線型代数とは、ベクトルの性質を調べる分野である。

ベクトルとは？　・平面上の矢印　・空間内 〃　　⊙矢印は長さと向きをもっている。

⊙ たし算

$$\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1+x_2\\y_1+y_2\end{pmatrix}$$

空間も同様

⊙ スカラー倍

$2\times$ ↑ $=$ ↑　　$(-2)\times$ ↑ $=$ ↓

$$k\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}kx\\ky\end{pmatrix}$$

空間も同様

一般のベクトルは n 個の数を縦に並べたもの

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$$

これを n 次元ベクトルという

⊙ 成分ごとのたし算

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1+y_1\\x_2+y_2\\\vdots\\x_n+y_n\end{pmatrix}$$

成分ごとのスカラー倍

$$k\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}kx_1\\kx_2\\\vdots\\kx_n\end{pmatrix}$$

を考えることで、n 次元ベクトル全体にたし算、スカラー倍という演算が定義される。このように演算込みで考えた n 次元ベクトル全体を n 次元ベクトル空間という。

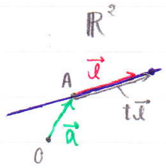
・平面上の直線

$\vec{v}=\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$　平面上のベクトル（2次元ベクトル）

$A:\begin{pmatrix}p\\q\end{pmatrix}$　$\mathbb{R}^2$ 内の点 → xy 平面

左辺を右辺で定義

$\vec{a}:=\overrightarrow{OA}=\begin{pmatrix}p\\q\end{pmatrix}$



$\vec{v}$ に平行で A を通る直線はパラメータ t を使って

$\vec{a}+t\vec{v}$ と書くことができる。

これを座標 $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ を使って書こう。

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}p\\q\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}\quad\therefore\begin{cases}x=at+p\\y=bt+q\end{cases}$$

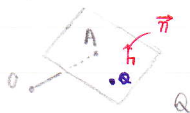
これからパラメータ t を消去すれば、$\boxed{bx-ay=d}$ が得られる。

逆に任意の1次式 $\alpha x+\beta y+\gamma=0$ は一般に平面上の直線を表す。

・空間内の平面

☆ある点を通り、あるベクトルに直交する平面

$A:=\begin{pmatrix}p\\q\\r\end{pmatrix}$ を通り、ベクトル $\vec{n}:=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ に直交する平面は次のように表される。



平面 P

$Q:\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$

$Q\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ を P 上の点とすると、$\overrightarrow{AQ}\perp\vec{n}$ となる

$\overrightarrow{AQ}=\begin{pmatrix}x-p\\y-q\\z-r\end{pmatrix}$　$\vec{n}=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ だから

$(\overrightarrow{AQ}\cdot\vec{n})=0$ より

$a(x-p)+b(y-q)+c(z-r)=0$ となる。

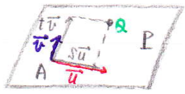
よって、P の方程式は $ax+by+cz+d=0$ となる。$(d=-ap-bq-cr)$

逆に x,y,z の一次式は一般に $\mathbb{R}^3$ 内（xyz 空間）の平面を表す。

No.

DATE

☆ ある点を通り、2つのベクトルに平行な平面



Aを通りベクトル $\vec{u}$ と $\vec{v}$ に平行な平面

$\overrightarrow{AQ} = s\vec{u} + t\vec{v}$ となる実数 s と t が存在する。

$A = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}$　$\vec{u} = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix}$、$\vec{v} = \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix}$　$Q = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ とすると、

$\overrightarrow{AQ} = \begin{pmatrix} x-p \\ y-q \\ z-r \end{pmatrix}$ だから、$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix}$ のように

2つのパラメータ s, t を用いて表すことができる。

この式(3つ)から s, t を消去して、一つの式にすることもできるが、

それは x, y, z に関する一次式である。

◎ 平面内の直線　(自由度)　(不自由度)

パラメータは1つ、式は1つ

◎ 空間内の平面

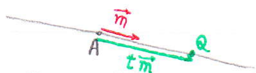
パラメータは2つ　式は1つ

◎ 空間内の直線

パラメータは1つ、式は2つ

実際に空間内の直線は2つの平面の交わりで表される。(一次式が2つ)

点Aを通り、ベクトル $\vec{m}$ に平行な直線



$\overrightarrow{AQ} = t\vec{m}$ となる。

$A := \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}$　$\vec{m} := \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$、$Q := \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ とすると、$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

この3つの式(各成分ごとに等式が1つ)からパラメータ t を消去すると、

$(t =)\ \boxed{\dfrac{x-p}{a} = \dfrac{y-q}{b} = \dfrac{z-r}{c}}$ が得られる。

注意 □ は等式が2つあることに注意。

それぞれの等式は平面を表すので、この式は2つの平面の交わりを表している。

4/20(火)　平面の線型変換

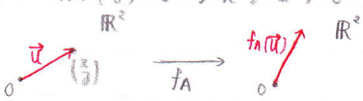
2×2行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ の図形的意味

Aは平面から平面への写像 f_A を次のように定める。

点 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ に対し、$f_A\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix}$

これは、実は行列Aを左からかけた式 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ と一致している。

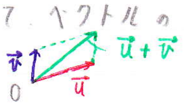
注意　点 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ と考えるよりもベクトル $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ とみなした方がわかりやすい。



