ に $x=h_1(r,\theta,\varphi), y=h_2(r,\theta,\varphi), z=h_3(r,\theta,\varphi)$ を代入して得られる (r,θ,φ) の 3 変数関数 $g(r,\theta,\varphi)\equiv f(h_1(r,\theta,\varphi),h_2(r,\theta,\varphi),h_3(r,\theta,\varphi))$ を r,θ,φ で微分すると

$$\frac{\partial g(r,\theta,\varphi)}{\partial r}=\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x}\frac{\partial h_1(r,\theta,\varphi)}{\partial r}+\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y}\frac{\partial h_2(r,\theta,\varphi)}{\partial r}+\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z}\frac{\partial h_3(r,\theta,\varphi)}{\partial r}$$
$$\frac{\partial g(r,\theta,\varphi)}{\partial \theta}=\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x}\frac{\partial h_1(r,\theta,\varphi)}{\partial \theta}+\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y}\frac{\partial h_2(r,\theta,\varphi)}{\partial \theta}+\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z}\frac{\partial h_3(r,\theta,\varphi)}{\partial \theta}$$
$$\frac{\partial g(r,\theta,\varphi)}{\partial \varphi}=\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x}\frac{\partial h_1(r,\theta,\varphi)}{\partial \varphi}+\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y}\frac{\partial h_2(r,\theta,\varphi)}{\partial \varphi}+\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z}\frac{\partial h_3(r,\theta,\varphi)}{\partial \varphi}$$

となる．(何の関数と見ているかを明示した)

※よく教科書では $x(r,\theta,\varphi)$ などと書いて

$$\frac{\partial g(r,\theta,\varphi)}{\partial r}=\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x}\frac{\partial x(r,\theta,\varphi)}{\partial r}+\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y}\frac{\partial y(r,\theta,\varphi)}{\partial r}+\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z}\frac{\partial z(r,\theta,\varphi)}{\partial r}$$ と表される．

そして簡略化して(具体的に微分計算をする関数のところを空白にして)，演算子だけ書きだすと

$$\begin{cases}\dfrac{\partial}{\partial r}=\dfrac{\partial x(r,\theta,\varphi)}{\partial r}\dfrac{\partial}{\partial x}+\dfrac{\partial y(r,\theta,\varphi)}{\partial r}\dfrac{\partial}{\partial y}+\dfrac{\partial z(r,\theta,\varphi)}{\partial r}\dfrac{\partial}{\partial z}\\ \dfrac{\partial}{\partial \theta}=\dfrac{\partial x(r,\theta,\varphi)}{\partial \theta}\dfrac{\partial}{\partial x}+\dfrac{\partial y(r,\theta,\varphi)}{\partial \theta}\dfrac{\partial}{\partial y}+\dfrac{\partial z(r,\theta,\varphi)}{\partial \theta}\dfrac{\partial}{\partial z}\\ \dfrac{\partial}{\partial \varphi}=\dfrac{\partial x(r,\theta,\varphi)}{\partial \varphi}\dfrac{\partial}{\partial x}+\dfrac{\partial y(r,\theta,\varphi)}{\partial \varphi}\dfrac{\partial}{\partial y}+\dfrac{\partial z(r,\theta,\varphi)}{\partial \varphi}\dfrac{\partial}{\partial z}\end{cases}\qquad(1.3)$$

となります．

(演算子は右側にくる関数を微分する約束なので $\dfrac{\partial x(r,\theta,\varphi)}{\partial r}$ などは演算子の前に出しときます．)

さて，(1.1)を見ると，$x(r,\theta,\varphi)=r\sin\theta\cos\varphi,\ y(r,\theta,\varphi)=r\sin\theta\sin\varphi,\ z(r,\theta,\varphi)=r\cos\theta$ だから各々偏微分を行って(1.3)に代入してみます．このくらいならちょろいもんです．すると，

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial r} = \sin\theta\cos\varphi\dfrac{\partial}{\partial x} + \sin\theta\sin\varphi\dfrac{\partial}{\partial y} + \cos\theta\dfrac{\partial}{\partial z} \\ \dfrac{\partial}{\partial \theta} = r\cos\theta\cos\varphi\dfrac{\partial}{\partial x} + r\cos\theta\sin\varphi\dfrac{\partial}{\partial y} - r\sin\theta\dfrac{\partial}{\partial z} \\ \dfrac{\partial}{\partial \varphi} = -r\sin\theta\sin\varphi\dfrac{\partial}{\partial x} + r\sin\theta\cos\varphi\dfrac{\partial}{\partial y} + 0\cdot\dfrac{\partial}{\partial z} \end{cases} \qquad (1.4)$$

が得られます.

「あれれー？ $\dfrac{\partial}{\partial x},\dfrac{\partial}{\partial y},\dfrac{\partial}{\partial z}$ を $\dfrac{\partial}{\partial r},\dfrac{\partial}{\partial \theta},\dfrac{\partial}{\partial \varphi}$ で表そうと思ったのに（1.4）はまるっきり逆だよおじさん」

と某メガネ少年並の鋭さを発揮した方，全くもってその通りです.

