２００８年度１学期月曜２限

記号論理学Ｉ

（述語論理・過去問）

岡本賢吾先生

担当：匿名希望　sum_happiness5342@yahoo.co.jp

目次

１．まえがき

さて、記号論理学Ⅰのシケプリなのですが、僕は述語論理と過去問を担当させていただきます。命題論理・ペアノ算術、及び別の年の過去問は相棒担当なのでそちらも参照してください。

まず、構成ですが、授業に出て配布物はもらっていることを前提とし、証明中心とさせていただきます。述語論理は、プリント上の命題を、証明が載っているもの、授業でやったものも含めて、とにかく何でもかんでも証明します。すべて修得すれば、おそらくある程度の問題は解けるでしょう。ただし、証明以外でプリント読めばわかることはあんまり書きません。過去問は一年分だけ問題と解答を載せておきます。他に２年分ありますが、エンコードの問題でうまく貼れないので、問題だけ別でアップしておきます。解答は個々で聞きに来てください。それまでには解答を作っておくつもりです。

また、「これは違うんじゃないか？」、「どういうこと？」など質問は受け付けます。というか、尻下がりにやる気を削がれていった結果、足りない所は質問等で補ってもらおう、ということになりました。なので、使わないと損です。記号論理学についての質問はいつでも受け付けます。直接どっかで身柄拘束してくれてもいいですし、メールで一回連絡取ってくれてもいいです。あと、性格上ミスはありうるので、シケプリ使ってるよメール送ってくれた人には随時訂正をお知らせします。

以下、読み進める上での注意点を述べます。

・Φ、Ψはめんどくさいので、A、B に置き換えます。

・「前提」は⊢の左側、「仮定」は便宜上前提と考えたもので、最終的には$[A(x)]_1$などとして消さなければならないものとして区別します。

・作成上の問題で、

$$\frac{[A(x)]_1 \quad B(x)}{A(x) \rightarrow B(x)} \text{①}$$

は

$$\frac{[A(x)] \quad B(x)}{A(x) \rightarrow B(x)} 1$$

と考えてください。試験ではちゃんと下で書いてください。

・Process に示した論理手順は、あくまで一例ですが、理解の手助けにはなると思います。というか、これがこのシケプリの存在意義であると思われるので、それぞれ有効に活用してください。ただし、他の考え方でも全然いけます。

・哲学には踏み入らないのでご安心を。（笑）

３．述語論理

命題集

導入則・除去則の例

(1) $\forall x\,(A(x) \to B(x)), A(x:=t) \vdash B(x:=t)$

(2) $\forall x\,(A(x) \to B(x)), \forall x\,(B(x) \to C(x)) \vdash \forall x\,(A(x) \to C(x))$

(3) $\forall x\,(A(x) \to B(x)), A(x:=t) \vdash \exists x\,B(x)$

(4) $\forall x\,(A(x) \to B(x)), \exists x\,A(x) \vdash \exists x\,B(x)$

(5) $\vdash \forall x\,\forall y\,(x=y \to y=x)$

(6) $\vdash \forall x\,\forall y\,\forall z\,((x=y \land y=z) \to x=z)$

全称量化子と存在量化子の関係

(1) $\forall x\,(A(x)) \vdash_{NK} \dashv \neg\exists x\,(\neg A(x))$

(2) $\forall x\,(\neg A(x)) \vdash \dashv \neg\exists x\,(A(x))$

(3) $\neg\forall x\,(A(x)) \vdash_{NK} \dashv \exists x\,(\neg A(x))$

(4) $\neg\forall x\,(\neg A(x)) \vdash_{NK} \dashv \exists x\,(A(x))$

(5) $\forall x\,(A(x)) \vdash \times \exists x\,(A(x))$

全称量子化のスコープ

(1) $\forall x\,(A(x) \land B) \vdash\dashv \forall x\,(A(x)) \land B$

(2) $\forall x\,(A(x) \lor B) \vdash_{NK} \dashv \forall x\,(A(x)) \lor B$

(3) $\forall x\,(B \to A(x)) \vdash\dashv B \to \forall x\,(A(x))$

(4) $\forall x\,(A(x) \to B) \vdash\dashv \exists x\,(A(x)) \to B$

(5) $\forall x\,(A(x) \land B(x)) \vdash\dashv \forall x\,(A(x)) \land \forall x\,(B(x))$

(6) $\forall x\,(A(x) \lor B(x)) \times \dashv \forall x\,(A(x)) \lor \forall x\,(B(x))$

(7) $\forall x\,(A(x) \to B(x)) \vdash \times \forall x\,(A(x)) \to \forall x\,(B(x))$

存在量化子のスコープ

(1) $\exists x\,(A(x) \land B) \vdash\dashv \exists x\,(A(x)) \land B$

(2) $\exists x\,(A(x) \lor B) \vdash\dashv \exists x\,(A(x)) \lor B$

(3) $\exists x\,(A \to B(x)) \vdash \quad {}_{NK}\dashv A \to \exists x\,(B(x))$

(4) $\exists x\,(A(x) \to B) \vdash \quad {}_{NK}\dashv \forall x\,(A(x)) \to B$

(5) $\forall x\,(A(x) \land B(x)) \vdash\dashv \forall x\,(A(x)) \land \forall x\,(B(x))$

