

# 地域生態学（荒井教員） 講義ノートまとめ

2010 年度夏学期版

## 目次

1	都市のランクサイズ法則とその周辺	2
1.1	ランクサイズ法則の発見 . . . . .	2
1.2	ランクサイズ法則の成立メカニズム：Simon の説明 . . . . .	3
2	空間的相互作用モデル	8
2.1	重力モデル . . . . .	8
2.2	エントロピー最大化モデル . . . . .	10

# 1 都市のランクサイズ法則とその周辺

## 1.1 ランクサイズ法則の発見

まずはランクサイズ法則の一般的な定義を以下に示す．

一般的定義 (ランクサイズ法則)  $P$  を都市の人口規模,  $R$  を人口規模の順位としたとき, この間には  $P = f(R)$  なる一定の関係が存在する．

ここで言う “一定の関係” は, 以下に示すような流れで定式化されてきた．

Auerbach F. は,  $P$  と  $R$  の積が, 特に  $R$  がある程度大きい値のときにはほぼ一定になることを発見した (人口集中の法則, 1913 年)．このことは次のように表現できる．

$$RP = A.K.$$

ただし  $A.K.$  とは, 地域, 特にその地域の総人口に依存する何らかの定数で, 絶対集中度とよばれる．一般に, 10 万を単位として表される．

いま,  $A.K.$  では異なる地域間の比較ができないので,  $A.K.$  を総人口 (単位は億) で割ることでその地域依存性を排除することを考える．この操作により得られる定数を  $Sp.K.$  と書くことにしよう (日本語では, 絶対集中度に対応して相対集中度とよばれる)． $Sp.K.$  は都市化すなわち人口集中化が進めば進むほど大きな値をとるという性質を持つ．この値を見ればその地域がどれほど都市化しているかが分かる, というわけである．

$Sp.K.$  に関する話はここでいったん終わるが, この節の最後には,  $Sp.K.$  の代わりになる, 都市化の指標となる新たな値が登場する．

Auerbach が発見した法則の両辺の常用対数をとると,  $\log A.K. \equiv b$  として

$$\log P = -\log R + \log A.K. = -\log R + b \quad .$$

のちに,  $\log R$  の係数が厳密には  $-1$  にならないことが示されることに注意しよう．

この法則は, 1925 年に Lotka A.J. によって再発見された．Lotka は  $P$  と  $R$  の間に次のような関係が成り立つことを発見した．

$$\log P = -0.93 \log R + \log 500000$$

確かに,  $\log R$  の係数は  $-1$  ではない．この式を一般化すれば

$$\log P = a \log R + b$$

となるが, この式は 1941 年に Zipf G.K. により発見されたもので, Zipf の法則として知られる ( $a$  は  $-1$  よりやや小さい値である)．

上式は,  $\log B \equiv b$  とすることで次式のように書き換えられる．

$$P = BR^a$$

これこそが, 最初に示したランクサイズ法則の具体的な形である．

ここで、 $a$  についてもう少し考察してみる．横軸に  $R$  を、縦軸に  $P$  をとったグラフ (配付資料参照) を考えてみよう．まず、人口が多い都市が存在すればするほど、都市化は進んでいると言えよう．さらに、人口が多い都市が多ければグラフ上に示される回帰直線の  $y$  切片の値は大きくなるので、回帰直線の傾きは急になる．つまり、 $a$  の絶対値  $|a|$  の値は大きくなる．逆に、人口の多い都市の数が少なければ少ないほど、都市化は進んでいないと言えるが、このときの  $|a|$  の値は、上と逆の論理により小さくなる．

本節のまとめ

$|a|$  が大きければ、結合の力が働いている (都市に人口や産業が集中している) ．

$|a|$  が小さければ、多様化の力が働いている (都市から人口や産業が分散している) ．

## 1.2 ランクサイズ法則の成立メカニズム：Simon の説明

本節の目的は、前節で提示した都市のランクサイズ法則を証明することであるが、まずはそのための準備を行う．

人口  $i$  以上の都市の数を  $F(i)$  と書くことにしよう．これは、前節における  $R$  に対応しているので、都市のランクサイズ法則を認めるならば、 $\rho$  を  $\rho \cong 1$  なるパラメータとして用いることで次のように書ける．

$$F(i) = Ai^{-\rho} \quad (1.1)$$

この式は、より一般には次のように書けることが知られている (理由については解説なし) ．

$$F(i) = \left(\frac{a}{i^k}\right) b^i \quad (1.2)$$

ただし、 $a, b$  は定数であり、特に  $b$  は  $b \cong 1$  を満たしているとする<sup>\*1</sup>．(1.2) 式を適当な仮定のもとで近似すると (この仮定が以降の議論の対象となる)、ベータ関数  $B(x, y)$  および定数  $A$  を用いて次のように書ける．

$$\begin{aligned} F(i) &= A \cdot B(i, \rho + 1) \\ &= A \cdot \int_0^1 \lambda^{i-1} (1-\lambda)^\rho d\lambda = A \cdot \frac{\Gamma(i) \cdot \Gamma(\rho + 1)}{\Gamma(i + \rho + 1)} \end{aligned} \quad (1.3)$$

ガンマ関数は、 $i \rightarrow \infty$  のもとで  $\frac{\Gamma(i)}{\Gamma(i+k)} \cong i^{-k}$  とできる性質を持つ．これを (1.3) 式に適用すると

$$F(i) \cong A \cdot \Gamma(\rho + 1) \cdot i^{-(\rho+1)} \quad (1.4)$$

$A \cdot \Gamma(\rho + 1) \equiv A'$ 、 $\rho + 1 \equiv \rho'$  とおけば

$$\cong A' \cdot i^{-\rho'} \quad (1.5)$$

(1.5) 式は (1.1) 式と等価であることに注意すると、上で行った式変形は、(1.3) 式から (1.1) 式を導く過程に他ならない．逆に、(1.1) 式から (1.3) 式を導くことが出来れば、ランクサイズ法則の説明が与えられたことになる．そのためには、(1.3) 式の導出に用いた“適当な仮定”がどのようなものであるかが分かればよい．以下では、Simon がこの“仮定”にどのような説明を与えたのかを見ていこう．

<sup>\*1</sup> 実は、多くの現象が (1.2) 式のように表せることが知られている．散文における単語の使用頻度や種の数別の生物学の属の分布などが、その例である．

ある地域の都市人口の総数を  $k$  , ある地域における人口  $i$  の都市の数を  $f(i, k)$  と書くことにする . ここで , 都市人口の総数  $k$  が , 出生または移住などの理由で “ 1 単位 ” 増える場合を考えよう . すなわち ,  $k + 1$  番目の人口集団が出現する場合を考える .