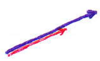
よって、f_A は平面上のベクトルを平面上のベクトルに移す。

$\vec{u} := \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$　$f_A(\vec{u}) := f_A\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix}$

f_A によってベクトルの和やスカラー倍はどのように移されるか考える。



$\vec{u} := \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$、$\vec{v} := \begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix}$ なら　$\vec{u}+\vec{v} = \begin{pmatrix} x+z \\ y+w \end{pmatrix}$



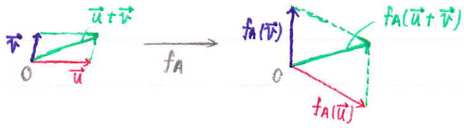
$\lambda\vec{u}$ は長さが $|\lambda||\vec{u}|$ で方向が同じ($\lambda>0$)か逆($\lambda<0$)であるベクトル

$\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ のとき、$\lambda\vec{u} = \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{pmatrix}$

☆ $f_A(\vec{u}+\vec{v})$ を計算する

$$f_A(\vec{u}+\vec{v}) = f_A\begin{pmatrix}x+z\\y+w\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a(x+z)+b(y+w)\\c(x+z)+d(y+w)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}ax+by\\cx+dy\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}az+bw\\cz+dw\end{pmatrix} = f_A(\vec{u})+f_A(\vec{v})$$

$$f_A(\vec{u}+\vec{v}) = f_A(\vec{u})+f_A(\vec{v})$$



☆ $f_A(\lambda\vec{u})$ を計算する

$$f_A(\lambda\vec{u}) = f_A\left(\lambda\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right) = f_A\begin{pmatrix}\lambda x\\\lambda y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a\lambda x+b\lambda y\\c\lambda x+d\lambda y\end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix}ax+by\\cx+dy\end{pmatrix} = \lambda f_A(\vec{u})$$

定義

(i) $f_A(\vec{u}+\vec{v}) = f_A(\vec{u})+f_A(\vec{v})$

(ii) $f_A(\lambda\vec{u}) = \lambda f(\vec{u})$ （写像の性質）

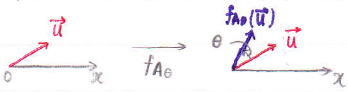
上の(i),(ii)を合わせて、f_Aの線型性という。

線型性をもつ$\underbrace{\text{写像}}_{\text{今の場合は}\mathbb{R}^2\text{から}\mathbb{R}^2\text{への写像}}$を$\overset{\text{linear}}{\text{線型}}$写像という。
一次線型

特に定義域と値域が同じ線型写像を線型変換という。（教科書P.14とは定義が違う）

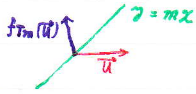
平面上の線型変換の例

◎ 回転　$A_\theta := \begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$ のとき、対応する線型変換 f_{A_θ} は原点のまわりのθ回転である。



鏡映　直線 $y=mx$ に関する折り返し

$T_m = \dfrac{1}{1+m^2}\begin{pmatrix}1-m^2 & 2m\\ 2m & -1+m^2\end{pmatrix}$ とおくと、対応する線型変換は直線 $y=mx$ に関する折り返しになる。



例. $m=1$ のとき、$T_1 = \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$ より $f_{T_1}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}y\\x\end{pmatrix}$ となり、これは $y=x$ についての折り返し。

$m=0$ のとき、x軸についての折り返し。

$m=\infty$ のとき、$(m\to\infty)$　$T_\infty = \begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix}$ となり、$f_{T_\infty}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-x\\y\end{pmatrix}$ となり、y軸についての折り返し。

以上の2つはともに合同変換（長さと角度を保つ）の例である。

合同変換でない線型変換も多くある。

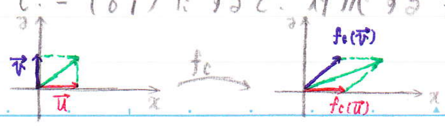
$\boxed{\text{拡大・縮小}}$　$B_\lambda := \begin{pmatrix}\lambda&0\\0&\lambda\end{pmatrix}$ に対応する線型変換

$f_{B_\lambda}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\lambda x\\\lambda y\end{pmatrix}$ だから、これはλ倍の拡大である。（$|\lambda|<1$ のときは縮小）

$\lambda<0$ なら向きが逆（裏返し）

その他

$C := \begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$ にすると、対応する線型変換は次のようになる。



$\vec{u}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\ \vec{v}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

一般のベクトル $\vec{a} := \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ は、

$\vec{a} = x\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = x\vec{u}+y\vec{v}$ とかけるので、

f_Cの線型性により、$f_C(\vec{a}) = xf_C(\vec{u})+yf_C(\vec{v})$ となる。

No.

DATE

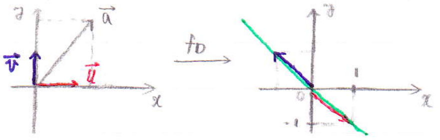
これから、任意のベクトルの行き先が $f_C(\vec{u})$ と $f_C(\vec{v})$ だけで記述できることがわかる。

<u>退化する場合</u>

例：$D := \begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$ とし、f_D がどのような線型変換になるかを調べる

$f_D\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x-y\\ -x+y\end{pmatrix}$ となり、$\begin{pmatrix}x-y\\ -x+y\end{pmatrix}$ は常に直線 $y=-x$ 上にあることがわかる。

平面全体が直線に移される。



4/27(火)

