数理科学Ⅱ（坂井）　解答

＊過去問が渡されているはずなので問題は省きます。

問１　（チェビシェフの方程式）

解）解がべき級数の形、つまり z=0 の周りで $w=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ と書けると仮定する。

これを代入して、

$$(1-z^2)\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n z^{n-2} - \sum_{n=0}^{\infty} n a_n z^n + \alpha^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = 0$$

$$\therefore \sum_{n=2}^{\infty}\{n(n-1)a_n + (\alpha-n+2)(\alpha+n-2)a_{n-2}\}z^{n-2} = 0$$

$$\therefore a_n = -\frac{(\alpha-n+2)(\alpha+n-2)}{n(n-1)}a_{n-2} \quad (n\geq 2)$$

n の偶奇で場合分けをする。

（ｉ）$n = 2m\ (m \geq 1)$ のとき

$$a_{2m} = (-1)^m \frac{\prod_{j=0}^{m-1}(\alpha-2j)\prod_{j=0}^{m-1}(\alpha+2j)}{(2m)!}a_0$$

（ⅱ）$n = 2m+1 (m \geq 1)$ のとき

$$a_{2m+1} = (-1)^m \frac{\prod_{j=0}^{m-1}(\alpha-2j-1)\prod_{j=0}^{m-1}(\alpha+2j+1)}{(2m+1)!}a_1$$

$(a_0, a_1) = (1,0)$ の解を w_0，$(a_0, a_1) = (0,1)$ の解を w_1 とすれば

求める一般解は任意定数 $c_0, c_1 (\in \mathbb{R})$ を用いて、

$\boxed{w=c_0 w_0 + c_1 w_1}$

ただし

$$w_0 = 1 + \sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m \frac{\prod_{j=0}^{m-1}(\alpha-2j)\prod_{j=0}^{m-1}(\alpha+2j)}{(2m)!}z^{2m}$$

$$w_1 = t + \sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m \frac{\prod_{j=0}^{m-1}(\alpha-2j-1)\prod_{j=0}^{m-1}(\alpha+2j+1)}{(2m+1)!}z^{2m+1}$$

である。

収束半径は、r=1

これは例えば偶数次の項であれば、

$$r=\lim_{m\to\infty}\left|\frac{a_{2n}}{a_{2n+2}}\right| = \lim_{m\to\infty}\left|\frac{(2m+2)(2m+2)}{(\alpha-2m)(\alpha+2m}\right| = 1$$

のようにして求まる。

奇数次の項も同様に r=1 であるから、<u>収束半径は１</u>

問２

（１）$(1+x)\frac{d^2x}{dt^2}+(\frac{dx}{dt})^2=0$

これは、自励系なのでｘを独立変数と見て計算します。

$\frac{dx}{dt}$＝y とおくと $\frac{d^2x}{dt^2}=y\frac{dy}{dx}$ となるのでこれらを代入して、

$(1+x)\,y\frac{dy}{dx}+y^2=0$

$y\{(1+x)\frac{dy}{dx}+y\}=0$

$\therefore$ $y=0$ or $(1+x)\frac{dy}{dx}+y=0$

(ⅰ)y=0 のとき

$\frac{Dx}{dt}=0$ $\therefore x=C$ (任意定数)

(ⅱ) $(1+x)\frac{dy}{dx}+y=0$

変数分離して計算すると

$y=\frac{C_0}{1+x}$

もう一度変数分離して

$(1+x)dx=C_0dt$

$x+\frac{1}{2}x^2=C_0t+C_1$

$\therefore$ $x=-1\pm\sqrt{1+C_0t+C_1}$ (C_0 C_1は任意定数)

（２）この問題はノートにあります。

$t^3\frac{d^2x}{dt^2}=(x-t\frac{dx}{dt})^2$

x=ty とおくと

$\frac{dx}{dt}=y+t\frac{dy}{dt}$ $\qquad$ $\frac{d^2x}{dt^2}=2\frac{dy}{dt}+t\frac{d^2y}{dt^2}$

これらを代入して整理すると

$2\frac{dy}{dt}+t\frac{d^2y}{dt^2}=t(\frac{dy}{dt})^2$

これはｔに関して同次（－１次）なので、

$t=e^{\tau}$とおくと

$\frac{dy}{dt}=e^{-\tau}\frac{dy}{d\tau}$　　　$\frac{d^2y}{dt^2}=e^{-2\tau}(\frac{d^2y}{d\tau^2}-\frac{dy}{d\tau})$

これらを代入して整理すると、

$\frac{d^2y}{d\tau^2}+\frac{dy}{d\tau}=(\frac{dy}{d\tau})^2$　　・・・（＊）

ここから先は(ｉ)y を陽に含まないとみるか(ⅱ)x を陽に含まないと見るかの２通りのやり方がありいずれも最終的な答えは、

$x=t\log\frac{t}{C_1-C_0t}$ となる。(これは x=Ct も含む)