この文章を読んで , 次のような疑問を抱かれる方も多いだろう .

- なぜわざわざ  $f(i, k)$  などというものを考えるのか ?  $F(i)$  ではダメなのか ?
- なぜ  $k + 1$  番目の人口集団の出現などを考えるのか ? 直接求める方法は無いのか ?

これにはちゃんとした理由がある .

$k \rightarrow k + 1$  なる変化を与えたときに  $f(i, k)$  がどのように変化するかをとらえてやれば , 漸化式を解くようにして  $f(i, k)$  が求まる (微分とは , 微小区間における変化をとらえてやれば全体の変化の様子がわかる , という考えであったことを思いだそう) . そして , “ ある地域における人口  $i$  の都市の数 ” をその都市の人口  $i$  からその地域の都市人口の総数  $k$  まで積分すれば , “ 人口  $i$  の都市の順位 ” が求まる . なぜなら , 順位とは , それよりも上位の都市の数を足し合わせたものに他ならないからである .

これで上に掲げた 2 つの疑問は解けたことと思うので , さっそく漸化式を立ててみよう . Simon は , “ 新たに出現した  $k + 1$  番目の人がどの都市に住むか ” を確率論的に考察するために次のような仮定をおいた .

仮定 I

$k + 1$  番目の人口集団が人口規模  $i$  の都市に住む確率は ,  $i \cdot f(i, k)$  に比例する . すなわち , 規模  $i$  のすべての都市の人口の総和に比例する .

仮定 II

$k + 1$  番目の人口集団がそれまでになかった新しい都市にすむ確率は一定値  $\alpha$  である . すなわち , 「都市」とみなすことのできる人口の下限に到達した “ 集団 ” 人口の総和が , 全体に占める割合は  $\alpha = \text{const.}$  である .

仮定 II はそういうものだと思っていたらよいが , 仮定 I はそうもいかないので , 以下を見ていただきたい .

仮定 I'

$k + 1$  番目の人口集団がある 1 つの人口規模  $i$  の都市に住む確率は ,  $i$  に比例する .

この仮定の妥当性は , 次の事例で簡単に説明できる . 地面に適当な閉区間を描き , それをいくつかの区域に分割することを考えてほしい . これに向けて石を投げたとき , どの区域に石が落ちるかの確率は , その区域の面積に比例するのは明らかだろう .

仮定 I および仮定 I' はこれと全く同じ原理でおかれたものなので , どちらもほぼ同じことを言っているのだが , より幅広い現実に対応できるのは仮定 I のほうなので , 以降はこの仮定を採用しよう .

最後に , 確率の計算から得られる期待値と実際の値とを同一のものと見なすために , 次のような仮定をおく . この仮定についてもそういうものだと思っていたらよい .

仮定 III

都市人口増加の過程は定常状態にある .

我々はこの 3 つの仮定 (仮定 I , 仮定 II , 仮定 III) のもとで漸化式を立てる . そのために , 新たに出現した

$k + 1$  番目の人口集団が住む都市の人口規模による場合分けを行う．

- (1)  $k + 1$  番目の人口集団が人口規模  $i$  の都市に移住する場合，人口規模  $i$  の都市の数は 1 減少する．これを式で表すと次のようになる．

$$f(i, k + 1) - f(i, k) = -1$$

なお，仮定 I から，この移住がおこる確率は，比例定数  $K(k)$  を用いて  $K(k) \cdot i \cdot f(i, k)$  と表せる．

- (2)  $k + 1$  番目の人口集団が人口規模  $i - 1$  の都市に移住する場合，人口規模  $i$  の都市の数は 1 増加する．これを式で表すと次のようになる．

$$f(i, k + 1) - f(i, k) = 1$$

なお，仮定 I から，この移住がおこる確率は，比例定数  $K(k)$  を用いて  $K(k) \cdot (i - 1) \cdot f(i - 1, k)$  と表せる\*2．

- (3)  $k + 1$  番目の人口集団がそれ以外の人口規模の都市に移住する場合，人口規模  $i$  の都市の数は変化しない．これを式で表すと次のようになる．

$$f(i, k + 1) - f(i, k) = 0$$

以上 (1) ~ (3) を仮定 III のもとで漸化式としてまとめると次のようになる．

$$f(i, k + 1) - f(i, k) = K(k) \{(i - 1) \cdot f(i - 1, k) - i \cdot f(i, k)\} \quad (1.6)$$

(1.6) 式は  $i = 1$  の時には成立しないから，この場合のみ別に考えることにする．

$$f(1, k + 1) - f(1, k) = \alpha - K(k) \cdot f(1, k) \quad (1.7)$$

この漸化式を用いることで (直接解くわけではない)  $f(i, k)$  を求めることができるが，まだ十分ではない．そのためにまずは，比例定数  $K(k)$  を求めよう．

$k + 1$  番目の人口集団が既存の都市に住む確率は  $1 - \alpha$  であるから

$$\sum_{i=1}^k K(k) \cdot i \cdot f(i, k) = 1 - \alpha$$

が成り立つが， $K(k)$  は  $i$  に依存していないのでシグマ記号の外に出すことができ

$$K(k) \sum_{i=1}^k i \cdot f(i, k) = 1 - \alpha \quad (1.8)$$

さらに，題意より  $\sum_{i=1}^k i \cdot f(i, k) = k$  であるから，これを (1.8) 式に代入することで次式を得る．

$$K(k) = \frac{1 - \alpha}{k} \quad (1.9)$$

---

\*2  $K(k)$  は本来は全人口  $k$  “のみ” に依存する関数であるが，いま与えている  $k \rightarrow k + 1$  なる変化は実際に起こっていることではない (つまり実際は全人口は  $k$  のまま変化していない) から，ここでは定数とみなしてよい．さらに， $K(k)$  は  $i$  には依存していないので，(1) と (2) で同じ比例定数  $K(k)$  を用いてよい．

さらに,  $f(i, k)$  を求めるために新たに仮定をおくことにしよう.

仮定 IV

$k \rightarrow k+1$  なる変化においては次式が成り立つ.

$$\frac{f(i, k+1)}{f(i, k)} = \frac{k+1}{k} \quad (\forall i, k) \quad (1.10)$$

上式が主張するのは,  $k+1$  番目の人口集団が移住してきたときの人口規模  $i$  の都市数の変化は全人口の  $k \rightarrow k+1$  なる変化と同一だ, ということである. 言い換えれば, 各々の規模の都市数はその規模に比例して増加し, それゆえ同じ相対的大きさを保つ.