(6) $\exists x\,(A(x) \lor B(x)) \vdash\dashv \exists x\,(A(x)) \lor \exists x\,(B(x))$

(7) $\exists x\,(A(x) \to B(x)) \times \quad {}_{NK}\dashv \exists x\,(A(x)) \to \exists x\,(B(x))$

導入則・除去則の例

(1) $\forall x\,(A(x) \to B(x)), A(x{:=}t) \vdash B(x{:=}t)$

$$\dfrac{A(x{:=}t) \quad \dfrac{\forall x\,(A(x) \to B(x))}{A(x{:=}t) \to B(x{:=}t)}}{B(x{:=}t)}$$

Process:①全称量化子はそのままでは扱いづらいから∀除去を考える。②すると、$A(x{:=}t) \to B(x{:=}t)$ が出てくるからもう一つの前提 $A(x{:=}t)$とあわせて、→除去則により結論が導かれる。③仮定はしてないので OK.

(2) $\forall x\,(A(x) \to B(x)),\ \forall x\,(B(x) \to C(x)) \vdash \forall x\,(A(x) \to C(x))$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[A(x)]_1 \quad \dfrac{\forall x(A(x) \to B(x))}{A(x) \to B(x)}}{B(x)} \quad \dfrac{\forall x(B(x) \to C(x))}{B(x) \to C(x)}}{C(x)}}{A(x) \to C(x) \quad ①}}{\forall x\,(A(x) \to C(x))}$$

Process:①まず∀除去して、結論を見る。②結論の→の左側は、とりあえず仮定してみると good.ってことで A(x)を仮定。③A(x) → C(x)までは普通に出るよね。④仮定 A(x)を消す。⑤生きている前提は全称量化子が付いたもののみなので、x は任意。⇒A(x) → C(x)に∀導入できる。

(3) $\forall x\,(A(x) \to B(x)),\ A(x{:=}t) \vdash \exists x\,B(x)$

$$\dfrac{\dfrac{A(x{:=}t) \quad \dfrac{\forall x\,(A(x) \to B(x))}{A(x{:=}t) \to B(x{:=}t)}}{B(x{:=}t)}}{\exists x\,B(x)}$$

Process:①∀除去。②B(x:=t)が出る。③B(x:=t)となる x:=t が存在する。⇒∃導入。

(4) $\forall x\,(A(x) \to B(x)),\ \exists x\,A(x) \vdash \exists x\,B(x)$

$$\dfrac{\exists x\,A(x) \quad \dfrac{\dfrac{[A(x)]_1 \quad \dfrac{\forall x\,(A(x) \to B(x))}{A(x) \to B(x)}}{B(x)}}{\exists x\,B(x)}}{\exists x\,B(x) \quad ①}$$

Process:①∀除去。②右の塊では、A(x) → B(x)から B(x)を出すのが目標なので、→左側仮定。③B(x)が導けたら、∃導入。このとき、∃導入は外に出す前にやらなくてはいけない。④∃x A(x)が前提⇒A(x)をみたす x の存在が前提。⇒仮定 A(x)が消せる。

(5) $\vdash \forall x\ \forall y\,(x=y \to y=x)$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{x=x \qquad [x=y]_1}{y=x}}{x=y \to y=x \quad ①}}{\dfrac{\forall y\,(x=y \to y=x)}{\forall x\ \forall y\,(x=y \to y=x)}}$$

Process:①=導入(ここでは x=x)は演繹中のどこでも仮定に数えず導入してよいので、次の=除去のため x=x を用意。②→左側仮定。③x=x の x は任意なので、=除去で 1 つめの x を y とし、y=x とする。④∀導入× 2

(6)⊢∀x ∀y ∀z ((x=y ∧ y=z) → x=z)

[x=y ∧ y=z]₁ | [x=y ∧ y=z]₁

x=y | y=z

x=z

(x=y ∧ y=z) → x=z ①

∀z((x=y ∧ y=z) → x=z)

∀y ∀z((x=y ∧ y=z) → x=z)

∀x ∀y ∀z((x=y ∧ y=z) → x=z)

Process:①→左側仮定。②=除去のため∧除去× 2 で準備。③=除去。④仮定消去。⑤前提はないので x,y,z 任意。⇒∀導入× 3

<u>全称量化子と存在量化子の関係</u>

(1)∀x (A(x)) ⊢ NK⊣ ￢∃x (￢A(x))

(a) ∀x (A(x)) ⊢ ￢∃x (￢A(x))

[∃x (￢A(x))]₂ | [￢A(x)]₁ | ∀x (A(x))

A(x)

⊥

⊥ ①

￢∃x (￢A(x)) ②

Process:①最終的には￢導入が目標であるときは、その￢をとったものをまず仮定し、⊥を導いた後、￢導入するとうまくいくことが多いから、ここでも∃x(￢A(x))を仮定してみる。②⊥を導きたいので、∀x(A(x))を∀除去で出した A(x)と対になる￢A(x)を仮定。(これが、仮定∃x (￢A(x))により消えることにも注目。) ③⊥を導く。④∃除去&￢導入。∃除去はこうして使います。

(b) ￢∃x (￢A(x)) ⊢NK ∀x (A(x))