P.26 第2章 行列と連立一次方程式

§2.1 数ベクトルと演算

以下現れる数は実数とするが、複素数でも同じようなことが成立する。

☆ 数ベクトル

n個の数を縦に並べたものをn次元ベクトルという。

$\vec{x} := \begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$ ベクトルの成分(要素)

x_i のことを第i成分

☆ n次元ベクトル全体のなす集合のことをn次元実(複素)ベクトル空間といい、

$\mathbb{R}^n$ とかく。 $\mathbb{C}^n$

要素がすべて複素数

☆ n次元ベクトル空間における演算

◎ 和

n次元ベクトル $\vec{u} := \begin{pmatrix}u_1\\ \vdots\\ u_n\end{pmatrix}$, $\vec{v} := \begin{pmatrix}v_1\\ \vdots\\ v_n\end{pmatrix}$ に対し、その和 $\vec{u}+\vec{v}$ を

$\vec{u}+\vec{v} := \begin{pmatrix}u_1+v_1\\ u_2+v_2\\ \vdots\\ u_n+v_n\end{pmatrix}$ で定義する。つまり、成分ごとの和でベクトルの和を定義する。

◎ スカラー倍

$\begin{cases} \vec{u} := \begin{pmatrix}u_1\\ u_2\\ \vdots\\ u_n\end{pmatrix} : n次元ベクトル \\ k \in \mathbb{R}\ (実数) \end{cases}$

このとき、スカラー倍 $k\vec{u}$ を $k\vec{u} := \begin{pmatrix}ku_1\\ ku_2\\ \vdots\\ ku_n\end{pmatrix}$ で定義する。

つまり、各成分をk倍することで定義する。

☆ 基本単位ベクトル

集合に含まれるもの(要素ともいう)

n次元ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ の中で次のような元 $\vec{e_1}, \vec{e_2} \cdots \vec{e_n}$ を考える。

$\vec{e_1} = \begin{pmatrix}1\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}$ $\vec{e_2} = \begin{pmatrix}0\\ 1\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}$ $\cdots$ $\vec{e_i} = \begin{array}{c}\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 1\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}\end{array}$ i番目 $\cdots$ $\vec{e_n} = \begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$

($\vec{e_i}$ は第i成分が1で他は0)

$\boxed{\vec{e_i} \text{ を第i基本(単位)ベクトルという}}$

◎ 基本単位ベクトルのもつ性質

(i) 任意のn次元単位ベクトルは、基本単位ベクトルの1次結合でかける。

任意のベクトル $\vec{x}$ に対して、

つまり、ある実数 $\lambda_1, \lambda_2 \cdots \lambda_n$ を選んで、$\vec{x} = \lambda_1\vec{e_1} + \lambda_2\vec{e_2} + \cdots + \lambda_n\vec{e_n}$ とできる。

この形で書けるベクトルを $\{\vec{e_1}, \vec{e_2} \cdots \vec{e_n}\}$ の1次結合という。

証明　$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ とする

$\lambda_1 := x_1,\ \lambda_2 := x_2 \cdots,\ \lambda_n := x_n$ とおけば

$\vec{x} = \lambda_1\vec{e_1} + \lambda_2\vec{e_2} + \cdots + \lambda_n\vec{e_n}$ となる（証明終）

(ii) $\{\vec{e_1}, \vec{e_2} \cdots \vec{e_n}\}$ は一次独立である。

定義（一次独立、線型独立）

。一次従属の定義

k個のベクトル $\{\vec{v_1}, \vec{v_2} \cdots \vec{v_k}\}$ は次の条件をみたすとき一次従属という。

すべてが0ではないようなk個の実数 $\mu_1, \mu_2 \cdots \mu_k$ が存在して、
$\mu_1\vec{v_1} + \mu_2\vec{v_2} + \cdots + \mu_k\vec{v_k} = \vec{0}$ となる。
ただし、$\vec{0} := \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ である。

注意

$\{\vec{v_1}, \vec{v_2} \cdots \vec{v_k}\}$ が一次従属なら、あるベクトル（たとえば $\vec{v_i}$）は他のベクトルの一次結合で表される。

証明

一次従属性より、※ $\boxed{\mu_1\vec{v_1} + \mu_2\vec{v_2} + \cdots + \mu_k\vec{v_k} = \vec{0}}$ となるような

すべてが0ではない実数 $\mu_1, \mu_2 \cdots \mu_k$ が存在する

$\mu_i \neq 0$ と仮定し、※の両辺を μ_i で割って移項すると、

$\vec{v_i} = -\frac{1}{\mu_i}(\mu_1\vec{v_1} + \cdots + \mu_{i-1}\vec{v_{i-1}} + \mu_{i+1}\vec{v_{i+1}} \cdots + \mu_k\vec{v_k})$ となる

。一次独立の定義

k個のベクトルの組が、一次従属でないとき、その組は一次独立であるという。

☆ $\{\vec{e_1}, \vec{e_2} \cdots \vec{e_n}\}$ は一次独立である。

証明（背理法）

$\{\vec{e_1}, \vec{e_2} \cdots \vec{e_n}\}$ が一次独立でないと仮定する。

つまり、$\{\vec{e_1}, \vec{e_2} \cdots \vec{e_n}\}$ は一次従属であり、$\boxed{\mu_1\vec{e_1} + \cdots + \mu_n\vec{e_n} = \vec{0}}$ をみたす、

すべてが0ではないような実数 $\mu_1, \mu_2 \cdots \mu_n$ が存在する。

ところが $\boxed{}$ の左辺は $\begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix}$ である。

これが $\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ に等しいので、$\mu_1 = \mu_2 = \cdots = \mu_n = 0$ となり、

「$\mu_1, \mu_2 \cdots \mu_n$ はすべてが0ではない」という条件に矛盾している。

まとめると、$\mathbb{R}^n$ における基本単位ベクトル $\{\vec{e_1}, \vec{e_2} \cdots \vec{e_n}\}$ は次の2つの性質をもつ。