一応，正攻法としては(1.2)の各式を $r(x,y,z),\theta(x,y,z),\varphi(x,y,z)$ とみて

$\dfrac{\partial}{\partial x} = \dfrac{\partial r(x,y,z)}{\partial x}\dfrac{\partial}{\partial r} + \dfrac{\partial \theta(x,y,z)}{\partial x}\dfrac{\partial}{\partial \theta} + \dfrac{\partial \varphi(x,y,z)}{\partial x}\dfrac{\partial}{\partial \varphi}$ と計算するべきなのですが，逆正接関数の微分や値域についての考察があって少し面倒なので，(1.4)を $\dfrac{\partial}{\partial x},\dfrac{\partial}{\partial y},\dfrac{\partial}{\partial z}$ についての連立方程式だと思って解いて $\dfrac{\partial}{\partial r},\dfrac{\partial}{\partial \theta},\dfrac{\partial}{\partial \varphi}$ を用いた表式を得る方針で計算しています.（結局逆行列を計算したりするとどっちも面倒くさいのはナイショ）

そしてごちゃごちゃと計算すると，(1.4)の係数行列の行列式 $r^2\sin\theta$ が 0 にならないときは(今回は mathematica 親分に聞いていないのでもしかすると計算ミスがあるかも)

$$\begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta \\ r\cos\theta\cos\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & -r\sin\theta \\ -r\sin\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{r^2\sin\theta}\begin{pmatrix} r^2\sin^2\theta\cos\varphi & r\sin\theta\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\varphi \\ r^2\sin^2\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\theta\sin\varphi & r\cos\varphi \\ r^2\sin\theta\cos\theta & -r\sin^2\theta & 0 \end{pmatrix}$$

なのでこの逆行列を，(1.4)を行列表示した式の両辺に左からかけて(さらにいくつか約分して)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x} = \sin\theta\cos\varphi\dfrac{\partial}{\partial r} + \dfrac{\cos\theta\cos\varphi}{r}\dfrac{\partial}{\partial \theta} - \dfrac{\sin\varphi}{r\sin\theta}\dfrac{\partial}{\partial \varphi} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} = \sin\theta\sin\varphi\dfrac{\partial}{\partial r} + \dfrac{\cos\theta\sin\varphi}{r}\dfrac{\partial}{\partial \theta} + \dfrac{\cos\varphi}{r\sin\theta}\dfrac{\partial}{\partial \varphi} \\ \dfrac{\partial}{\partial z} = \cos\theta\dfrac{\partial}{\partial r} - \dfrac{\sin\theta}{r}\dfrac{\partial}{\partial \theta} + 0\cdot\dfrac{\partial}{\partial \varphi} \end{cases} \qquad (1.5)$$

が導かれます.

この式はたぶん行列式が 0 でも大丈夫です(テキトーですが, そもそも行列式が 0 になってしまう z 軸上の点に対しては偏角 φ が不定ですのであんまり気にしないほうがいいと思います).
あと，x,y,z,r が距離の次元を持ち，θ，φ が無次元だとすると，(1.5)の両辺はちゃんと[距離]$^{-1}$ の次元になっていることに注意です．物理的に考えても計算ミスはチェックできます．

おまけ：正攻法でやるとすると，例えば(1.2)の第 2 式の両辺を x で偏微分して(合成関数の微分！)

$$(-\sin\theta)\cdot\frac{\partial\theta}{\partial x}=\frac{-z\cdot 2x}{2(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\Leftrightarrow\frac{\partial\theta}{\partial x}=\frac{r\cos\theta\cdot r\sin\theta\cos\varphi}{r^3}\cdot\frac{1}{\sin\theta}=\frac{\cos\theta\cos\varphi}{r}$$ という風に計算していくことになります.

・・・あれ，ひょっとしてこっちの方が簡単だったかも？

Step2 $\frac{\partial^2}{\partial x^2},\frac{\partial^2}{\partial y^2},\frac{\partial^2}{\partial z^2}$ を $\frac{\partial}{\partial r},\frac{\partial}{\partial\theta},\frac{\partial}{\partial\varphi},\frac{\partial^2}{\partial r^2},\frac{\partial^2}{\partial\theta^2},\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}$ で表す.

さぁ，準備が出来たのでひたすら計算です.

ちょっと分かりにくいかもしれないのですが,

$f(x,y,z)=f(x(r,\theta,\varphi),y(r,\theta,\varphi),z(r,\theta,\varphi))=g(r,\theta,\varphi)$ として

$$\frac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\sin\theta\cos\varphi\frac{\partial g(r,\theta,\varphi)}{\partial r}+\frac{\cos\theta\cos\varphi}{r}\frac{\partial g(r,\theta,\varphi)}{\partial\theta}-\frac{\sin\varphi}{r\sin\theta}\frac{\partial g(r,\theta,\varphi)}{\partial\varphi}\right)$$

という式の括弧の中にある $\sin\theta\cos\varphi\frac{\partial g(r,\theta,\varphi)}{\partial r}+\frac{\cos\theta\cos\varphi}{r}\frac{\partial g(r,\theta,\varphi)}{\partial\theta}-\frac{\sin\varphi}{r\sin\theta}\frac{\partial g(r,\theta,\varphi)}{\partial\varphi}$ を

(x,y,z) の関数だと見て（←ゆうて $g(r,\theta,\varphi)=f(x,y,z)$ ですから！）

もう一度 $\frac{\partial}{\partial x}=\sin\theta\cos\varphi\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\cos\theta\cos\varphi}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}-\frac{\sin\varphi}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}$ の関係を用います.