[￢A(x)]₁

￢∃x (￢A(x)) | ∃x (￢A(x))

⊥

￢￢A(x) ①

A(x)

∀A(x)

Process:①NK⇒二重否定側を使うはず。②￢∃x (￢A(x))は変えようがない⇒∃x (￢A(x))と合わせて⊥を導き、￢￢A(x)を導くことを考える⇒￢A(x)を仮定。③⊥を出す必要があるので、∃導入で、￢∃x (A(x))と対になる∃x (A(x))を出す。④A(x)まで出たら、x は任意であるので、∀導入。

(2)∀x (￢A(x)) ⊢ ⊣ ￢∃x (A(x))

(a) $\forall x\,(\neg A(x)) \vdash \neg\exists x\,(A(x))$

$$\dfrac{\dfrac{[\exists x\,(A(x))]_2 \quad \dfrac{[A(x)]_1 \quad \dfrac{\forall x\,(\neg A(x))}{\neg A(x)}}{\bot}}{\bot}\ ①}{\neg\exists x\,(A(x))}\ ②$$

Process:(1)の(a)と同じです。

(b) $\neg\exists x\,(A(x)) \vdash \forall x\,(\neg A(x))$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg\exists x\,(A(x)) \quad \dfrac{[A(x)]_1}{\exists x\,(A(x))}}{\bot}}{\neg A(x)}\ ①}{\forall x\,(\neg A(x))}$$

Process: (1)の(b)が出来ればできるはず。

(3) $\neg\forall x\,(A(x)) \vdash_{NK} \dashv \exists x\,(\neg A(x))$

(a) $\neg\forall x\,(A(x)) \vdash_{NK} \exists x\,(\neg A(x))$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg\forall x\,(A(x)) \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg A(x)]_1}{\exists x\,(\neg A(x))} \quad [\neg\exists x\,(\neg A(x))]_2}{\bot}}{\neg\neg A(x)}\ ①}{A(x)}}{\forall x\,A(x)}}{\bot}}{\neg\neg\exists x\,(\neg A(x))}\ ②}{\exists x\,(\neg A(x))}$$

Process:①二重否定則を使う⇒¬¬∃x (¬A(x))を導く⇒¬∃x (¬A(x))を仮定②¬∀x (A(x))と合わせて⊥を導きたい⇒∀x A(x)を導く。⇒A(x)を導く。③これも¬A(x)から⊥を出すしかない。④よって上のようになる。

(b) $\exists x\,(\neg A(x)) \vdash \neg\forall x\,(A(x))$

$$\dfrac{\dfrac{\exists x\,(\neg A(x)) \quad \dfrac{[\neg A(x)]_1 \quad \dfrac{[\forall x\,(A(x))]_2}{A(x)}}{\bot}}{\bot}\ ①}{\neg\forall x\,(A(x))}\ ②$$

Process:①∀x(A(x))仮定⇒A(x)②∃(¬A(x))前提⇒¬A(x)仮定

(4)¬∀x (¬A(x)) ⊢NK ⊣ ∃x (A(x))

(a) ¬∀x (¬A(x)) ⊢NK ∃x (A(x))

¬∀x (¬A(x)) [A(x)]1 [¬∃x (A(x))]2

∃x(A(x))

⊥

¬A(x) ①

∀x(A(x))

⊥

¬¬∃x(A(x)) ②

∃x(A(x))

Process: (3)の(a)と同じです。

(b) ∃x (A(x)) ⊢ ¬∀x (¬A(x))

∃x(A(x)) [A(x)]1 [∀x(¬A(x))]2

¬A(x)

⊥

⊥ ①

¬∀x(¬A(x)) ②

Process:もうそろそろ新しい考え方以外は書かなくてもよいでしょう。・・・疲れてきました。（笑）

(5)∀x (A(x)) ⊢ × ∃x (A(x))

∀x (A(x)) ⊢ ∃x (A(x))

∀x (A(x))

A(x)

∃x(A(x))

Process:∀除去、∃導入を端的に表してますね。

<u>全称量子化のスコープ</u>

(1)∀x (A(x)) ∧ B) ⊢⊣ ∀x (A(x)) ∧ B

(a) ∀x (A(x)) ∧ B) ⊢ ∀x (A(x)) ∧ B

∀x (A(x) ∧ B) ∀x(A(x) ∧ B)

A(x) ∧ B A(x) ∧ B

A(x) B

∀x A(x)

∀x (A(x)) ∧ B

Process:①∀除去＆∧除去で A(x)および B が出ます。②A(x)の方に∀導入。③∧導入。

(b) ∀x (A(x)) ∧ B ⊢ ∀x (A(x)) ∧ B)

∀x (A(x)) ∧ B ∀x (A(x)) ∧ B

∀x (A(x)) B

A(x)

A(x) ∧ B

∀x (A(x) ∧ B)

Process:(a)の逆です。

(2) $\forall x(A(x) \lor B) \vdash_{NK} \dashv \forall x(A(x)) \lor B$

(a) $\forall x(A(x) \lor B) \vdash_{NK} \forall x(A(x)) \lor B$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\forall x(A(x) \lor B)}{A(x) \lor B} \quad [A(x)]_1 \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[B]_1}{\forall x(A(x)) \lor B} \quad [\neg(\forall x(A(x) \lor B))]_2}{\bot}}{A(x)}}{A(x)} \ \text{①}}{\forall x(A(x)) \lor B} \quad [\neg(\forall x(A(x)) \lor B)]_2}{\bot}}{\neg\neg(\forall x(A(x)) \lor B)} \ \text{②}}{\forall x(A(x)) \lor B}$$