(1.10) 式より

$$\frac{f(i, k+1)}{f(i, k)} = \frac{f(i-1, k+1)}{f(i-1, k)} = \frac{k+1}{k}.$$

これを变形したのが次式である. ただし  $\beta(i)$  とは,  $k$  に依らない  $i$  のみの関数である.

$$\frac{f(i, k)}{f(i-1, k)} = \frac{f(i, k+1)}{f(i-1, k+1)} = \beta(i) \quad (1.11)$$

(1.11) 式が主張するのは,  $\frac{f(i, k)}{f(i-1, k)}$  は  $k$  に依らない, ということであるから,  $f(i, k)$  から  $k$  依存性を除去した相対都市数  $f^*(i)$  を用いて

$$\frac{f^*(i)}{f^*(i-1)} = \beta(i) \quad (1.12)$$

と書き換えることが出来る. 相対都市数  $f^*(i)$  の導入により, 我々が求めたいものは  $f(i, k)$  から相対都市数へと変わったことに注意しよう.

最後の準備として, 漸化式 (1.6) 式に (1.9) 式, (1.10) 式, (1.11) 式を代入することで  $\beta(i)$  を求めよう.

$$\begin{aligned} f(i, k) \cdot \frac{k+1}{k} - f(i, k) &= \frac{1-\alpha}{k} \left\{ f(i, k) \cdot \frac{i-1}{\beta(i)} - i \cdot f(i, k) \right\} \\ \left( \frac{k+1}{k} - 1 \right) f(i, k) &= \frac{1-\alpha}{k} \left\{ \frac{i-1}{\beta(i)} - i \right\} f(i, k) \\ (k+1-k) &= (1-\alpha) \left\{ \frac{i-1}{\beta(i)} - i \right\} \\ \beta(i) &= (1-\alpha) \{ (i-1) - i \cdot \beta(i) \} \\ \therefore \beta(i) &= \frac{(1-\alpha)(i-1)}{1+(1-\alpha)i} \end{aligned}$$

$\rho \equiv \frac{1}{1-\alpha}$  ( $1 < \rho < \infty$ ) として

$$\beta(i) = \frac{\frac{1}{\rho}(i-1)}{1 + \frac{i}{\rho}} = \frac{i-1}{i+\rho} \quad (i=2, \dots, k) \quad (1.13)$$

準備は整ったので, あとは (1.13) 式を (1.12) 式に代入すれば  $f^*(i)$  が求まる.

$$\begin{aligned}
f^*(i) &= \beta(i) \cdot f^*(i-1) \\
&= \beta(i)\beta(i-1) \cdot f^*(i-2) \\
&= \beta(i) \cdots \beta(2) \cdot f^*(1) \\
&= \frac{(i-1)(i-2) \cdots 2 \cdot 1}{(i+\rho)(i+\rho-1) \cdots (2+\rho)} \cdot f^*(1) \\
&= \frac{\Gamma(i) \cdot \Gamma(\rho+2)}{\Gamma(i+\rho+1)} \cdot f^*(1) = \frac{\Gamma(i) \cdot \Gamma(\rho+1)}{\Gamma(i+\rho+1)} \cdot f^*(1) \cdot (\rho+1) \\
&= f^*(1) \cdot (\rho+1) B(i, \rho+1)
\end{aligned}$$

$f^*(1) \cdot (\rho+1)$  は定数なのでこれをまとめて定数  $A$  と書けば

$$= A \cdot B(i, \rho+1) \quad (1.14)$$

(1.3) 式から (1.5) 式を導いたのと同じ手順を経て次を得る .

$$f^*(i) \cong A' i^{-\rho} \quad (1.15)$$

$f^*(j)$  を  $j$  に関して  $i$  から  $k$  まで積分すれば  $F(i)$  が求まる .

$$\begin{aligned}
F(i) &= \int_i^k f^*(j) \, dj = \int_i^k A' j^{-\rho} \, dj \\
&= \frac{A'}{1-\rho} (k^{1-\rho} - i^{1-\rho})
\end{aligned} \quad (1.16)$$

$1-\rho < 0$  であるから ,  $k$  が十分に大きいとき ,  $k^{1-\rho}$  は  $i^{1-\rho}$  よりもはるかに小さいので無視してよい .

$$\cong -\frac{A'}{1-\rho} \cdot i^{1-\rho}$$

$-\frac{A'}{1-\rho} \equiv a, \quad 1-\rho \equiv -b$  とおけば次式を得る .

$$F(i) = a i^{-b} \quad (1.17)$$

(1.17) 式と (1.1) 式は同値である .

#### 本節のまとめ

上で行った式変形により , 我々は “ランクサイズ法則” を導出することに成功した . その際においた仮定 I ~ 仮定 IV はいずれも現実世界であり得る仮定であったから , ランクサイズ法則が現実になり立っていることの説明にもなっているといえる .

また , (1.1) 式と (1.3) 式の同値性も示された . (1.14) 式と (1.15) 式は同値であったから , それを積分すれば , それぞれから (1.3) 式と (1.1) 式を得る . つまり , (1.2) 式から (1.3) 式を導く際に用いた “近似” とは , 仮定 I ~ 仮定 IV に他ならない .



## 2 空間的相互作用モデル

### 2.1 重力モデル

#### 2.1.1 重力モデルとその一般化

まずは、用語の定義を行おう。

- 空間的相互作用 (spatial interaction) : 人の移動, モノの移動, 情報の移動 (= 通信) など, 2 つの地点を結ぶあらゆる関係を総称する概念。
- 重力モデル (gravity model) : 空間的相互作用の量 (強さ) を定量的に表現するモデルの 1 つ。

上の定義から容易に想像できるように, 2 つの地点間の距離が大きくなればなるほど空間的相互作用は小さくなる。また, 出発地 (origin) と到着地 (destination) の性質 (以下の例ではこれを人口ととらえる) によって空間的相互作用は変化する。ということは, 空間的相互作用のモデルである重力モデルは, このことを反映していなければならない。

具体的に, 都市間の空間的相互作用を考えてみよう。都市  $i$  と都市  $j$  の間の空間的相互作用の強さ  $I_{ij}$  は, 人口規模の積  $p_i \cdot p_j$  の増加に伴い増大する一方で, 都市  $i$  と都市  $j$  の間の距離  $d_{ij}$  の増加に伴い減少するから, 比例定数を  $k$  として次のように表せるだろう。

$$I_{ij} = k \frac{p_i \cdot p_j}{d_{ij}} \quad (2.1)$$

(2.1) 式のような形式のモデルが “重力モデル” である。

だが, この重力モデルには欠陥がある。配付資料をみていただくと分かるが, ソルトレークシティとそれ以外の都市の間を飛行機で移動する客の数 (= 空間的相互作用) の実測値と重力モデルに基づくその予測値とをプロットしてみると, 本来ならばプロットされた点は直線になるはずなのに, 実際はそうはなっていない。回帰分析して得た直線が示されているが, 何の役にも立っていないことが分かるだろう。