（３）この問題は（２）でいう（＊）（というかもう少し先）までは解法が全く同じなので省きます。

$(y+1)\left(\frac{d^2y}{d\tau^2}+\frac{dy}{d\tau}\right)=(\frac{dy}{d\tau})^2$

$\frac{dy}{d\tau}=p$ とおくと $\frac{d^2y}{d\tau^2}=p\frac{dp}{dy}$

これらを代入して、

$p\{(y+1)\left(\frac{dp}{dy}+1\right)-p\}=0$

$p=0$ or $(y+1)\left(\frac{dp}{dy}+1\right)-p=0$

(ｉ)p=0 のとき　y=C $\therefore x=Ct$

(ⅱ) $(y+1)\left(\frac{dp}{dy}+1\right)-p=0$ のとき

$\frac{dp}{dy}-\frac{p}{y+1}=-1$

これは一階線形微分方程式なので

$p=e^{-\int^y-\frac{dz}{z+1}}(\int^y-e^{\int^z-\frac{dw}{w+1}}dz+C_0)$

これを計算して

$\frac{dy}{d\tau}=-(y+1)\log\ C_1(y+1)$

変数分離により

$\frac{1}{C_1}\log\{\log C_1(y+1)\}=-\log\frac{t}{C_2}$

$\therefore\ x=t(C_0e^{(\frac{C}{t})^c}-1)$
となる。(任意定数はごちゃごちゃなので無視してください)

問３

（い）略（ノート参照）

（ろ）

1.与えられた微分方程式は

$D^2(D+1)^3x=0$ となるので

重ね合わせの原理より、

$x=C_1+C_2t+C_3e^{-t}+C_4te^{-t}+C_5e^{-t}$

2.与えられた微分方程式が斉次の場合(つまり tcost=0 のとき)の一般解は上と同様に

$x=C_1+C_2e^{-t}$

次に非斉次の場合の特殊解をもとめる。やり方はたくさんあるけど、ここでは未定係数法を用いる。

非斉次の場合の解の形が$x^*=(at+b)\cos t+(ct+d)\sin t$ の形をしているとする。これを微方程式に代入して、係数比較により求める。

計算すると、$(a,b,c,d)=(-\frac{1}{2},1,\frac{1}{2},\frac{1}{2})$となるので特殊解$x^*$は

$$x^*=\left(-\frac{1}{2}t+1\right)\cos t+\left(\frac{1}{2}t+\frac{1}{2}\right)\sin t$$

となるので一般解は、

$$x=C_1+C_2e^{-t}+\left(-\frac{1}{2}t+1\right)\cos t+\left(\frac{1}{2}t+\frac{1}{2}\right)\sin t$$

問４

(い)外積は

$$\mathbf{x}\times\mathbf{b}=\begin{pmatrix}x_2b_3-x_3b_2\\x_3b_1-x_1b_3\\x_1b_2-x_2b_1\end{pmatrix} \text{ であるから }\quad A=\begin{pmatrix}0&b_3&-b_2\\-b_3&0&b_1\\b_2&-b_1&0\end{pmatrix}$$

となる。

以下$|\mathbf{b}|^2=\rho$　$|\mathbf{b}|=b=\sqrt{{b_1}^2+{b_2}^2+{b_3}^2}$として、　$A^3=-\rho A$であることを用いる。

$$\exp(tA)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(tA)^n}{n!}=E+A\left(t-\frac{\rho t^3}{3!}+\frac{\rho^2t^5}{5!}-\cdots\right)+A^2\left(\frac{t^2}{2!}-\frac{\rho t^4}{4!}+\frac{\rho^2t^6}{6!}-\cdots\right)$$

$$=E+\frac{A}{b}\left(bt-\frac{(bt)^3}{3!}+\frac{(bt)^5}{5!}-\cdots\right)+\frac{A^2}{b^2}\left(\frac{(bt)^2}{2!}-\frac{(bt)^4}{4!}+\frac{(bt)^6}{6!}-\cdots\right)$$

$$=E+\frac{A}{b}\sin bt+\frac{A^2}{b^2}(1-\cos bt)$$

これ以上は簡単にならないので、やめときます。勝手に当てはめて計算して下さい。

（ろ）解は

$x=\exp(tA)\mathbf{C}$　$\mathbf{C}$ は任意の定ベクトル。

（は）この微分方程式は非斉次であるので、特殊解が一つ見つかればよい、と考えて方程式の形から解は特殊解は定ベクトルとなると考えて解いたのですが、A は逆行列をもたないので解けませんでした。

ということで定数変化法で解きます。

解が、$x=\exp(tA)\mathbf{C}(t)$の形をしているとする。これを題意の微分方程式に代入すると、

$$C(t)=\int^{t}\exp(-\tau A)\mathbf{e}d\tau+\mathbf{D}$$

$$\therefore x(t)=\exp(tA)\left\{\int^{t}\exp(-\tau A)\mathbf{e}d\tau+\mathbf{D}\right\}$$

ここで、これにはてはめて計算すると、

$$x(t)=\left\{\left(E+\frac{A^2}{b^2}\right)t+\frac{A}{b^2}\right\}\mathbf{e}+\exp(tA)\,\mathbf{D}\quad（$$

となる。

この計算を行う際は、まず $\exp(tA)\cdot\int^{t}\exp(-\tau A)d\tau$　を計算するというところに注意しましょう。

コメント

最後にテスト前に確認しておきたいことを書きます・

①べき級数による解法

②求積法

・自励系とか同次形の解法

・１階線形微分方程式の解法

・斉次・非斉次の高階線形微分方程式の解法

③行列の指数関数による連立微分方程式の解き方

では、テスト頑張りましょう！