Process:①∨があるので、とりあえず、A(x)と B の２つの場合を考える。②B から不条理則により、A(x)を導く③再び¬(∀x (A(x)) ∨ B)を仮定して⊥。④二重否定則により、結論。

(b) $\forall x(A(x)) \lor B \vdash \forall x(A(x) \lor B)$

$$\dfrac{\forall x(A(x)) \lor B \quad \dfrac{[A(x)]_1}{A(x) \lor B} \quad \dfrac{[B]_1}{A(x) \lor B}}{A(x) \lor B} \ \text{①}$$

Process:①A(x)、B２つの場合で∨導入。

(3) $\forall x(B \to A(x)) \vdash \dashv B \to \forall x(A(x))$

(a) $\forall x(B \to A(x)) \vdash B \to \forall x(A(x))$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\forall x(B \to A(x))}{B \to A(x)} \quad [B]_1}{A(x)}}{\forall (A(x))}}{B \to A(x)} \ \text{①}$$

Process:①→左側仮定。②A(x)を導く。③∀導入。④→導入。

(b) $B \to \forall x(A(x)) \vdash \forall x(B \to A(x))$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{B \to \forall x A(x) \quad [B]_1}{\forall x A(x)}}{A(x)}}{B \to A(x)} \ \text{①}}{\forall x(B \to A(x))}$$

Process:①B → A(x)が目標⇒B 仮定。②そして結論。

(4) ∀x (A(x) → B) ⊢⊣ ∃x (A(x)) → B

(a) ∀x (A(x) → B) ⊢ ∃x (A(x)) → B

$$\dfrac{[\exists x\,(A(x))]_1 \quad \dfrac{[A(x)]_1 \quad \dfrac{\forall x\,(A(x) \to B)}{A(x) \to B}\ ①}{B}}{\dfrac{B}{\exists x\,(A(x)) \to B}\ ②}$$

(b) ∃x (A(x)) → B ⊢ ∀x (A(x) → B)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\exists x\,(A(x)) \to B \quad \dfrac{[A(x)]_1}{\exists x\,A(x)}}{B}}{A(x) \to B}\ ①}{\forall x\,(A(x) \to B)}$$

Process:①目標 A(x) → B の→左側仮定。②B が出る。⇒→導入。③∀導入。

(5) ∀x (A(x) ∧ B(x)) ⊢⊣ ∀x (A(x)) ∧ ∀ x (B(x))

(a) ∀x (A(x) ∧ B(x)) ⊢ ∀x (A(x)) ∧ ∀ x (B(x))

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\forall x\,(A(x) \land B(x))}{A(x) \land B(x)}}{A(x)}}{\forall x\,(A(x))} \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\forall x\,(A(x) \land B(x))}{A(x) \land B(x)}}{B(x)}}{\forall x\,(B(x))}}{\forall x\,(A(x)) \land \forall x\,(B(x))}$$

Process:

(b) ∀x (A(x)) ∧ ∀ x (B(x)) ⊢ ∀x (A(x) ∧ B(x))

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\forall x\,(A(x)) \land \forall x\,(B(x))}{\forall x\,(A(x))}}{A(x)} \quad \dfrac{\dfrac{\forall x\,(A(x)) \land \forall x\,(B(x))}{\forall x\,(B(x))}}{B(x)}}{A(x) \land B(x)}}{\forall x\,(A(x) \lor B(x))}$$

Process:

(6) ∀x (A(x) ∨ B(x)) × ⊣ ∀x (A(x)) ∨ ∀x (B(x))

(a) ∀x (A(x)) ∨ ∀x (B(x)) ⊢ ∀x (A(x) ∨ B(x))

$$\dfrac{\forall x\,(A(x)) \lor \forall x\,(B(x)) \quad \dfrac{\dfrac{[\forall x\,(A(x))]_1}{A(x)} \quad \dfrac{[\forall x\,(B(x))]_1}{B(x)}}{\forall x(A(x) \lor B(x))}}{\forall x\,(A(x) \lor B(x))\ ①}$$

Process:

(7) ∀x (A(x) → B(x)) ⊢ × ∀x (A(x)) → ∀x (B(x))

(a) ∀x (A(x) → B(x)) ⊢ ∀x (A(x)) → ∀x (B(x))

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\forall x\,(A(x) \to B(x))}{A(x) \to B(x)} \qquad \dfrac{\forall x\,(A(x))}{A(x)}}{B(x)}}{\forall B(x)}}{\forall x\,(A(x))}$$

存在量化子のスコープ

(1) ∃x (A(x) ∧ B) ⊢⊣ ∃x (A(x)) ∧ B

(a) ∃x (A(x) ∧ B) ⊢ ∃x (A(x)) ∧ B

$$\dfrac{\exists x\,(A(x) \wedge B) \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[A(x) \wedge B]_1}{A(x)}}{\exists x\,(A(x))} \qquad \dfrac{[A(x) \wedge B]_1}{B}}{\exists x\,(A(x)) \wedge B}}{\exists x\,(A(x)) \wedge B} \quad ①$$