では, その横にあるグラフはというと, プロットされた点は直線上に並んでいるように見える。このことを式にすると次のように表せる。

$$\log \left( \frac{I_{ij}}{p_i \cdot p_j} \right) = a \log d_{ij} + b \quad (b = \text{const.})$$

対数をはずした上で整理すると (簡単のため, 定数は  $k$  として書き直している)

$$I_{ij} = k \frac{p_i \cdot p_j}{d_{ij}^\alpha} \quad (k = \text{const.}) \quad (2.2)$$

(2.2) 式は重力モデルをより一般化した形になっており,  $\alpha$  の値を適切に定めることで<sup>\*3</sup>空間的相互作用を予測することができる。配付資料の下のグラフ (対数をとっていることに注意) においても回帰直線が示されているが, この場合は  $\alpha = 1.05$  である。回帰直線がちゃんと “役に立っている” ように見えることから分かるように, (2.2) 式のような形式のモデルはとても実用性が高い<sup>\*4</sup>。

<sup>\*3</sup> よく分からない場合はとりあえず  $\alpha = 2$  としておく約束になっている。

<sup>\*4</sup> (2.2) 式では分母のみが指数が 1 でなくなっているが,  $I_{ij} = k \left( \frac{p_i \cdot p_j}{d_{ij}} \right)^\alpha$  のようにこれを分子まで適用しても問題はない。さらに一般化して, 分子と分母の指数を異なる値にしてもよい。しかし, これ以降用いるのは (2.2) 式によるモデルである。

### 2.1.2 重力モデルの応用 1 (小売引力の法則)

まず、ここでいう“重力モデル”とは、(2.2) 式のような形式のモデルのことであることに注意して欲しい。このモデルは距離のべき乗の抵抗の項を持つ重力モデルであると考えられるから、この表現はあながち間違いではない。

重力モデルの応用としてまず挙げられるのが、小売引力の法則である。これは、都市間の商圈の境界を設定するために用いられるもので、経験的に発見された重力モデルの適用事例である。1931 年に Reilly によって発見されたのち、1949 年に Converse によって再発見された。

では、小売引力の法則は具体的に式としてどのように表せるのだろうか。そのために、以下のような条件を与えることにする。

- 都市 A と都市 B があって、それぞれの人口規模は  $p_A$ ,  $p_B$  である (都市 A と都市 B 以外に都市は存在しない)。
- 都市 A と都市 B のあいだに点 C があり、そこには人が住んでいる。特に、点 C は都市 A, B 間の商圈の境界上に存在している。
- 点 C と都市 A の間の距離は  $d_{AC}$ , 点 C と都市 B の間の距離は  $d_{BC}$  である。また、点 C を経由しての都市 A と都市 B の間の距離は  $d_{AB}$  である。

点 C は都市 A, B 間の商圈の境界上にあることから、点 C にいる人が都市 A に行く確率と都市 B に行く確率は同じである。このことを、距離パラメータ  $\alpha$  が 2 であると仮定する重力モデルを用いて数式で表現してみよう。

都市 C から都市 A へ移動した人の数  $I_{AC}$  と、都市 C から都市 B へ移動した人の数  $I_{BC}$  は

$$I_{AC} = k \frac{p_A \cdot p_C}{d_{AC}^2}, \quad I_{BC} = k \frac{p_B \cdot p_C}{d_{BC}^2}$$

と表すことが出来る。上で述べたように  $I_{AC} = I_{BC}$  であるから

$$I_{AC} = k \frac{p_A \cdot p_C}{d_{AC}^2} = k \frac{p_B \cdot p_C}{d_{BC}^2} = I_{BC} \quad .$$

同一項を消去し、整理する (整理の段階で  $d_{AB} = d_{AC} + d_{BC}$  が成り立つことを用いた)。

$$\begin{aligned} \frac{p_A}{d_{AC}^2} &= \frac{p_B}{d_{BC}^2} \quad . \\ \therefore \sqrt{\frac{p_A}{p_B}} &= \frac{d_{AC}}{d_{BC}} = \frac{d_{AB} - d_{BC}}{d_{BC}} = \frac{d_{AB}}{d_{BC}} - 1 \quad . \end{aligned}$$

左辺が  $d_{BC}$  のみになるように整理して次式を得る。

$$d_{BC} = \frac{d_{AB}}{1 + \sqrt{\frac{p_A}{p_B}}}$$

これが“小売引力の法則”である。経験的に得られた法則を重力モデルを用いて説明することができた。 $\alpha = 2$  を仮定して経験則を導くことができたことから、この仮定の妥当性が理解できるだろう。

### 2.1.3 重力モデルの応用 2 (Huff の確率モデル)

(2.2) 式で与えられる重力モデルの応用例としては、小売引力の法則の他に Huff の確率モデルが挙げられる。これは、確率論的に消費者の選択行動を説明するモデルであり、1963 に Huff により提唱された。

では、Huff の確率モデルとは具体的にどのような式で表されるのだろうか。そのために、以下のような条件を与えることにする。

- センター (たとえばコンビニ) が  $n$  個存在し、その規模は  $s_i$  と表される ( $i$  は 1 から  $n$  までの整数)。
- $n$  個のセンターがなす  $n$  角形の内部に地区 A が存在し、そこに居住する消費者がセンター  $i$  を選ぶ確率を  $p_{Ai}$  とする。これは言い換えれば“センター  $i$  が消費者をひきつける能力”である。
- 地区 A からセンター  $i$  までの時間距離 (= 地区 A からセンター  $i$  まで行くのに何分かかかるか) は  $t_{Ai}$  である (今までは空間的な距離で考えていたが、時間距離で考えたほうが妥当であろう)。

重力モデルをこの系に適用しよう。ただし、 $p_{Ai}$  を求める際には  $\sum_{i=1}^n p_{Ai} = 1$  となるように規格化しなければならないことに注意する。

$$(\text{センター } i \text{ と地区 A との間の空間的相互作用}) = k \frac{s_i \cdot (\text{地区 A の人口規模})}{t_{Ai}^\alpha} .$$

$$\therefore p_{Ai} = \frac{k \frac{s_i \cdot (\text{地区 A の人口規模})}{t_{Ai}^\alpha}}{\sum_{i=1}^n k \frac{s_i \cdot (\text{地区 A の人口規模})}{t_{Ai}^\alpha}} .$$