(i) 任意のベクトルが $\{\vec{e_1}, \vec{e_2} \cdots \vec{e_n}\}$ の一次結合となる。
(ii) $\{\vec{e_1}, \vec{e_2} \cdots \vec{e_n}\}$ は一次独立である。

このような性質をもつベクトルの組を基底という。

§2.2 一般の行列

$m \times n$ 個の実数を縦に m 個、横に n 個の長方形状に並べたものを
m 行 n 列 ($m \times n$、(m, n)) 行列という。
行列は普通、大文字で表す。

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

行
列

第 j 列とは左から j 番目の列
第 i 行とは上から i 番目の行

a_{ij} を (i, j) 成分あるいは i 行 j 列成分という。

注意

m 次元ベクトルは $m \times 1$ 行列とみなすこともできる

☆ 行列の演算

- 和は成分ごとの和
- k 倍というスカラー倍は各成分の k 倍

で定義する

◎ 行列の積

A: $l \times m$ 行列、B: $m \times n$ 行列

A と B の積 AB は $l \times n$ 行列で次のように定義される。

$A := (a_{ij})$、$B := (b_{st})$ のとき、

AB の第 (i, k) 成分は $\boxed{\sum_{u=1}^{m} a_{iu} b_{uk}}$

ここで、$A := (a_{ij})$ と書いたのは、A の (i, j) 成分が a_{ij} であるということ

つまり、

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & \cdots & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{l1} & \cdots & \cdots & a_{lm} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & \cdots & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

のとき、

$$AB = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \cdots + a_{1m}b_{m1}, & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + \cdots + a_{1m}b_{m2}, & \cdots, & a_{11}b_{1n} + \cdots a_{1m}b_{mn} \\ \vdots & & & \\ a_{l1}b_{11} + a_{l2}b_{21} + \cdots + a_{lm}b_{m1}, & \cdots & \cdots, & a_{l1}b_{1n} + \cdots + a_{lm}b_{mn} \end{pmatrix}$$

◎ 演算の性質 (P.33)

$A + B = B + A$　　$(A + B) + C = A + (B + C)$　　$(AB)C = A(BC)$

$A(B + C) = AB + AC$　　$(A + B)C = AC + BC$

注意

一般には積は可換ではない。つまり、$AB = BA$ とは限らない。

$AB = O$ だからといって $A = O$ または $B = O$ とは限らない

5/11(火)　今日の目標　行列を使って、連立一次方程式を解こう。

例　次の連立一次方程式を解く。

$$\begin{cases} x+2y-z=-1 & \cdots ① \\ 2x+4y-z=-1 & \cdots ② \\ x+3y+z=2 & \cdots ③ \end{cases}$$

これを次のような行列で表す。

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

これを次のように簡略化する

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 2 & 4 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

左辺と右辺を分ける目印

これを最初の連立方程式の拡大係数行列という。

☆ 連立一次方程式と拡大係数行列は1対1に対応している。

すると、連立一次方程式を解くことは、拡大係数行列を

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & d_1 \\ 0 & 1 & 0 & d_2 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} x=d_1 \\ y=d_2 \\ z=d_3 \end{cases}$$

の形に変形すること

変形するときにできることは何か？

このために、連立一次方程式を変形するときにできることは、

(i) 両辺に0でない数をかける。

(ii) ある方程式に、他の方程式の何倍かを加える。

(iii) 方程式の順番をかえる。

それぞれ対応する拡大係数行列は次のように変化する。

(i) ある行に0でない数をかける。

(ii) ある行に他の行の何倍かを加える。

(iii) 2つの行を入れかえる。

上の例で(i),(ii),(iii)のみを使ってどこまで変形できるかやってみる。

1行目を2倍して、2行目から引く　(ii)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

1行目を3行目から引く　(ii)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right)$$

2行目と3行目を入れかえる。　(iii)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

2行目を2倍して、1行目から引く　(ii)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -5 & -7 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

3行目を5倍して、1行目に足す。　(ii)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

3行目を2倍して、2行目から引く　(ii)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

これに対応する連立方程式は $\begin{cases} x=-2 \\ y=1 \\ z=1 \end{cases}$ となり、解が求まった。

No.
DATE

<u>例</u> $\begin{cases} x+2y-z=-1 \\ 2x+4y-z=-1 \\ x+2y+z=1 \end{cases}$ を解く。

拡大係数行列は $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 2 & 4 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right)$

2行目 − 1行目 × 2、3行目 − 1行目
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right)$$

1行目 + 2行目、3行目 − 2行目 × 2
$$\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & \boxed{2} & \boxed{0} & 0 \\ \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{1} & 1 \\ \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{0} & 0 \end{array}\right)$$

この行列を連立方程式にもどすと、
$$\begin{cases} x+2y=0 \\ z=1 \\ 0=0 \end{cases}$$
これから、すぐに $\begin{cases} x=-2y \quad (y\text{は任意}) \\ z=1 \end{cases}$ という不定解が得られる。

<u>例</u> $\begin{cases} x+2y-z+2w=-1 \\ 2x+4y-z-w=-1 \\ x+3y+z+w=2 \end{cases}$ を解く。　未知数が4個、方程式が3つ

対応する拡大係数行列は
$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

2行目 − 1行目 × 2、3行目 − 1行目
$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 3 \end{array}\right)$$

2行目 ⇔ 3行目
$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 1 \end{array}\right)$$