Process:①∃除去のため A(x) ∧ B を仮定。②～結論。

(b) ∃x (A(x)) ∧ B ⊢ ∃x (A(x) ∧ B)

$$\dfrac{\dfrac{\exists x\,(A(x)) \wedge B}{\exists x\,(A(x))} \qquad \dfrac{\dfrac{[A(x)]_1 \qquad \dfrac{\exists x\,(A(x)) \wedge B}{B}}{A(x) \wedge B}}{\exists x\,(A(x) \wedge B)}}{\exists x\,(A(x) \wedge B)} \quad ①$$

Process:①∃x (A(x) ∧ B)から∃x (A(x)) 、B を出す。②∃除去で A(x)を仮定できるので、～結論。

(2) ∃x (A(x) ∨ B) ⊢⊣ ∃x (A(x)) ∨ B

(a) ∃x (A(x) ∨ B) ⊢ ∃x (A(x)) ∨ B

$$\dfrac{\exists x\,(A(x) \vee B) \qquad \dfrac{[A(x) \vee B]_2 \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[A(x)]_1}{\exists x\,(A(x))}}{\exists x\,(A(x)) \vee B} \qquad \dfrac{[B]_1}{\exists x\,(A(x)) \vee B}}{\exists x\,(A(x)) \vee B}}{\exists x\,(A(x)) \vee B} \quad ①}{\exists x\,(A(x)) \vee B}$$

Process:①わずらわしいが地道に∃除去&∨除去⇒∃導入&∨導入。

(b) ∃x (A(x)) ∨ B ⊢ ∃x (A(x) ∨ B)

$$\dfrac{\exists x\,(A(x)) \vee B \qquad \dfrac{\dfrac{[\exists x\,(A(x))]_2 \qquad \dfrac{\dfrac{[A(x)]_1}{A(x) \vee B}}{\exists x(A(x) \vee B)}}{\exists x(A(x) \vee B)} \; ① \qquad \dfrac{\dfrac{[B]_2}{A(x) \vee B}}{\exists x(A(x) \vee B)}}{\exists x(A(x) \vee B)}}{\exists x\,(A(x) \vee B)} \quad ②$$

Process: ∃導入などはなるべく早い段階でやったほうがいいらしい。

∃除去の際、量化子で束縛してから外に出さなければならない。

（内輪の名前は世の中に出してはいけない。）上はそのためにも役立つ。

(3) $\exists x\,(A \to B(x)) \vdash\dashv_{NK} A \to \exists x\,(B(x))$

(a) $\exists x\,(A \to B(x)) \vdash A \to \exists x\,(B(x))$

$$\dfrac{\exists x\,(A \to B(x)) \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[A \to B(x)]_2 \qquad [A]_1}{B(x)}}{\exists x\,(B(x))}}{A \to \exists x\,(B(x))}\ ①}{A \to \exists x\,(B(x))}\ ②$$

Process:

(b) $A \to \exists x\,(B(x)) \vdash_{NK} \exists x\,(A \to B(x))$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{A \to \exists x\,(B(x)) \quad [A]_2}{\exists x\,(B(x))} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[B(x)]_1}{A \to B(x)}}{\exists x\,(A \to B(x))} \quad [\neg\exists x\,(A \to B(x))]_3}{\bot}}{\bot}\ ①}{B(x)}}{A \to B(x)}\ ②$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{A \to B(x)}{\exists x\,(A \to B(x))} \quad [\neg\exists x\,(A \to B(x))]_3}{\bot}}{\neg\neg\exists x\,(A \to B(x))}\ ③}{\exists x\,(A \to B(x))}$$

Process:①いつも通り A 仮定⇒∃除去しようとする。②仮定 A が消せないことに気づく。③NK だから⊥を出してみる。④仮定 A を消すため B(x) を不条理則で出し⇒A → B(x)⑤あとは二重否定則に持っていけば結論。

(4) $\exists x\,(A(x) \to B) \vdash\dashv_{NK} \forall x\,(A(x)) \to B$

(a) $\exists x\,(A(x) \to B) \vdash \forall x\,(A(x)) \to B$

$$\dfrac{\exists x\,(A(x) \to B) \qquad \dfrac{\dfrac{A(x) \to B \qquad \dfrac{[\forall x\,(A(x))]_1}{A(x)}}{B}}{\forall x\,(A(x)) \to B}\ ①}{\forall x\,(A(x) \to B)}$$

Process:

(b) $\forall x(A(x)) \to B \vdash_{NK} \exists x(A(x) \to B)$

$[A(x)]_1 \quad [\neg A(x)]_2$

$\perp$

B

$A(x) \to B$ ①

$\exists x(A(x) \to B) \qquad [\neg\exists x(A(x) \to B)]_3$

$\perp$

$\neg\neg A(x)$ ②

$A(x)$

$\forall x(A(x)) \qquad \forall x(A(x)) \to B$

B

$A(x) \to B$

$\exists x(A(x) \to B) \quad [\neg\exists x(A(x) \to B)]_3$

$\perp$

$\neg\neg\exists x(A(x) \to B)$ ③

$\exists x(A(x) \to B)$

Process:①初めのほうで∀を出すと扱えない②とりあえずA(x)の仮定。③ここで不条理則。④→導入で

A(x) → Bとできることに気づけばあとは順々に。

(5) $\exists x(A(x) \wedge B(x)) \vdash \times\ \exists x(A(x)) \wedge \exists x(B(x))$