共通項を消去して、Huff の確率モデルの式を得る。

$$p_{Ai} = \frac{\frac{s_i}{t_{Ai}^\alpha}}{\sum_{i=1}^n \frac{s_i}{t_{Ai}^\alpha}}$$

なお、配布資料には  $n = 3$  の場合の一例が示されているので、よく見ておいていただきたい。

## 2.2 エントロピー最大化モデル

本節の目的は重力モデルの説明を与えることだが、その前に、前節で取り上げた重力モデルを一般化する。

### 2.2.1 空間的相互作用モデル族

前節で取り上げた重力モデルの一般的表現は次式のようになる。

$$T_{ij} = k \frac{V_i W_j}{d_{ij}^2} \quad (2.3)$$

ただし、文字は次のように定義されるものとする。

- $T_{ij}$  : 地区  $i$  から地区  $j$  への相互作用 (方向を持つ量であることに注意)

- $V_i$  : 放出性の測度<sup>\*5</sup> (= 空間的相互作用を発生する地区の性質のものさし)
- $W_j$  : 吸収性の測度 (= 空間的相互作用が到着する地区の性質のものさし)
- $d_{ij}$  :  $i, j$  間の距離または移動によるコスト
- $k$  : パラメータ (あえて “ 定数 ” と書かない理由は後で分かる)

(2.3) 式をさらに一般化すると

$$T_{ij} = k V_i^\alpha W_j^\gamma f(d_{ij}) \quad (2.4)$$

となる (一般化されたことが分かれば十分である) .

ここで,  $T_{ij}$  が  $i, j$  成分となるような  $m$  行  $n$  列の行列を考える . つまり,  $i$  は 1 以上  $m$  以下の整数で,  $j$  は 1 以上  $n$  以下の整数であると考え .

$$(T_{ij}) = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & \cdots & T_{1n} \\ T_{21} & T_{22} & \cdots & T_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ T_{m1} & T_{m2} & \cdots & T_{mn} \end{bmatrix}$$

この行列を OD 表と呼ぶ<sup>\*6</sup> . この行列が以降の考察の基本となるので, どのようなものなのか, しっかりと理解しておいていただきたい .

OD 表の成分は, 一見すると自由に決定することができる . しかし, 地区  $i$  から発生する空間的相互作用の量 (= 発生量) が

$$\sum_j T_{ij} = O_i \quad (2.5)$$

のようにしてあらかじめ決められている場合は, 制約が加わっているため, 自由に決定することはできない (発生制約条件) . 同様に, 地区  $j$  に到着する空間的相互作用の量 (= 吸収量) が

$$\sum_i T_{ij} = D_j \quad (2.6)$$

のようにしてあらかじめ決められている場合もまた, OD 表の成分を自由に決定することはできない<sup>\*7</sup> (吸収制約条件) . ゆえに, (2.5) 式で表される制約と (2.6) 式で表される制約, それぞれを考察対象に課すか否かによって, 4 通りの場合分けが生じることになる .

- (1) 無制約モデル (unconstrained model), すなわち, (2.5) 式で表される制約も (2.6) 式で表される制約も課さない場合の空間的相互作用は, (2.4) 式で表される .
- (2) 発生制約モデル (production constrained model), すなわち, (2.5) 式で表される制約は課すが, (2.6) 式で表される制約は課さない場合の空間的相互作用は次のように表せる .

$$T_{ij} = A_i O_i W_j^\gamma f(d_{ij}) \quad (2.7)$$

<sup>\*5</sup> “ 測度 ” とは, 前節において “ 都市の規模 ” として取り扱っていたものである . 実際 “ 規模 ” が対応することが多いが, 一般的に表現するためにこのような言葉を用いている .

<sup>\*6</sup> O は origin の, D は destination の頭文字である . 配布資料には表として示されているが, 行列で書いたほうが説明しやすいという作成者の事情により, 行列を用いている .

<sup>\*7</sup> OD 表の成分を, 制約条件をまず与えておいて, それに見合うようにして決定する, というわけである .

- (3) 吸収制約モデル (attraction constrained model), すなわち, (2.5) 式で表される制約は課さないが, (2.6) 式で表される制約は課す場合の空間的相互作用は次のように表せる.

$$T_{ij} = B_j V_i^\alpha D_j f(d_{ij}) \quad (2.8)$$

- (4) 発生・吸収制約 (二重制約) モデル (production-attraction constrained model), すなわち, (2.5) 式で表される制約も (2.6) 式で表される制約も課す場合の空間的相互作用は次のように表せる.

$$T_{ij} = A_i B_j O_i D_j f(d_{ij}) \quad (2.9)$$

(2.7) 式, (2.8) 式, (2.9) 式で用いられている  $A_i$  と  $B_j$  は均衡因子と呼ばれており, 無制約モデルにおいては定数であったパラメータ  $k$  が, 制約を加えられたことにより  $i$  依存性または  $j$  依存性を獲得したものである. 以下で, それぞれのモデル (制約が加えられているものに限る) における均衡因子を求めよう.

- 発生制約モデルにおける均衡因子  $A_i$  を求めたい. そのために, (2.7) 式の  $j$  についての和を考える.

$$\begin{aligned} \sum_j T_{ij} &= \sum_j A_i O_i W_j^\gamma f(d_{ij}) \\ &= A_i O_i \sum_j W_j^\gamma f(d_{ij}) \end{aligned}$$

(2.5) 式を用いれば

$$A_i = \frac{1}{\sum_j W_j^\gamma f(d_{ij})}. \quad (2.10)$$

- 吸収制約モデルにおける均衡因子  $B_j$  を求めたい. そのために, (2.8) 式の  $i$  についての和を考える.

$$\begin{aligned} \sum_i T_{ij} &= \sum_i B_j V_i^\alpha D_j f(d_{ij}) \\ &= B_j D_j \sum_i V_i^\alpha f(d_{ij}) \end{aligned}$$

(2.6) 式を用いれば

$$B_j = \frac{1}{\sum_i V_i^\alpha f(d_{ij})}. \quad (2.11)$$

- 二重制約モデルにおける均衡因子  $A_i$  を求めたい. そのために, (2.9) 式の  $j$  についての和を考える.

$$\begin{aligned} \sum_j T_{ij} &= \sum_j A_i B_j O_i D_j f(d_{ij}) \\ &= A_i O_i \sum_j B_j D_j f(d_{ij}) \end{aligned}$$