つまり(ちょっぴり長くなりますが)

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\sin\theta\cos\varphi\frac{\partial g(r,\theta,\varphi)}{\partial r}+\frac{\cos\theta\cos\varphi}{r}\frac{\partial g(r,\theta,\varphi)}{\partial\theta}-\frac{\sin\varphi}{r\sin\theta}\frac{\partial g(r,\theta,\varphi)}{\partial\varphi}\right)$$

$$=\sin\theta\cos\varphi\frac{\partial}{\partial r}\left(\sin\theta\cos\varphi\frac{\partial g(r,\theta,\varphi)}{\partial r}+\frac{\cos\theta\cos\varphi}{r}\frac{\partial g(r,\theta,\varphi)}{\partial\theta}-\frac{\sin\varphi}{r\sin\theta}\frac{\partial g(r,\theta,\varphi)}{\partial\varphi}\right)$$

$$+\frac{\cos\theta\cos\varphi}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\cos\varphi\frac{\partial g(r,\theta,\varphi)}{\partial r}+\frac{\cos\theta\cos\varphi}{r}\frac{\partial g(r,\theta,\varphi)}{\partial\theta}-\frac{\sin\varphi}{r\sin\theta}\frac{\partial g(r,\theta,\varphi)}{\partial\varphi}\right)$$

$$-\frac{\sin\varphi}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\sin\theta\cos\varphi\frac{\partial g(r,\theta,\varphi)}{\partial r}+\frac{\cos\theta\cos\varphi}{r}\frac{\partial g(r,\theta,\varphi)}{\partial\theta}-\frac{\sin\varphi}{r\sin\theta}\frac{\partial g(r,\theta,\varphi)}{\partial\varphi}\right)$$

ということです.

これを計算します．見通しを良くする(それでも視界 1m もない状況ですが･･･)為に，偏微分の種類ごとに項をまとめます.

(あ，一応注意ですがこの場合，積の微分公式はそのまま使えます.

例えば $\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\cos\theta\cos\varphi}{r}\frac{\partial g(r,\theta,\varphi)}{\partial\theta}\right)=\frac{\partial g(r,\theta,\varphi)}{\partial\theta}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\cos\theta\cos\varphi}{r}\right)+\frac{\cos\theta\cos\varphi}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial g(r,\theta,\varphi)}{\partial\theta}\right)$.)

y，z についても式を書いておきます.

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\sin\theta\sin\varphi\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\cos\theta\sin\varphi}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{\cos\varphi}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)$$

$$=\sin\theta\sin\varphi\frac{\partial}{\partial r}\left(\sin\theta\sin\varphi\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\cos\theta\sin\varphi}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{\cos\varphi}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)$$

$$+\frac{\cos\theta\sin\varphi}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\sin\varphi\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\cos\theta\sin\varphi}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{\cos\varphi}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)$$

$$+\frac{\cos\varphi}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\sin\theta\sin\varphi\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\cos\theta\sin\varphi}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{\cos\varphi}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right) \quad .$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}=\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)=\frac{\partial}{\partial z}\left(\cos\theta\frac{\partial}{\partial r}-\frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)=\cos\theta\frac{\partial}{\partial r}\left(\cos\theta\frac{\partial}{\partial r}-\frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)-\frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\cos\theta\frac{\partial}{\partial r}-\frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\right).$$

さーて，スーパー計算タイムはじまるよー！

※流石に全部書き出すと死ねるので計算ミスがチェックできる程度にしておきます.

※共通因数でくくったあとに　$\sin^2\varphi+\cos^2\varphi=1$　を使ってる箇所が数箇所あります.

（ⅰ）$\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}$ について(係数だけ)

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} : \sin^2\theta\cos^2\varphi,\quad \frac{\partial^2}{\partial\theta^2} : \frac{\cos^2\theta\cos^2\varphi}{r^2},\quad \frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} : \frac{\sin^2\varphi}{r^2\sin^2\theta},$$

$$\frac{\partial^2}{\partial r\partial\theta} : \frac{2\sin\theta\cos\theta\cos^2\varphi}{r},\quad \frac{\partial^2}{\partial r\partial\varphi} : \frac{-2\sin\varphi\cos\varphi}{r}, \frac{\partial^2}{\partial\theta\partial\varphi} : \frac{-2\cos\theta\sin\varphi\cos\varphi}{r^2\sin\theta}$$

$$\frac{\partial}{\partial r} : \frac{\cos^2\theta\cos^2\varphi+\sin^2\varphi}{r},\ \frac{\partial}{\partial\theta} = \frac{-2\sin^2\theta\cos\theta\cos^2\varphi+\cos\theta\sin^2\varphi}{r^2\sin\theta},\ \frac{\partial}{\partial\varphi} : \frac{2\sin\varphi\cos\varphi}{r^2\sin^2\theta}$$