(a) $\exists x(A(x) \wedge B(x)) \vdash \exists x(A(x)) \wedge \exists x(B(x))$

$\exists x(A(x) \wedge B(x)) \quad | \quad A(x) \wedge B(x) \quad | \quad A(x) \wedge B(x)$

$A(x) \qquad B(x)$

$\exists x(A(x)) \qquad \exists x(B(x))$

$\exists x(A(x)) \wedge \exists x(B(x)$

$\exists x(A(x)) \wedge \exists x(B(x))$

Process:

(6) $\exists x(A(x) \vee B(x)) \vdash\dashv \exists x(A(x)) \vee \exists x(B(x))$

(a) $\exists x(A(x) \vee B(x)) \vdash \exists x(A(x)) \vee \exists x(B(x))$

$\exists x(A(x) \vee B(x)) \quad | \quad [A(x) \vee B(x)]_2 \quad | \quad [A(x)]_1 \qquad [B(x)]_1$

$\exists x A(x) \qquad \exists x B(x)$

$\exists x(A(x)) \vee \exists x(B(x)) \quad \exists x(A(x)) \vee \exists x(B(x))$

$\exists x(A(x)) \vee \exists x(B(x))$

$\exists x(A(x)) \vee \exists x(B(x))$ ①

$\exists x(A(x)) \vee \exists x(B(x))$ ②

Process:

(b) $\exists x(A(x)) \lor \exists x(B(x)) \vdash \exists x(A(x) \lor B(x))$

$\exists x(A(x)) \lor \exists x(B(x))$ | $[\exists x(A(x))]_3$ $[A(x)]_1$ | $[\exists x(B(x))]_3$ $[B(x)]_2$

$A(x) \lor B(x)$ $A(x) \lor B(x)$

$\exists x(A(x) \lor B(x))$ $\exists x(A(x) \lor B(x))$

$\exists x(A(x) \lor B(x))$ ① $\exists x(A(x) \lor B(x))$ ②

$\exists x(A(x) \lor B(x))$

$\exists x(A(x) \lor B(x))$ ③

Process:存在量化子で束縛してから外に出すこと。

(7) $\exists x(A(x) \to B(x))$ × NK$\dashv$ $\exists x(A(x)) \to \exists x(B(x))$

(a) $\exists x(A(x)) \to \exists x(B(x)) \vdash$NK $\exists x(A(x) \to B(x))$

$[A(x)]_2$ | $[B(x)]_1$

$\exists x(A(x))$ $\exists x(A(x)) \to \exists x(B(x))$ | $A(x) \to B(x)$

$\exists x(B(x))$ | $\exists x(A(x) \to B(x))$ $\neg\exists x(A(x) \to B(x))$

$\bot$

$\bot$ ①

$B(x)$

$A(x) \to B(x)$ ②

$\exists x(A(x) \to B(x))$ $[\neg\exists x(A(x) \to B(x))]_3$

$\bot$

$\neg\neg\exists x(A(x) \to B(x))$ ③

$\exists x(A(x) \to B(x))$

Process:①A(x)仮定⇒∃x (B(x))②∃除去。③あとはごたごた。

<u>多重量化</u>

は、割愛。w　場合が多くて扱いきれません。

２００２年問題

Ｉ．次の帰結関係について、その証明図を書け。

（３）だけは、「├NK」とある通り、二重否定則を使うが（排中律の使用は原則として避ける）、それ以外の問題は、必ずＮＪの範囲内でやる。

（なお「Ａ」「Ｂ」等のローマ・アルファベット大文字は、もちろんいずれも任意の論理式を代理する。また「Φ(x)」「Ψ(y,z)」等は、括弧内に提示されている変項以外、一切自由変更を含んでいないと考えてよい。）

（１）Ａ→（Ｂ→Ｃ）├ ¬Ｃ→（Ａ→¬Ｂ）

（２）Ａ→Ｃ、Ｂ→Ｄ ├ ¬（Ｃ∨Ｄ）→¬（Ａ∨Ｂ）

ヒント：Ａ∨Ｂ、¬（Ｃ∨Ｄ）を仮定することはすぐ判る。まずＡ∨Ｂについて∨の除去則を使う。

（３）（¬Ａ→Ｂ）→¬Ａ ├NK （¬Ｃ→Ａ）→Ｃ

ヒント：¬Ｃ→Ａ、¬Ｃを仮定することは当然だが、他にＡ、¬Ａを仮定する。まずこの後二者を使い、問題の元々の前提（（¬Ａ→Ｂ）→¬Ａ）と組み合わせて、この前提の「後件」部分を導き出す。

（その際、既に使った仮定が生き残らないよう、きちんと消しておく）他方、残りの２つの仮定（¬Ｃ→Ａと¬Ｃ）から帰結を導き、いまの結果と組み合わせる。その後、１度だけ二重否定則を使ってから、最後まで生き残っている仮定を外す。