1行目 − 2行目 × 2
$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -5 & 4 & -7 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 1 \end{array}\right)$$

1行目 + 3行目 × 5、2行目 − 3行目 × 2
$$\boxed{\left(\begin{array}{ccc|c|c} 1 & 0 & 0 & -21 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 9 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 1 \end{array}\right)} \longleftarrow \text{変形終了}$$

対応する連立方程式は
$$\begin{cases} x-21w=-2 \\ y+9w=1 \\ z-5w=1 \end{cases}$$
となり、答えは $\begin{cases} x=21w-2 \\ y=-9w+1 \\ z=5w+1 \quad (w\text{は任意}) \end{cases}$ となる。

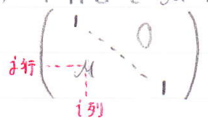
拡大係数行列の変形 (i)、(ii)、(iii) をまとめて、行基本変形という。

<u>注意</u>　行基本変形は、次のような行列を左からかけることで得られる。

(i) 第 i 行を λ 倍する。
$$\begin{array}{cc} i\text{行目} & \begin{pmatrix} 1 & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & \lambda & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & 1 \end{pmatrix} \\ & i\text{番目列} \end{array}$$

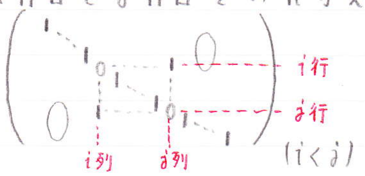
つまり、$\begin{cases} k \neq i \text{ のとき、} (k,k) \text{成分が } 1 \text{。} \\ (i,i) \quad 〃 \quad \lambda \\ \text{他は } 0 \end{cases}$

(ii) i行目をμ倍して、j行目に加える



(k,k)成分が1.
(j,i) 〃 μ.
他は0

(iii) i行目とj行目をいれかえる.



k≠i かつ k≠j のとき、(k,k)成分が1.
(i,j)成分と(j,i)成分が1.
他は0

拡大係数行列を使った解法をガウスの消去法または掃き出し法という.

5/18(火) <u>定義</u>(階段行列)

ある行列が次の性質をみたすとき、階段行列という。

◎ すべての成分が0であるような行は、そうでない行より下にある.

◎ すべての成分が0でない行の0でない左端の成分の位置は下にくるほど右にある.

つまり、階段行列は次のような形をしている.

$$\begin{pmatrix} 0 \cdots 0 & \star & * \cdots * & * & * & \cdots & * & * & * & \cdots & * \\ 0 \cdots 0 & 0 & 0 \cdots 0 & \star & * & \cdots & * & * & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 \cdots 0 & 0 & 0 \cdots 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \star & * & \cdots & * \\ 0 \cdots 0 & 0 & 0 \cdots 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 \cdots 0 & 0 & 0 \cdots 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

ただし、
$\star$: 0でない実数
$*$: 任意の実数

<u>定義</u>(階数)

A: $m \times n$行列.

Aに行基本変形を何回か施し、階段行列にする。

そのとき、得られた階段行列の0ではない行の数のことをAの階数といい、rank(A)で表す。(Aの階数はrであるなどと言う)

<u>注意</u> 階数は、行基本変形のとり方によらずに決まる.

例. $\begin{cases} 2x - y + 3z + w = -2 \\ 3x - y - z - 2w = 3 \\ -3x + y + z + 3w = 1 \end{cases}$

拡大係数行列は

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 3 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & -1 & -2 & 3 \\ -3 & 1 & 1 & 3 & 1 \end{array}\right)$$

②−①×$\frac{3}{2}$ ③+①×$\frac{3}{2}$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 3 & 1 & -2 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{11}{2} & -\frac{7}{2} & 6 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{11}{2} & \frac{9}{2} & -2 \end{array}\right)$$

これを階段行列に直す.

No.

DATE

②＋③

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 3 & 1 & -2 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{11}{2} & -\frac{7}{2} & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right)$$

これは階段行列であり、階数は3

この階段行列をさらに変形して、解がみえやすい形にしよう。

①×$\frac{1}{2}$、②×2

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & \boxed{-\frac{1}{2}} & \frac{3}{2} & \boxed{\frac{1}{2}} & -1 \\ 0 & \boxed{1} & -11 & \boxed{-7} & 12 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 4 \end{array}\right)$$

次に、赤を使って、青を消す。 ①＋②×$\frac{1}{2}$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -4 & -3 & 5 \\ 0 & 1 & -11 & -7 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right)$$

①＋③×3、②＋③×7

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -4 & 0 & 17 \\ 0 & 1 & -11 & 0 & 40 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right)$$

x も y も z で書ける。
w は決まる。
z は任意

定義（簡約階段行列）

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & * & \cdots & * & 0 & * & \cdots & * & 0 & * & \cdots & * \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & * & \cdots & * & 0 & * & \cdots & * \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & 0 & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & * & \cdots & * \\ & & & & & & \vdots & & & & & & & & \end{pmatrix}$$

つまり、簡約階段行列とは、
① 階段行列であり、
② 0でない行の、左端の0でない成分は1。
③ 各行の左端の1の上はすべて0

注意　簡約階段行列の0でない行の数は、簡約する前の階段行列の0でない行の数と同じ。

これまでの考えを拡大係数行列に適用する。
つまり、縦棒を加えるとどうなるかを考える。

(I)

$$\left(\begin{array}{ccccccccccccccccc|c} 0 & \cdots & 0 & 1 & * & \cdots & * & 0 & * & \cdots & * & 0 & * & \cdots & * & 0 & * \cdots * & c_1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & * & \cdots & * & 0 & * & \cdots & * & 0 & * \cdots * & c_2 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & * & \cdots & * & 0 & * \cdots * & c_3 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & & 0 & 0 & 0 & & 0 & 0 & 0 & & 0 & 0 & 0 & & * & 0 & * \quad * & c_{r-1} \\ 0 & & 0 & 0 & 0 & & 0 & 0 & 0 & & 0 & 0 & 0 & & 0 & 1 & * \quad * & c_r \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \cdots 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \cdots 0 & 0 \end{array}\right)$$