（ⅱ）$\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$ について

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} : \sin^2\theta\sin^2\varphi,\ \frac{\partial^2}{\partial\theta^2} : \frac{\cos^2\theta\sin^2\varphi}{r^2},\ \frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} : \frac{\cos^2\varphi}{r^2\sin^2\theta}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial r\partial\theta} : \frac{2\sin\theta\cos\theta\sin^2\varphi}{r}, \frac{\partial^2}{\partial r\partial\varphi} : \frac{2\sin\varphi\cos\varphi}{r}, \frac{\partial^2}{\partial\theta\partial\varphi} : \frac{2\cos\theta\sin\varphi\cos\varphi}{r^2\sin\theta}$$

$$\frac{\partial}{\partial r} : \frac{\cos^2\theta\sin^2\varphi+\cos^2\varphi}{r},\ \frac{\partial}{\partial\theta} : \frac{-2\sin^2\theta\cos\theta\sin^2\varphi+\cos\theta\cos^2\varphi}{r^2\sin\theta},\ \frac{\partial}{\partial\varphi} : \frac{-2\sin\varphi\cos\varphi}{r^2\sin^2\theta}$$

（ⅲ）$\dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$ について

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} : \cos^2\theta,\ \frac{\partial^2}{\partial\theta^2} : \frac{\sin^2\theta}{r^2},\ \frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} : 0$$

$$\frac{\partial^2}{\partial r\partial\theta} : \frac{-2\sin\theta\cos\theta}{r}, \frac{\partial^2}{\partial r\partial\varphi} : 0, \frac{\partial^2}{\partial\theta\partial\varphi} : 0$$

$$\frac{\partial}{\partial r} : \frac{\sin^2\theta}{r},\ \frac{\partial}{\partial\theta} : \frac{2\sin\theta\cos\theta}{r^2},\ \frac{\partial}{\partial\varphi} : 0$$

･･･ふぅ．最後に $\dfrac{\partial^2}{\partial x^2},\dfrac{\partial^2}{\partial y^2},\dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$ について計算した係数を足し合わせます．見事なまでに綺麗に整理できて結構感動します.

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2}\ :\ \sin^2\theta\cos^2\varphi+\sin^2\theta\sin^2\varphi+\cos^2\theta=\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$$

$$\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}:\frac{\cos^2\theta\cos^2\varphi}{r^2}+\frac{\cos^2\theta\sin^2\varphi}{r^2}+\frac{\sin^2\theta}{r^2}=\frac{1}{r^2}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}:\frac{\sin^2\varphi}{r^2\sin^2\theta}+\frac{\cos^2\varphi}{r^2\sin^2\theta}+0=\frac{1}{r^2\sin^2\theta}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial r\partial\theta}:\frac{2\sin\theta\cos\theta\cos^2\varphi}{r}+\frac{2\sin\theta\cos\theta\sin^2\varphi}{r}+\frac{-2\sin\theta\cos\theta}{r}=0$$

$$\frac{\partial^2}{\partial r\partial\varphi}:\frac{-2\sin\varphi\cos\varphi}{r}+\frac{2\sin\varphi\cos\varphi}{r}+0=0$$

$$\frac{\partial^2}{\partial\theta\partial\varphi}:\frac{-2\cos\theta\sin\varphi\cos\varphi}{r^2\sin\theta}+\frac{2\cos\theta\sin\varphi\cos\varphi}{r^2\sin\theta}+0=0$$

$$\frac{\partial}{\partial r}:\frac{\cos^2\theta\cos^2\varphi+\sin^2\varphi}{r}+\frac{\cos^2\theta\sin^2\varphi+\cos^2\varphi}{r}+\frac{\sin^2\theta}{r}=\frac{2}{r}$$

$$\frac{\partial}{\partial\theta}:\frac{-2\sin^2\theta\cos\theta\cos^2\varphi+\cos\theta\sin^2\varphi}{r^2\sin\theta}+\frac{-2\sin^2\theta\cos\theta\sin^2\varphi+\cos\theta\cos^2\varphi}{r^2\sin\theta}+\frac{2\sin\theta\cos\theta}{r^2}=\frac{\cos\theta}{r^2\sin\theta}$$

$$\frac{\partial}{\partial\varphi}:\frac{2\sin\varphi\cos\varphi}{r^2\sin^2\theta}+\frac{-2\sin\varphi\cos\varphi}{r^2\sin^2\theta}=0$$

これよりようやく，極座標におけるラプラシアンの表式

$$\begin{aligned}\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}&=\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}+\frac{\cos\theta}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\\&=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\end{aligned}\tag{1.6}$$