（４）∀x∀y（（Φ(x)∧Ψ(y)）→ Ω(x,y)），∀x（∀y（Ψ(y)→Ω(x,y)）→ Θ(x)）

├ ∀x（Φ(x)→Θ(x)）

ヒント：適当な変項u とw を取って、Φ(u)とΨ(w)を仮定する。問題自身の２つの前提に対して、∀の除去則を適宜適用して演繹を進めると、結局、仮定としてΦ(u)だけを残しながら、Θ(u)を導けることが判る。後は通常通り、∀の導入則を正しく運用する。

（５）∀x∀y（Φ(x,y)→Φ(y,x)），∀x∀y∀z（（Φ(x,y)∧Φ(y,z)）→Φ(x,z)）

├ ∀x（∃yΦ(x,y) → Φ(x,x)）

ヒント：適当な変更u を取って、∃yΦ(u,y)を仮定し、∃の除去則を使う。

（６）∀y∃x（ y＝f(x)） ├ ∀x（ g(f(x)) ＝ h(f(x))）→ ∀x（ g(x) ＝ h(x)）

ヒント：これは、全射f の基本性質を述べた定理として非常に重要。∀x（ g(f(x)) ＝ h(f(x))）を仮定するわけだが、まず初めに、適当な変項u を取って、問題の前提に∀の除去則を適用し、∃x（u＝f(x)）を導いておく。その上で、∃の除去則を適用して、サブ・プルーフに入る。終わりの方で∀の導入則を適用するが、これをどのステップで行うか

に留意すること。
Ⅱ．半順序集合Ｐ（=<Ｐ，≦>）と、その任意の部分集合Ｓ（⊆Ｐ）を考える。
以下、x，y，z 等の変項は、いつでもＰのメンバーを表すものと前提してよい。
∀y（ y∈Ｓ → y≦x ）となるような（つまりＳのどのメンバーと比べても、それ「以上」あるような）x たちの集合を「Ｓの上界」と呼び、「Ｕ(Ｓ)」で表す。x ∈ Ｕ(Ｓ) となるための必要十分条件は、
[＃] ∀y（ y∈Ｓ → y≦x ）
である。
更に、Ｕ(Ｓ)に最小のメンバー a が存在する場合、このような a を「Ｓの上限」と呼ぶ。a がＳの上限であるための必要十分条件は、次の通り。（なお「Ａ←→Ｂ」とは「（Ａ→Ｂ）∧（Ｂ→Ａ）」の略記であるが、以下、そのまま用いてよい）
[＊] ∀x（ x∈Ｕ(Ｓ) ←→ a≦x ）
この[＊]は、上の[＃]を用いて「Ｕ」を含まない形に書き換えると、次のようになる。
[%] ∀x（∀y（ y∈Ｓ → y≦x ） ←→ a≦x ）
更に、以上と類比的に、∀y（ y∈Ｓ → x≦y ）となるような（Ｓのどのメンバーと比べても、それ「以下」であるような）x たちの集合を考えることができる。この集合を「Ｓの下界」と呼び、「Ｌ(Ｓ)」で表す。
x∈Ｌ(Ｓ) となるための必要十分条件は、次の通り。
[￥] ∀y（ y∈Ｓ → x≦y ）
Ｌ(Ｓ)に最大のメンバー b が存在する場合、このような b を「Ｓの下限」と呼ぶ。b がＳの下限であるための必要十分条件は、次の通り。
[＄] ∀x（ x∈Ｌ(Ｓ) ←→ x≦b ）
（1）式［＄］を、「Ｌ」を含まない形に書き換えよ。
（2）Ｕ(Ｓ)の下界、つまりＬ(Ｕ(Ｓ)) を考える。このとき w∈Ｌ(Ｕ(Ｓ)) となるための必要十分条件を、[＃]及び[￥]を参考に、「Ｌ」も「Ｕ」も用いずに書け。
（3）c がＬ(Ｕ(Ｓ))の最大のメンバー（つまりＵ(Ｓ)の下限）であるための必要十分条件を、[%]と（1）の回答を参考にして、「Ｌ」も「Ｕ」も用いずに書け。
（4）もしもＵ(Ｓ)の下限が存在するならば、実はそれは同時にＳの上限でもある。このことを「Ｌ」も「Ｕ」も用いずに書け。（いかなるｖについても、もしもｖがＵ(Ｓ)の下限

としての必要十分条件を満たすなら
ば、ｖはＳの上限としての必要十分条件をも満たす、と考える）
Ⅲ．ＮＪないしＮＫを用いて、何らかの興味ある論証－－例えばペアノ算術や
ＺＦ集合論などの定理の証明－－を
構成せよ。（そうでなければ、記号論理の意義について考えるところを述
べよ）

２００２年解答

Ｉ

(1)$A \to (B \to C) \vdash \neg C \to (A \to \neg B)$

$[A]_2 \qquad A \to (B \to C)$

$B \to C \qquad [B]_1$

$C \qquad [\neg C]_3$

$\bot$

$\neg B$ ①

$A \to \neg B$ ②

$\neg C \to (A \to \neg B)$ ③

Process:①とりあえず前提を崩してみる。②¬C を仮定して⊥を導けば後はうまくいく。

(2) $A \to C$、$B \to D \vdash \neg (C \vee D) \to \neg (A \vee B)$

$[A \vee B]_2$ | $[A]_1 \quad A \to C$ / C / $C \vee D$ | $[B]_1 \quad B \to D$ / D / $C \vee D$