(2.5) 式を用いれば

$$A_i = \frac{1}{\sum_j B_j D_j f(d_{ij})}. \quad (2.12)$$

ついで, 同モデルにおける均衡因子  $B_j$  を求めたい. そのために, (2.9) 式の  $i$  についての和を考える.

$$\begin{aligned}\sum_i T_{ij} &= \sum_i A_i B_j O_i D_j f(d_{ij}) \\ &= B_j D_j \sum_i A_i O_i f(d_{ij})\end{aligned}$$

(2.6) 式を用いれば

$$B_j = \frac{1}{\sum_i A_i O_i f(d_{ij})} . \quad (2.13)$$

(2.10) 式 ~ (2.13) 式の 4 式を見比べていただくと、発生制約モデル・吸収制約モデルの均衡因子と二重制約モデルの均衡因子との間には、その定義において大きな違いがあることが分かる。すなわち、発生制約モデル・吸収制約モデルにおいては、均衡因子はモデルが定まれば容易に求められるが、二重制約モデルにおいては、均衡因子がもう一つの均衡因子に依存しているため、連立方程式を解かないと求めることができない。

## 2.2.2 Wilson における重力モデルの誘導

発生制約モデルと吸収制約モデルから重力モデルを誘導するのはたやすいので、ここでは二重制約モデルから重力モデルを導出することにする。

Wilson は、重力モデルを導くにあたり、OD 表の各成分がみたすべき制約を次のように定めた。

- 二重制約モデルを考えているので、(2.5) 式と (2.6) 式は共に満たされなければならない。
- 地区  $i$  から地区  $j$  への移動コストを  $C_{ij}$  とし、総移動コストを  $C = \text{const.}$  とすると

$$\sum_i \sum_j T_{ij} C_{ij} = C \quad (2.14)$$

が成り立つ。この式をコスト制約式という<sup>\*8</sup>。

さらに Wilson は、重力モデルを導くために次のような概念を導入した。

- トリップ・パターン：すべての  $i, j$  の組み合わせについて  $T_{ij}$  を書き並べた行列 (= OD 表) の上で見られる特定のパターン。
- 状態の数  $W(T_{ij})$ ：ある 1 つのトリップ・パターン  $\{T_{ij}\}$  を実現しうる移動者の組み合わせの数。

定義は上で完結しているが、“抽象的すぎてよく分からない”という方が大多数だと思われるので、具体例をもとに考えてみよう。

配布資料の、棒人間が 5 人描かれている図を見ていただきたい。これは、OD 表を左回りに 90 度回転させ

<sup>\*8</sup> 移動コストが大きくなればなるほど空間的相互作用は小さくなるから、両者の積を足し合わせれば一定の値になると考えてよい、という意味の式である（一般に、地区  $i$  から地区  $j$  への移動コストは地区  $i$  と地区  $j$  の間の距離で置き換えることができる。こちらのほうがイメージしやすいだろうか）。

たものを表している．もとになった OD 表は次のようなものである．

$$\begin{bmatrix} T_{11} \\ T_{21} \\ T_{31} \\ T_{41} \\ T_{51} \\ T_{61} \\ T_{71} \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

さらに，後の説明が理解しやすいようにこの行列を次のようにも表現しておく．

$$\begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & \cdots & T_{17} \\ T_{21} & T_{22} & \cdots & T_{27} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ T_{71} & T_{72} & \cdots & T_{77} \end{bmatrix} \left( = \begin{bmatrix} T_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ T_{21} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ T_{71} & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \right) \quad (2.16)$$

では，この図がどのような状況を表しているのかを説明しよう．

- OD 表の各成分は地区を表している．以下， $(1, i)$  成分に対応する地区を地区  $i$  と呼ぶことにする．
- 各地区には人が住んでいて，その合計人数は 5 人である．
- ここでは，この 5 人全員が通勤することを考える (空間的相互作用 = 通勤)．地区 1 にのみ職場が存在しているとする．つまり，地区 1 に向けての移動が 5 人分行われる<sup>\*9</sup>．
- (2.6) 式，(2.14) 式の 2 つの制約条件のもとで “ どの地区に何人住んでいるか ” を考えたい (この目的ゆえに，この具体例の中で発生条件を考えるのはナンセンスである)<sup>\*10</sup>．

通勤の到着地は地区 1 のみであるから，吸収制約条件は次のようになる<sup>\*11</sup>．

$$D_1 = \sum_{i=1}^7 T_{i1} = 5, \quad D_2 = D_3 = \cdots = D_7 = 0$$

移動コストは次のように定義する．

$$C_{11} = 0, \quad C_{21} = 1, \quad C_{31} = 2, \quad \cdots, \quad C_{71} = 6$$

これに関連して，総移動コスト  $C$  については  $C = 6$  であるとする．

以上のような制約のもとで OD 表の各成分  $T_{11}, \dots, T_{71}$  を定めてみよう<sup>\*12</sup>．容易に分かるように，上の制約をみたす成分の組は複数個存在する．それをすべて挙げると次のようになる．

$$\begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

<sup>\*9</sup> このことを “ 総トリップ数が 5 である ” と表現する．

<sup>\*10</sup> “ 全体で 5 人いる ” という条件は (2.6) 式を課すことで自動的に課される．

<sup>\*11</sup> この具体例の OD 表を (2.16) 式のような形で表現しておいたのは，(2.15) 式を用いると吸収制約条件式内の  $D_2, \dots, D_7$  が定義されないままになると考えたからである．

<sup>\*12</sup> 到着地点は固定されているから， $T_{i1}$  の値は地区  $i$  の人数と同じになる．ゆえに，OD 表の各成分を求めることと “ どの地区に何人住んでいるか ” を求めることは等価である．

この OD 表の 1 つ 1 つが “トリップ・パターン” である．上に述べた抽象的な定義をもう一度見直し，その意味を理解しておいていただきたい．

ついで “状態の数” の説明を行おう．上に挙げたトリップ・パターンにおいては個人が区別されていない．つまり，実際は人の移動を考えているから “4 人” といっても “5 人の中のどの 4 人なのか” を考えなければならないはずなのに，上に挙げたトリップ・パターンにおいてはこれが導入されていない．