が得られます．3 番目の式はカッコつけてまとめてある形です(計算すればちゃんと中辺と等しくなってます)．

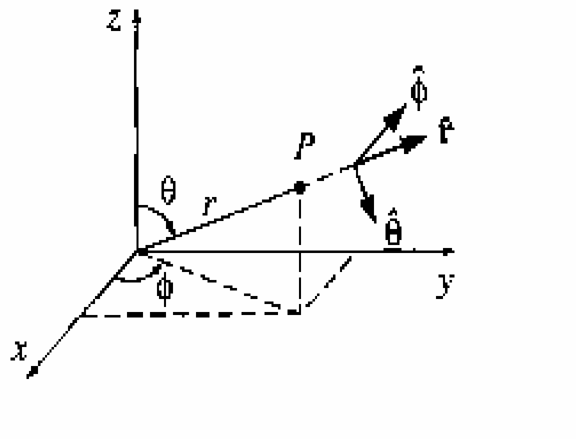
･･･いやはや，既に 1 回計算した事があったんですがそれでもだいぶ見通しが悪くて苦労しました．2 回も 3 回も計算すると暗記してしまいますが，別に覚えるべき式ではなく，試験で使うにしてもたぶん問題用紙に載ってる類の式です．

（I 部終わり）

Ⅱ，【ベクトル解析を用いる】

ここまでやってさらにもう一回別の方法で証明しようなんて思う奇特な人(どＭな人？)はそうそういないとは思いますが，今度はベクトル解析的な手法を用いて証明してみます.

まず，球座標における単位ベクトルを考えてみましょう．つまり r のみが増える方向・θのみが増える方向・φだけが増える方向を向いた大きさ 1 のベクトルです．直交座標系とは違って<u>各点で単位ベクトルの方向が違う</u>ことに注意して図を眺めると，



点 $\mathrm{P}(r,\theta,\varphi)$ における単位ベクトル $\mathbf{e}_r,\mathbf{e}_\theta,\mathbf{e}_\varphi$ の

(x,y,z) 成分は

$$\begin{cases}\mathbf{e}_r=(\sin\theta\cos\varphi,\sin\theta\sin\varphi,\cos\theta)\\ \mathbf{e}_\theta=(\cos\theta\cos\varphi,\cos\theta\sin\varphi,-\sin\theta)\\ \mathbf{e}_\varphi=(-\sin\varphi,\cos\varphi,0)\end{cases}\qquad(2.1)$$

と表せます.

もしくは，ベクトルの偏微分の定義 $\dfrac{\partial\mathbf{a}(r,\theta,\varphi)}{\partial r}=\lim\limits_{dr\to0}\dfrac{\mathbf{a}(r+dr,\theta,\varphi)-\mathbf{a}(r,\theta,\varphi)}{dr}$ を考えると，

点 P の位置ベクトルを $\mathbf{r}(r,\theta,\varphi)$ としたときに $\mathbf{e}_r,\mathbf{e}_\theta,\mathbf{e}_\varphi$ の方向（則ち各座標が単独に少しだけ増える方向） が $\dfrac{\partial\mathbf{r}(r,\theta,\varphi)}{\partial r},\dfrac{\partial\mathbf{r}(r,\theta,\varphi)}{\partial\theta},\dfrac{\partial\mathbf{r}(r,\theta,\varphi)}{\partial\varphi}$ と表せることからも（2.1）が分かります.

(大きさを 1 に規格化する必要はありますが)

また，$\mathbf{e}_r,\mathbf{e}_\theta,\mathbf{e}_\varphi$ がこの順に右手系の正規直交系をなしていることに注意です.

つまり，$|\mathbf{e}_r|=|\mathbf{e}_\theta|=|\mathbf{e}_\varphi|=1,\ \mathbf{e}_r\cdot\mathbf{e}_\theta=\mathbf{e}_r\cdot\mathbf{e}_\varphi=\mathbf{e}_\theta\cdot\mathbf{e}_\varphi=0,\ \mathbf{e}_r\times\mathbf{e}_\theta=\mathbf{e}_\varphi$ となっています.

さて，ラプラシアンを導くのですが，面倒なので(1.5)までは既知とします．一応，發散定理(ガウスの定理)やベクトル解析の曲線座標における公式を利用すれば(1.5)に相当する式を導くことが出来ますが, そういう話は来年の数理科学Ⅲでたぶんやるので今は省略します.

んで，(1.5)と(2.1)を見比べると

$$\vec{\nabla}=(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z})=\mathbf{e}_x\frac{\partial}{\partial x}+\mathbf{e}_y\frac{\partial}{\partial y}+\mathbf{e}_z\frac{\partial}{\partial z}=\mathbf{e}_r\frac{\partial}{\partial r}+\mathbf{e}_\theta\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}+\mathbf{e}_\varphi\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}$$

と表せる事が分かります.

そしてラプラシアンΔ が $\Delta = \vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla} = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$ となっていることに留意すると

$$\Delta = \vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla} = \left(\mathbf{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \mathbf{e}_\theta \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} + \mathbf{e}_\varphi \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \varphi}\right)\cdot\left(\mathbf{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \mathbf{e}_\theta \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} + \mathbf{e}_\varphi \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \varphi}\right)$$ を計算しても

ラプラシアンの球座標表示が導けることに気が付きます.

一応ここで補題としてベクトル解析の公式を書いておきます.