$C \vee D$ ① $\qquad [\neg(C \vee D)]_3$

$\bot$

$\neg(A \vee B)$ ②

$\neg(C \vee D) \to \neg(A \vee B)$

Process:①A → C、B → D があるから A ∨ B を仮定して→除去。（結論には¬が付いているから、いつもと逆の結論の→の右側仮定でもいけるのかなぁと思いつつ。）するとうまくいってしまった。

(3) $(\neg A \to B) \to \neg A \vdash_{NK} (\neg C \to A) \to C$

$[\neg C \to A]_3 \qquad [\neg C]_2$

$A \qquad [\neg A]_1$

$\bot$

B

$\neg A \to B$ ① $\qquad (\neg A \to B) \to \neg A$ | $[\neg C \to A]_3 \qquad [\neg C]_2$

$\neg A \qquad A$

$\bot$

$\neg\neg C$ ②

C

$(\neg C \to A) \to C$ ③

Process:①結論の→右側¬C → A、¬C から A を出す。②前提を使うには、¬A を仮定して不条理則から B を出せばよい。③あとは順々に。

(4) $\forall x \forall y\ ((A(x) \wedge B(y)) \rightarrow C(x,y))$, $\forall x\ (\forall y\ (B(y) \rightarrow C(x,y)) \rightarrow D(x)) \vdash \forall x\ (A(x) \rightarrow D(x))$

$[A(u)]_2$ $[B(w)]_1$ | $\forall x \forall y((A(x) \wedge B(y)) \rightarrow C(x,y))$ | $\forall x(\forall y(B(y) \rightarrow C(x,y)) \rightarrow D(x))$

$A(u) \wedge B(w)$ | $\forall y((A(u) \wedge B(y)) \rightarrow C(u,y))$ | $\forall y(B(y) \rightarrow C(u,y)) \rightarrow D(u)$

$A(u) \wedge B(w) \rightarrow C(u,w)$

$C(u,w)$

$B(w) \rightarrow C(u,w)$ ①

$\forall y(B(y) \rightarrow C(u,y))$

$D(u)$

$A(u) \rightarrow D(u)$ ②

$\forall x\ (A(x) \rightarrow D(x))$

Process:①２つ目の前提はxしか∀除去できないから、１つ目の前提をまず考える。⇒A(u)、B(w)を仮定する。②うまくやればうまくいく。

(5) $\forall x \forall y\ (A(x,y) \rightarrow A(y,x))$, $\forall x \forall y \forall z\ ((A(x,y) \wedge A(y,z)) \rightarrow A(x,z)) \vdash \forall x\ (\exists y A(x,y) \rightarrow A(x,x))$

$[\exists y A(u,y)]_2$ | $[A(u,y)]_1$ $\forall x \forall y(A(x,y) \rightarrow A(y,x))$ | $\forall x \forall y \forall z((A(x,y) \wedge A(y,z)) \rightarrow A(x,z))$

$\forall y(A(u,y) \rightarrow A(y,u))$ | $\forall y \forall z((A(u,y) \wedge A(y,z)) \rightarrow A(u,z))$

$A(u,y) \rightarrow A(y,u)$ | $\forall z((A(u,y) \wedge A(y,z)) \rightarrow A(u,z))$

$A(y,u)$ $[A(u,y)]_1$ | $(A(u,y) \wedge A(y,u)) \rightarrow A(u,u)$

$A(u,y) \wedge A(y,u)$

$A(u,u)$

$A(u,u)$ ①

$\exists y A(u,y) \rightarrow A(u,u)$ ②

$\forall x(\exists y A(x,y) \rightarrow A(x,x))$

Process:

(6) $\forall y \exists x\ (y = f(x)) \vdash \forall x\ (g(f(x)) = h(f(x))) \rightarrow \forall x\ (g(x) = h(x))$

$\forall y \exists x(y=f(x))$ $[u=f(x)]_1$ $\forall x(g(f(x))=h(f(x)))$

$\exists x(u=f(x))$ $g(f(x)=h(f(x))$

$g(u)=h(u)$

$\forall x(g(x)=h(x))$

$\forall x(g(x)=h(x))$ ①

Process:∀導入の位置に注意。

Ⅱ

(1) $\forall x\ (\forall y\ (y \in S \rightarrow x \leqq y) \longleftrightarrow x \leqq b)$

(2) $\forall x\ (\forall y\ (y \in S \rightarrow y \leqq x) \rightarrow w \leqq x)$

(3) $\forall w\ (\forall x\ (\forall y\ (y \in S \rightarrow y \leqq x) \rightarrow w \leqq x)) \longleftrightarrow w \leqq c$

(4) $\forall w\ (\forall x\ (\forall y\ (y \in S \rightarrow y \leqq x) \rightarrow w \leqq x) \longleftrightarrow w \leqq v) \vdash \forall x\ (\forall y\ (y \in S \rightarrow y \leqq x) \longleftrightarrow v \leqq x)$ を示せばよい。以下略。入りきりません。