一番左のトリップ・パターンを例にとって，トリップ・パターンに “人の区別” を導入してみよう．地区 1 に住む人は 4 人であるから，その 4 人の選び方 (“順列” ではなく “組み合わせ” であることに注意) を考えて

$${}_5C_4 = \binom{5}{4} = 5$$

1 項目は二項係数の高校における表現であり，2 項目は二項係数の大学における表現である．これ以降は後者を用いることにする．

左から 2 番目のトリップ・パターンであれば，5 人から 3 人を選べばよいから

$$\binom{5}{3} = 10 \quad .$$

左から 3 番目のトリップ・パターンであれば，5 人から 3 人を選んだ後に残った 2 人のうちから 1 人を選べばよいから

$$\binom{5}{3} \cdot \binom{2}{1} = 20$$

以下同様にしてすべてのトリップ・パターンに対して “人の区別” を導入すると，その組み合わせは左のトリップ・パターンから順番に “5, 10, 20, 20, 30, 60, 30, 20, 10, 5” となる．この値それぞれが，トリップ・パターン 1 つ 1 つに対応する “状態の数” である．

これまでは具体例を用いてトリップ・パターンと状態の数という 2 つの概念の説明を行ってきた．その扱いにも慣れたと思うので，これから一般論に入ろう．

一般性を持たせるために，OD 表は

$$(T_{ij}) = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & \cdots & T_{1n} \\ T_{21} & T_{22} & \cdots & T_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ T_{m1} & T_{m2} & \cdots & T_{mn} \end{bmatrix}$$

を考えることにする ( $i$  は 1 以上  $m$  以下の整数， $j$  は 1 以上  $n$  以下の整数)．上の具体例と同様にしてトリップ・パターンの状態の数  $W$  を求めてみよう．ただし， $(i, j)$  成分は  $(i, j)$  地区と呼ぶことにする．

最初に，対象となる人の総数を  $N$  人と定めておこう．OD 表より， $(1, 1)$  地区から  $(1, 1)$  地区へ移動する人は  $T_{11}$  人であるから，その選び方は

$$\binom{N}{T_{11}} = \frac{N!}{T_{11}! (N - T_{11})!} \quad (\text{通り}) \quad .$$

$(1, 2)$  地区から  $(1, 1)$  地区へ移動する人の選び方は，すでに  $T_{11}$  人が割り当てられていることに注意して

$$\binom{N - T_{11}}{T_{12}} = \frac{(N - T_{11})!}{T_{12}! (N - T_{11} - T_{12})!} \quad (\text{通り}) \quad .$$



以下同様にして

$$\begin{aligned} W(T_{ij}) &= \binom{N}{T_{11}} \binom{N-T_{11}}{T_{12}} \cdots \binom{N-T_{11}-\cdots-T_{i,j-1}}{T_{ij}} \cdots \\ &= \frac{N! \cdot (N-T_{11})! \cdot (N-T_{11}-T_{12})! \cdots}{T_{11}! (N-T_{11})! \cdot T_{12}! (N-T_{11}-T_{12}) \cdot T_{13}! (N-T_{11}-T_{12}-T_{13})! \cdots} \end{aligned}$$

共通項を約して

$$= \frac{N!}{T_{11}! T_{12}! T_{13}! \cdots T_{21}! T_{22}! \cdots T_{ij}! \cdots} = \frac{N!}{\prod_{i,j} T_{ij}!} . \quad (2.17)$$

(2.5), (2.6), (2.14) の 3 式からなる制約条件を満たし, かつ, (2.17) 式を最大値にするトリップ・パターン  $\{T_{ij}\}$  が最も起こりやすいパターンであるといえる.

(2.17) 式のままだと計算が煩雑になるので両辺の自然対数をとって<sup>\*13</sup>

$$\log W(T_{ij}) = \log N! - \sum_i \sum_j \log T_{ij}!$$

$N$  が十分に大きいとき  $\log N! \cong N \log N - N$  と近似できる (Stirling 近似) ので

$$= (N \log N - N) - \sum_i \sum_j (T_{ij} \log T_{ij} - T_{ij}) . \quad (2.18)$$

(2.18) 式の最大値を求めるには, Lagrange の未定乗数法を用いるのが適当である.

**Lagrange の未定乗数法: 条件付き極値問題**

$m < n$  とする.  $m$  個の制約条件式

$$g_j(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0 \quad (j = 1, 2, \cdots, m)$$

のもとで,  $n$  変数関数  $Z = f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$  の最大 (最小) 値を求めたい.

Lagrange 乗数  $\lambda_j$  を用いて Lagrange 関数  $L$  を次のように定義する.

$$\begin{aligned} L &= f(x_1, x_2, \cdots, x_n) + \lambda_1 g_1(x_1, x_2, \cdots, x_n) + \lambda_2 g_2(x_1, x_2, \cdots, x_n) + \cdots \\ &= f(x_1, x_2, \cdots, x_n) + \sum_{j=1}^m \lambda_j g_j(x_1, x_2, \cdots, x_n) \end{aligned}$$

Lagrange 関数の変数  $x_1, x_2, \cdots, x_n$  それぞれについての偏導関数を求めると

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^m \lambda_j \frac{\partial g_j}{\partial x_i} \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

これが 0 となるような  $x_1, x_2, \cdots, x_n$  の組は  $n$  変数関数  $Z$  の極大 (極小) 値を与えるが, 一般に, それはそのまま最大 (最小) 値となる<sup>a</sup>.

<sup>a</sup> 高校の微分においては (導関数) = 0 としていたが, 変数が増えても同じことをすればよい, というわけである.

<sup>\*13</sup> 対数をとることで積が和に変換され, 微分がしやすくなる.

すべての  $n$  変数関数  $Z$  に対してこの手法が適用できるわけではないが、よほど奇をてらった関数でなければ適用可能である<sup>\*14</sup>。(2.18) 式の最大値を求める際には“適用できないのではないか”という可能性を危惧する必要はない。

(2.5) 式, (2.6) 式, (2.14) 式を (右辺) = 0 の形に変形すると

$$O_i - \sum_j T_{ij} = 0, \quad (\text{Lagrange 乗数は } \lambda_i) \quad (2.19)$$

$$D_j - \sum_i T_{ij} = 0, \quad (\text{Lagrange 乗数は } \gamma_j) \quad (2.20)$$

$$C - \sum_i \sum_j T_{ij} C_{ij} = 0. \quad (\text{Lagrange 乗数は } \beta) \quad (2.21)$$

(2.19) 式は一見すると 1 個の制約式に見えるが、 $i$  は 1 から  $m$  までの整数を表していたから、これは実は  $m$  個の制約式を表していることになる。同様に、(2.20) 式は  $n$  個の制約式を表している。しかし、(2.21) 式は見た目通り 1 個の制約式であることに注意しよう。