スカラー関数$f(x,y,z)$, ベクトル関数$\mathbf{A}(x,y,z)$ の微分について次が成り立つ: $\dfrac{\partial}{\partial x}(f\cdot\mathbf{A}) = \dfrac{\partial f}{\partial x}\mathbf{A} + f\dfrac{\partial \mathbf{A}}{\partial x}$.

[Pf] $\mathbf{A}(x,y,z) = (A_x(x,y,z), A_y(x,y,z), A_z(x,y,z))$ とすると,

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}(f\cdot\mathbf{A}) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(fA_x, fA_y, fA_z\right) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}A_x + f\frac{\partial A_x}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial x}A_y + f\frac{\partial A_y}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial x}A_z + f\frac{\partial A_z}{\partial x}\right) = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\left(A_x, A_y, A_z\right) + f\cdot\left(\frac{\partial A_x}{\partial x}, \frac{\partial A_y}{\partial x}, \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{A} + f\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x}. \quad \square\end{aligned}$$

また，もう一つ準備として，単位ベクトル$\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\varphi$ の偏微分をいくつか計算しておくと

$$\frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial r} = \frac{\partial \mathbf{e}_\theta}{\partial r} = \frac{\partial \mathbf{e}_\varphi}{\partial r} = \mathbf{0}, \frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial \theta} = \mathbf{e}_\theta, \frac{\partial \mathbf{e}_\theta}{\partial \theta} = -\mathbf{e}_r,\ \frac{\partial \mathbf{e}_\varphi}{\partial \theta} = \mathbf{0},\ \mathbf{e}_\varphi\cdot\frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial \varphi} = \sin\theta,\ \mathbf{e}_\varphi\cdot\frac{\partial \mathbf{e}_\theta}{\partial \varphi} = \cos\theta,\ \frac{\partial \mathbf{e}_\varphi}{\partial \varphi} \perp \mathbf{e}_\varphi \quad (2.2)$$

となるのは簡単に確かめられます.（これらの値だけを計算した理由：あとで使うから)

それでは，ラプラシアンを計算します．補題や(2.2)，正規直交性に注意して展開していきます.

$$\begin{aligned}\Delta = \vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla} &= \left(\mathbf{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \mathbf{e}_\theta \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} + \mathbf{e}_\varphi \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \varphi}\right)\cdot\left(\mathbf{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \mathbf{e}_\theta \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} + \mathbf{e}_\varphi \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \varphi}\right) \\ &= \mathbf{e}_r\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(\mathbf{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \mathbf{e}_\theta \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} + \mathbf{e}_\varphi \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \varphi}\right) + \mathbf{e}_\theta\cdot\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\mathbf{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \mathbf{e}_\theta \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} + \mathbf{e}_\varphi \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \varphi}\right) \\ &\qquad + \mathbf{e}_\varphi\cdot\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\mathbf{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \mathbf{e}_\theta \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} + \mathbf{e}_\varphi \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \varphi}\right)\end{aligned}$$

となり各項は(最初だけ丁寧に書きます)

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{e}_r \cdot \frac{\partial}{\partial r}\left(\mathbf{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \mathbf{e}_\theta \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} + \mathbf{e}_\varphi \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \varphi}\right) \\
&= \mathbf{e}_r \cdot \left(\left(\frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial r}\frac{\partial}{\partial r} + \mathbf{e}_r \frac{\partial^2}{\partial r^2}\right) + \left(\frac{\partial \mathbf{e}_\theta}{\partial r}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} + \mathbf{e}_\theta \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\right)\frac{\partial}{\partial \theta} + \mathbf{e}_\theta \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r \partial \theta}\right) + \left(\frac{\partial \mathbf{e}_\varphi}{\partial r}\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \varphi} + \mathbf{e}_\varphi \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r\sin\theta}\right)\frac{\partial}{\partial \varphi} + \mathbf{e}_\varphi \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial^2}{\partial r \partial \varphi}\right)\right) \\
&= \mathbf{e}_r \cdot \left(\mathbf{e}_r \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \mathbf{e}_\theta \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\right)\frac{\partial}{\partial \theta} + \mathbf{e}_\theta \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r \partial \theta} + \mathbf{e}_\varphi \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r\sin\theta}\right)\frac{\partial}{\partial \varphi} + \mathbf{e}_\varphi \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial^2}{\partial r \partial \varphi}\right) = 1\cdot\frac{\partial^2}{\partial r^2} + 0 + 0 + 0 + 0 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} \quad ,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{e}_\theta \cdot \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\mathbf{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \mathbf{e}_\theta \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} + \mathbf{e}_\varphi \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \varphi}\right) \\
&= \frac{\mathbf{e}_\theta}{r} \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial \theta}\frac{\partial}{\partial r} + \mathbf{e}_r \frac{\partial^2}{\partial r \partial \theta} + \frac{\partial \mathbf{e}_\theta}{\partial \theta}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} + \mathbf{e}_\theta \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial \mathbf{e}_\varphi}{\partial \theta}\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \varphi} + \mathbf{e}_\varphi \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{1}{r\sin\theta}\right)\frac{\partial}{\partial \varphi} + \mathbf{e}_\varphi \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial^2}{\partial \theta \partial \varphi}\right) \\
&= \frac{1}{r}\cdot\left(1\cdot\frac{\partial}{\partial r} + 0 + 0 + 1\cdot\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + 0 + 0 + 0\right) = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \quad ,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{e}_\varphi \cdot \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\mathbf{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \mathbf{e}_\theta \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} + \mathbf{e}_\varphi \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \varphi}\right) \\
&= \frac{\mathbf{e}_\varphi}{r\sin\theta} \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial \varphi}\frac{\partial}{\partial r} + \mathbf{e}_r \frac{\partial^2}{\partial r \partial \varphi} + \frac{\partial \mathbf{e}_\theta}{\partial \varphi}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} + \mathbf{e}_\theta \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial \theta \partial \varphi} + \frac{\partial \mathbf{e}_\varphi}{\partial \varphi}\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \varphi} + \mathbf{e}_\varphi \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}\right) \\
&= \frac{1}{r\sin\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial r} + 0 + \cos\theta\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} + 0 + 0 + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}\right) = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}
\end{aligned}
$$