赤い1はr個ある。その位置をi_1、i_2 … i_rとする。

(II)

$$\left(\begin{array}{ccccccccccc|c} 0 & \cdots & 0 & 1 & * & \cdots & * & 0 & * & \cdots & * \cdots * & 0 \\ & & & & & & 1 & 0 & & & & \vdots \\ & & & & & & & 1 & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ & & & & & & & & & & & 0 \end{array}\right)$$

i_1+1 から n までの変数から $i_2, i_3 \cdots i_r$ を除いたもの

すると、第1行目から

x_{i_1} は $\boxed{x_{i_1+1}, x_{i_1+2}, \cdots, x_{i_2-1}, x_{i_2+1}, \cdots x_{i_r-1}, x_{i_r+1} \cdots, x_n}$

と c_1 を用いて表される。

第2行から

x_{i_2} は $x_{i_2+1}, \cdots, x_{i_r-1}, x_{i_r+1} \cdots x_n$ と c_2 を用いて表される

⋮

x_{i_r} は $x_{i_r+1} \cdots x_n$ と c_r を用いて表される。

集合の差

つまり、$x_{i_1}, x_{i_2} \cdots x_{i_r}$ は $\{x_{i_1+1}, x_{i_1+2} \cdots x_n\} \setminus \{x_{i_1}, x_{i_2} \cdots x_{i_r}\}$ を用いて表される。

ここで、$x_1 \cdots, x_{i_1-1}$ も任意に選べるので、

∴ $\{x_1 \cdots, x_n\} \setminus \{x_1 \cdots x_{i_r}\}$ も任意に選べる。

以上まとめると、

(I) の場合、$(n-r)$ 個のパラメータをもつ解になる。

また、(II) 〃 、左辺 $=0$ かつ右辺 $=1$ なので、もとの方程式に解はない。

<u>定理</u>

連立一次方程式が行列を使って、$A\vec{x} = \vec{b}$ の形で与えられたとする。

ただし、A：$m \times n$ 行列、$\vec{x} := \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$　$\vec{b}$：m 次縦ベクトル。

$(A|\vec{b})$：拡大係数行列　A：係数行列

このとき、$\mathrm{rank}(A|\vec{b}) = \mathrm{rank}(A) = r$ のとき、$(n-r)$ 個のパラメータをもつ解をもつ。$n-r=0$ のとき、解は一意に定まる。

$\mathrm{rank}(A|\vec{b}) > \mathrm{rank}(A)$ のとき、解なし。

5/25(火)　<u>定義</u>（正則行列）

A：$n \times n$ 行列

A が正則とは、次の式をみたす $n \times n$ 行列 X が存在すること。

$AX = XA = E_n$ ☆　ただし、$E_n := \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$ は n 次単位行列

さらに、このような X のことを A の逆行列といい、A^{-1} とかく。

<u>注意</u>　任意の $m \times n$ 行列 M に対し、$ME_n = M$、$n \times l$ 行列 L に対し、$E_nL = L$ が成り立つ。

<u>注意</u>　☆ はどちらか一つで十分である。

つまり、$AX = E_n$ または $XA = E_n$ のどちらかがなりたてば、他方もなりたつ。

<u>注意</u>　正則行列の逆行列は一意的に定まる

（つまり、A^{-1} という記号には正当性がある）

<u>例</u>
- ◎ $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ は正則ではない
- ◎ $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 〃
- ◎ $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ は正則であり、$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ である。

No.
DATE

<u>例</u>　　　　　n次正方行列

$P_n(i,j) :=$ $\begin{cases} (k,k)成分 (k \neq i,j) は 1 \\ (i,j)成分と(j,i)成分は 1 \\ その他は 0 \end{cases}$　　$P_3(1,3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

これを左からかけると、$\boxed{i行 \Leftrightarrow j行}$

$Q_n(i:\lambda) :=$ $\begin{cases} (k,k)成分 (k \neq i) は 1 \\ (i,i)成分は \lambda \\ その他は 0 \end{cases}$　$(\lambda \neq 0)$　$Q_3(2:\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

これを左からかけると、$\boxed{i行目を\lambda倍}$

$R_n(i,j:\mu) :=$ $\begin{cases} (k,k)成分は 1 \\ (i,j)〃 \mu \\ その他は 0 \end{cases}$　$R_3(1,3:\mu) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \mu \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

これを左からかけると、j行をμ倍してi行にたす

$P_n(i,j)$、$Q_n(i:\lambda)$ $(\lambda \neq 0)$、$R_n(i,j:\mu)$ はすべて正則である。

$$\begin{cases} P_n(i,j)^2 = E_n \\ Q_n(i:\lambda)^{-1} = Q_n(i:\frac{1}{\lambda}) \\ R_n(i,j:\mu)^{-1} = R_n(i,j:-\mu) \end{cases}$$