Lagrange の未定乗数法を適用するために Lagrange 関数  $L$  を求めよう。

$$\begin{aligned} L = N \log N - N - \sum_i \sum_j (T_{ij} \log T_{ij} - T_{ij}) \\ + \sum_i \lambda_i \left( O_i - \sum_j T_{ij} \right) + \sum_j \gamma_j \left( D_j - \sum_i T_{ij} \right) + \beta \left( C - \sum_i \sum_j T_{ij} C_{ij} \right) \end{aligned} \quad (2.22)$$

Lagrange 関数  $L$  の変数  $T_{ij}$  についての偏導関数を求めよう。そのためには、 $L$  を  $T_{ij}$  だけの 1 変数関数とみなして (つまりそれ以外の変数は定数とみなして)  $T_{ij}$  で微分すればよい。

$$\frac{\partial L}{\partial T_{ij}} = -\log T_{ij} - \lambda_i - \gamma_j - \beta C_{ij}$$

これが 0 となるような  $T_{ij}$  の組が  $L$  の最大値を与えるといえるから (最小値かもしれないという批判があるかもしれないが、ここではあまり厳密には扱わないことにする)、対数を外して

$$T_{ij} = e^{-\lambda_i - \gamma_j - \beta C_{ij}} = \exp(-\lambda_i - \gamma_j - \beta C_{ij}). \quad (2.23)$$

ここでいったん話を整理しよう。我々は重力モデルを導出したかったわけであって  $L$  の最大値を求めたかったわけではない。重力モデルの導出のためには  $T_{ij}$  が求まれば十分であって、実はそれは (2.23) 式のようにすでに求まっている。ゆえに、あとはこの式を重力モデルの形 (すなわち (2.4) 式の形) に変形すればよい。

(2.23) 式の両辺を、 $j$  について和をとると

$$\begin{aligned} \sum_j T_{ij} &= \sum_j \exp(-\lambda_i - \gamma_j - \beta C_{ij}) \\ &= \exp(-\lambda_i) \sum_j \exp(-\gamma_j - \beta C_{ij}) \end{aligned}$$

(2.5) 式より

$$\exp(-\lambda_i) = \frac{O_i}{\sum_j \exp(-\gamma_j - \beta C_{ij})}. \quad (2.24)$$

<sup>\*14</sup> 間違っているといけないので信用しないでいただきたいが、 $Z, g_j$  が  $C^1$  級であればこの手法を適用できるはずである。

今度は, (2.23) 式の両辺を,  $i$  について和をとると

$$\begin{aligned}\sum_i T_{ij} &= \sum_i \exp(-\lambda_i - \gamma_j - \beta C_{ij}) \\ &= \exp(-\gamma_j) \sum_i \exp(-\lambda_i - \beta C_{ij})\end{aligned}$$

(2.6) 式より

$$\exp(-\gamma_j) = \frac{D_j}{\sum_i \exp(-\lambda_i - \beta C_{ij})} . \quad (2.25)$$

ここで,  $A_i, B_j$  を次のように定義しよう<sup>\*15</sup> .

$$A_i = \frac{1}{\sum_j \exp(-\gamma_j - \beta C_{ij})}, \quad B_j = \frac{1}{\sum_i \exp(-\lambda_i - \beta C_{ij})}$$

この定義を (2.24) 式と (2.25) 式とに適用すると

$$\exp(-\lambda_i) = A_i O_i, \quad \exp(-\gamma_j) = B_j D_j . \quad (2.26)$$

(2.26) 式を (2.23) 式に適用すれば

$$\begin{aligned}T_{ij} &= \exp(-\lambda_i) \exp(-\gamma_j) \exp(-\beta C_{ij}) \\ &= A_i B_j O_i D_j \exp(-\beta C_{ij}) .\end{aligned} \quad (2.27)$$

二重制約モデルの一般式 (2.9) 式と (2.27) 式とを比較してみよう .

$$f(d_{ij}) \approx f(C_{ij}) = \exp(-\beta C_{ij})$$

と考えれば, (2.27) 式は確かに二重制約モデルを表していると考えられる .

### 2.2.3 重力モデルとの関係

距離知覚の研究などから, より一般的な移動コストは “ 距離の対数で表されるようなある種の抵抗 ” であると考えられている . このことをふまえてコスト制約式 (2.14) 式を次のように書き換える .

$$C' = \sum_i \sum_j T_{ij} \log d_{ij} \quad (2.28)$$

(2.5), (2.6), (2.28) の 3 式からなる制約条件のもとで Lagrange 関数  $L$  を求めなおしてみよう . そのためには (2.22) 式において (2.14) 式を用いた部分を (2.28) 式に置き換えればよい .

$$\begin{aligned}L &= N \log N - N - \sum_i \sum_j (T_{ij} \log T_{ij} - T_{ij}) \\ &\quad + \sum_i \lambda_i \left( O_i - \sum_j T_{ij} \right) + \sum_j \gamma_j \left( D_j - \sum_i T_{ij} \right) + \beta \left( C' - \sum_i \sum_j T_{ij} \log d_{ij} \right) \quad (2.29)\end{aligned}$$

<sup>\*15</sup> (2.12) 式と (2.24) 式, および, (2.13) 式と (2.25) 式を見比べていただければ, この定義は妥当であるとわかる .

変数  $T_{ij}$  による Lagrange 関数  $L$  の偏導関数が 0 になるという条件から  $T_{ij}$  を求めれば

$$\begin{aligned} T_{ij} &= \exp(-\lambda_i) \exp(-\gamma_j) \exp(-\beta \log d_{ij}) \\ &= \exp(-\lambda_i) \exp(-\gamma_j) \cdot d_{ij}^{-\beta} . \end{aligned} \quad (2.30)$$

$A_i'$ ,  $B_j'$  を

$$A_i' = \frac{1}{\sum_j \left( \exp(-\gamma_j) \cdot d_{ij}^{-\beta} \right)}, \quad B_j' = \frac{1}{\sum_i \left( \exp(-\lambda_i) \cdot d_{ij}^{-\beta} \right)}$$

と定義すれば, (2.23) 式 ~ (2.26) 式までの変形と同様にして

$$\exp(-\lambda_i) = A_i' O_i, \quad \exp(-\gamma_j) = B_j' D_j .$$

したがって

$$\begin{aligned} T_{ij} &= A_i' B_j' O_i D_j \cdot d_{ij}^{-\beta} \\ &= \frac{A_i' B_j' O_i D_j}{d_{ij}^{\beta}} . \end{aligned} \quad (2.31)$$

(2.31) 式と (2.3) 式とを見比べれば, (2.31) 式は確かに重力モデルを表していると考えられる. (2.27) 式と (2.31) 式との違いは, 前者では距離抵抗は指数関数で表現されているが, 後者では距離抵抗は距離のべき乗で表現されている点である.