となります．(2.2)の結果をしょっちゅう用いています．

最後に，3 つの項を足し合わせて再びラプラシアンの球座標表示

$$
\begin{aligned}
\Delta = \vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla} &= \left(\mathbf{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \mathbf{e}_\theta \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} + \mathbf{e}_\varphi \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \varphi}\right)\cdot\left(\mathbf{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \mathbf{e}_\theta \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} + \mathbf{e}_\varphi \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \varphi}\right) \\
&= \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}\right) + \left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}\right) \qquad (2.3) \\
&= \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\cos\theta}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}
\end{aligned}
$$

を得ます．

結局，この証明で重要な点は，単位ベクトルの微分が必ずしも 0 にならないことです．直交座標系と決定的に違うところなので球座標等を考えるときは注意しましょう．

（II 部終わり）

ハイパー誰得タイム ～HDT～

ベクトル解析的なアプローチの結果として得られる，直交曲線座標における勾配・回転・發散などの表式をおまけとして載せておきます．私はこっちの形を暗記してます．

まずは曲線座標の定義から．割と当たり前の事を言っているだけなので用語の定義にだけ注意して下さい．あ，上付の添字はただの番号なので累乗と間違えないように．

いま，空間に 3 つの曲面 $\begin{cases} u^1(x,y,z)=u^1 \\ u^2(x,y,z)=u^2 \\ u^3(x,y,z)=u^3 \end{cases}$ (3.1) があるとします．左辺は(x,y,z)の関数，右辺はただの値とみています．そして任意に値 u^1,u^2,u^3 を与えたときにこれらの 3 曲面が一点 P(x,y,z)で交わるとします．つまり，(3.1)が (x,y,z) について解けて，u^1,u^2,u^3 を与えると一意に (x,y,z) の値が決まる状況を考えます．このとき，3 つの値の組 (x,y,z) と (u^1,u^2,u^3) は 1 対 1 に対応していますから，空間の各点を表すのに (u^1,u^2,u^3) を用いても良いわけです．この (u^1,u^2,u^3) を(3.1)で定義される座標系における点 P の曲線座標と定義します．

さらに，u^2,u^3 ＝一定のもとで u^1 が描く曲線を u^1 －曲線と呼びます．u^2,u^3 についても同様です．今回は簡単の為に各々の u^i －曲線が各点で直交している場合，則ち直交曲線座標の場合を考えます．球座標は直交してます．もしこれらの曲線が直交していないときはテンソル解析の範疇になってインデックス地獄に悩まされることになります．添字の上げ下げバンザイ＼(^o^)／って奴です．

最後に曲線座標系におけるベクトルの成分を定義します．点 P(x,y,z) で座標曲線 u^i に接する(向きは u^i の増加する方向にとります)3 つの単位ベクトルを $\mathbf{u}^1(x,y,z),\mathbf{u}^2(x,y,z),\mathbf{u}^3(x,y,z)$ とします．これらは右手系であると仮定しても差しつかえありません．(必要ならば添字を入れ替えれば良い)

すると $\mathbf{u}^1(x,y,z),\mathbf{u}^2(x,y,z),\mathbf{u}^3(x,y,z)$ は直交デカルト座標における単位ベクトル $\mathbf{e}_x,\mathbf{e}_y,\mathbf{e}_z$ を回転させて得られるものになっていて(直交曲線座標を考えているから)，点 P でのベクトル $\mathbf{v}$ の曲線座標に関する成分をデカルト座標の場合と同様に次のように定義します： $\mathbf{v}$ の u^i 成分＝$v_i=\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}^i$．

さて，(3.1)を (x,y,z) について解いて $(x,y,z)=\left(x(u^1,u^2,u^3),y(u^1,u^2,u^3),z(u^1,u^2,u^3)\right)$ ，または空間の各点の位置ベクトルを $\mathbf{r}$ として $\mathbf{r}=\mathbf{r}(u^1,u^2,u^3)$ と表したとします．