<u>補題</u>

A, B：n次正則行列

このとき、ABも正則であり、その逆行列は $B^{-1}A^{-1}$ である。

<u>証明</u>

$(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}E_nB = B^{-1}B = E_n$

また、同様に、$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = E_n$ となる。

系　正則行列の任意の積は正則

<u>補題</u>

A：$n \times m$ 行列

このとき、n次正則行列 X と m次正則行列 Y が存在して、

$XAY = \begin{pmatrix} E_r & O_{r,m-r} \\ O_{n-r,r} & O_{n-r,m-r} \end{pmatrix}$ とできる。

ただし、$O_{k,l}$ は $k \times l$ 零行列である。

証明のために、

<u>定義</u>（列基本変形）

① 2つの列を入れかえる ← $P_m(i,j)$ を右からかける（列の数）

② ある列に0でない数をかける ← $Q_m(i:\lambda)$ を右からかける

③ ある列を何倍かして他の列に加える ← $R_m(i,j:\mu)$ を右からかける。

<u>注意</u>　列基本変形は、$P_m(i,j)$　$Q_m(i:\lambda)$、$R_m(i,j:\mu)$ を右からかけることで実現できる。

<u>補題の証明</u>

$A \xrightarrow[\text{行基本変形}]{\text{正則行列を左からかける}}$ 簡約階段行列 $\xrightarrow[\text{列基本変形}]{\text{正則行列を右からかける}}$ $\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

の証明

簡約階段行列

$$\begin{pmatrix} 0 \cdots 1 & * & * & \cdots & * \\ 0 \cdots & & 1 & * \cdots & * \\ 0 \cdots & & & 1 * \cdots & * \\ & & O & & \end{pmatrix}$$

上から順に左端の1を使って、右にある数を消す。(列基本変形)

その結果

$$\begin{pmatrix} 0 \cdots 010 \cdots 0 \\ 0 \cdots 010 \cdots 0 \\ 0 \cdots 010 \cdots 0 \\ O \end{pmatrix}$$

列の入れかえによって、$\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ の形にできる

以上の行基本変形と列基本変形を正則行列のかけ算とみなすと、

$XAY = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ となる n 次正則行列と m 次正則行列の存在がわかる。

定理 A : $n \times m$ 行列

X_1, X_2 : n 次正則行列

Y_1, Y_2 : m 〃　　これらは以下の式をみたす。

$X_1 A Y_1 = \begin{pmatrix} E_{r_1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ …①

$X_2 A Y_2 = \begin{pmatrix} E_{r_2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ …②　このとき、$r_1 = r_2$ が成り立つ。

証明

X, Y は正則だから、①の両辺に左から X_1^{-1}、右から Y_1^{-1} をかける。

$$(X_1^{-1}X_1)A(Y_1Y_1^{-1}) = X_1^{-1}\begin{pmatrix} E_{r_1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}Y_1^{-1}$$

$$\therefore A = X_1^{-1}\begin{pmatrix} E_{r_1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}Y_1^{-1}$$

同様に②より $A = X_2^{-1}\begin{pmatrix} E_{r_2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}Y_2^{-1}$

$$\therefore X_1^{-1}\begin{pmatrix} E_{r_1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}Y_1^{-1} = X_2^{-1}\begin{pmatrix} E_{r_2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}Y_2^{-1}$$

両辺に左から X_2、右から Y_1 をかけると、

$X_2X_1^{-1}\begin{pmatrix} E_{r_1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_{r_2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}Y_2^{-1}Y_1$ となる。

$X := X_2X_1^{-1}$, $Y := Y_2^{-1}Y_1$ とおくと、

$\boxed{X\begin{pmatrix} E_{r_1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_{r_2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}Y}$ ③ がなりたつ(X, Y ともに正則)

注意

正則行列は行基本変形で単位行列にできる

(∵簡約階段行列が単位行列だから)

n 次正則行列からできた簡約階段行列を考えると

1行目は $(100 \cdots 0)$ となる。

$\boxed{\text{(∵) そうでないと、第1列目が全部0になり、逆行列がなくなる}}$

同様に考えると、その簡約階段行列は単位行列である。

③の左辺は $\begin{pmatrix} E_{r_1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ にある行基本変形を行って、得られた行列である。

逆に、③の右辺は上の行基本変形の逆を施せば $\begin{pmatrix} E_{r_1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ になる。

$\therefore$ ③の左辺の階数 $= r_1$

③の右辺は $\begin{pmatrix} E_{r_2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ に列基本変形を施すことによって得られる。

よって、③の右辺の0でない行の数は r_2 以下である

→ 行基本変形で階段行列にして階数を求めるので、

No.

DATE

◎ の右辺の階数 $\leq r_2$.　∴ $r_1 \leq r_2$

r_1 と r_2 の立場を入れかえても同じ議論がなりたつので、

$r_2 \leq r_1$　　∴ $r_1 = r_2$

<u>系</u>　行列の階数は行基本変形の選び方によらずきまる

(∵) r 個の 0 でない行のある階段行列に列基本変形を施すと $\begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$ になるから。

<u>系</u>　A : $n \times m$ 行列

${}^tA$: A の転置行列（$m \times n$ 行列で、(i, j) 成分が A の (j, i) 成分になっているもの）

$\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}({}^tA)$

(∵) 正則行列 X, Y に対し、$XAY = \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$ なら両辺の転置をとって、

$({}^tY)({}^tA)({}^tX) = \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$ だから。

6/1 (火)　<u>部分空間</u>

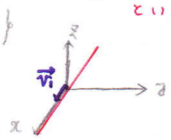
<u>定義</u>　$\vec{v_1}, \vec{v_2}, \cdots, \vec{v_k}$: $\mathbb{R}^n$ のベクトル.