このとき，スカラー場 $\psi(u^1,u^2,u^3)$，

ベクトル場 $\mathbf{v}(u^1,u^2,u^3)=v_1(u^1,u^2,u^3)\mathbf{u}^1+v_2(u^1,u^2,u^3)\mathbf{u}^2+v_3(u^1,u^2,u^3)\mathbf{u}^3$

の勾配・回転・發散について以下が成り立ちます：

$$\sqrt{g_i}=\left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^i}\right|=\sqrt{\left(\frac{\partial x(u^1,u^2,u^3)}{\partial u^i}\right)^2+\left(\frac{\partial y(u^1,u^2,u^3)}{\partial u^i}\right)^2+\left(\frac{\partial z(u^1,u^2,u^3)}{\partial u^i}\right)^2}$$ とすると

$$\mathbf{grad}\,\psi=\vec{\nabla}\psi=\frac{1}{\sqrt{g_1}}\frac{\partial\psi}{\partial u^1}\mathbf{u}^1+\frac{1}{\sqrt{g_2}}\frac{\partial\psi}{\partial u^2}\mathbf{u}^2+\frac{1}{\sqrt{g_3}}\frac{\partial\psi}{\partial u^3}\mathbf{u}^3$$

$$\begin{aligned}\mathbf{rot}\ \mathbf{v}=\vec{\nabla}\times\mathbf{v}=&\frac{1}{\sqrt{g_2g_3}}\left\{\frac{\partial}{\partial u^2}\left(\sqrt{g_3}\,v_3\right)-\frac{\partial}{\partial u^3}\left(\sqrt{g_2}\,v_2\right)\right\}\mathbf{u}^1+\frac{1}{\sqrt{g_3g_1}}\left\{\frac{\partial}{\partial u^3}\left(\sqrt{g_1}\,v_1\right)-\frac{\partial}{\partial u^1}\left(\sqrt{g_3}\,v_3\right)\right\}\mathbf{u}^2\\&+\frac{1}{\sqrt{g_1g_2}}\left\{\frac{\partial}{\partial u^1}\left(\sqrt{g_2}\,v_2\right)-\frac{\partial}{\partial u^2}\left(\sqrt{g_1}\,v_1\right)\right\}\mathbf{u}^3\end{aligned}$$

$$\mathrm{div}\,\mathbf{v}=\vec{\nabla}\bullet\mathbf{v}=\frac{1}{\sqrt{g_1g_2g_3}}\left\{\frac{\partial}{\partial u^1}\left(\sqrt{g_2g_3}\,v_1\right)+\frac{\partial}{\partial u^2}\left(\sqrt{g_3g_1}\,v_2\right)+\frac{\partial}{\partial u^3}\left(\sqrt{g_1g_2}\,v_3\right)\right\}$$

・・・証明の流れを頭に入れないと覚えるのは難しいかもしれません．回転定理・發散定理を使って導いています．まぁ，別に覚える意味がない公式ですが．（分からなくなったら教科書見ればいいじゃん！）

で，この公式を球座標に適用してみます．

$(r,\theta,\varphi)\to(u^1,u^2,u^3)$ とみると $\sqrt{g_1}=1,\sqrt{g_2}=r,\sqrt{g_3}=r\sin\theta,\ \ \mathbf{u}^1=\mathbf{e}_r,\mathbf{u}^2=\mathbf{e}_\theta,\mathbf{u}^3=\mathbf{e}_\varphi$ となるので

$$\mathbf{grad}\,\psi=\frac{\partial\psi}{\partial r}\mathbf{e}_r+\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\mathbf{e}_\theta+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\mathbf{e}_\varphi\ ,$$

$$\mathrm{div}\,\mathbf{v}=\vec{\nabla}\bullet\mathbf{v}=\frac{1}{r^2\sin\theta}\left\{\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\sin\theta\,v_r\right)+\frac{\partial}{\partial\theta}\left(r\sin\theta\,v_\theta\right)+\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(rv_\varphi\right)\right\}$$ となり，

$$\begin{aligned}\Delta\psi=\mathrm{div}\,\mathbf{grad}\,\psi&=\frac{1}{r^2\sin\theta}\left\{\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\sin\theta\cdot\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)+\frac{\partial}{\partial\theta}\left(r\sin\theta\cdot\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right)+\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(r\cdot\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\right)\right\}\\&=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2}\end{aligned}$$

が導かれます．

(おまけ終わり)

あとがき

凄く･･･数式を打ち込むのが大変でした･･･．不思議なことに需要がない仕事ってのはムダに燃えてくるもので，いろいろ訂正したり追加したりしながら書いていたら壮大な誰得シケプリになってしまいました．ラプラシアンの計算が案外本に載っていなくて途中式の計算チェックが出来ていないのですが，4･5 回計算したのでだいたいあってるはずです．ただ，これだけ大量の数式を打ち込んだので流石にミスがないとは思えませんから，もし計算を追っかけていて「何か変だな」と思ったら自分の方を信じて計算してみてください．

それでは良いお年を．（もう明けましておめでとうかも？）

2009 年度入学東京大学教養学部理科一類 37 組　中川裕也（実は振動波動のシケ対(笑))

2009 年 12 月 29 日