そのとき、$\{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \cdots, \vec{v_k}\}$ の張る $\mathbb{R}^n$ の部分空間 $\mathrm{Span}\{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \cdots, \vec{v_k}\}$ を次のように定義する

$\mathrm{Span}\{\vec{v_1}, \cdots, \vec{v_k}\} := \{\underline{a_1\vec{v_1} + a_2\vec{v_2} + \cdots + a_k\vec{v_k}} \mid a_1, \cdots, a_k \in \mathbb{R}\}$

こういう形で表されるベクトルを $\vec{v_1}, \cdots, \vec{v_k}$ の一次結合という.

<u>例</u>　$\mathbb{R}^3$ の中で、$\vec{v_1} := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ とすると、$\mathrm{Span}\{\vec{v_1}\}$ は右の赤い線上に終点をもつベクトル全体



<u>例</u>　$\mathbb{R}^3$ の中で、$\vec{v_2} := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ とすると、$\mathrm{Span}\{\vec{v_1}, \vec{v_2}\}$ は xz 平面全体に終点をもつベクトル全体

(∵) $\mathrm{Span}\{v_1, v_2\} = \{a_1\vec{v_1} + a_2\vec{v_2} \mid a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$

$= \left\{\begin{pmatrix} a_1 + a_2 \\ 0 \\ a_2 \end{pmatrix} \middle| a_1, a_2 \in \mathbb{R}\right\}$

$= \left\{\begin{pmatrix} a_1 \\ 0 \\ a_2 \end{pmatrix} \middle| a_1, a_2 \in \mathbb{R}\right\} = xz$ 平面

<u>定義</u>　A : $m \times n$ 行列

このとき、A の定める $\mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}^m$ への線型写像 f_A を $f_A(\vec{x}) = \underline{A\vec{x}}$ で定義する.

$\mathbb{R}^n$ のベクトル　$\mathbb{R}^m$ のベクトル

<u>定義</u>　(核 (kernel))

A : $m \times n$ 行列、$f_A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$（$A$ の定める線型写像）

f_A の核 $\mathrm{Ker}(f_A)$ を $\mathrm{Ker}(f_A) := \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid f_A(\vec{x}) = \underline{\vec{0}}\}$ で定義する.

$\mathbb{R}^m$ の零ベクトル

<u>注意</u>　f_A の核とは、次の斉次一次連立方程式の解の集合と一致する.

$$A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

<u>例</u>　$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 3 & 0 \\ -2 & 5 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ のとき、$\mathrm{Ker}(f_A)$ を計算する.

つまり、連立方程式 $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ を解く.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & 3 & 0 & 0 \\ -2 & 5 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \cdots\cdots \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

よって、解は $\begin{cases} x = -3z \\ y = -z \\ w = 0 \end{cases}$ （zは任意の実数）

これを、パラメータ t を使って書くと、

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} -3t \\ -t \\ t \\ 0 \end{pmatrix} \middle| \; t \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ t \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \middle| \; t \in \mathbb{R} \right\}$$

$\therefore \ \mathrm{Ker}(f_A) = \mathrm{span}\left\{\begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$

一般に、$m \times n$ 行列 M に対し、$\mathrm{Ker}(f_M)$ は $\mathbb{R}^n$ の部分空間になる

ただし、その部分空間は $n - \mathrm{rank}(A)$ 個のベクトルで張られる。

（∵連立一次方程式の一般論）

<u>定義</u>（次元）

V：$\mathbb{R}^n$ の部分空間

つまり、Vはあるベクトルの集合 $\{\vec{v_1}, \cdots, \vec{v_k}\}$ で張られている

Vを張るのに必要なベクトルの数の最小数をVの次元といい、$\dim V$と書く。

次元を使うと、$\dim \ker(f_A) = \boxed{m} - \mathrm{rank}(A)$ となることが$\boxed{\text{わかる}}$。 あとで

（ただし、Aは $m \times n$ 行列、よって、$f_A : \mathbb{R}^{\square} \longrightarrow \mathbb{R}^m$）

<u>例</u> $\mathbb{R}^3$ の部分空間

$V := \mathrm{span}\left\{\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\vec{v_1}}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\vec{v_2}}\right\}$ （$= xz$平面） $W := \mathrm{span}\{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}\}$

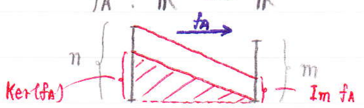
ただし、$\vec{v_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ とする。

$V = W$ ∵ $\vec{v_3} = \vec{v_2} - \vec{v_1} \in V$ $\therefore W \subset V$

一方、明らかに、$V \subset W$ より $V = W$

実際 $\dim V = 2$ であることが証明できる。

$f_A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$



<u>定義</u>（像（image））

A：$m \times n$ 行列、$f_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

f_Aの像 $\mathrm{Im}\, f_A$ を次のように定義する。

$\mathrm{Im}(f_A) := \{\vec{y} \in \mathbb{R}^m \mid \vec{y} = f_A(\vec{x})$ となる $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ が存在する$\}$

<u>注意</u> $\mathrm{Im}(f_A)$ は $\mathbb{R}^m$ の部分空間になる。

<u>例</u> $A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ $f_A := \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}(f_A) &= \{A\vec{x} \mid \vec{x} \in \mathbb{R}^3\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \middle| \; x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix} \middle| \; x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \mathrm{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix} \right\} \end{aligned}$$

一般に $m \times n$ 行列 A を $A := (\vec{a_1}, \vec{a_2}, \cdots, \vec{a_n})$ のように、縦ベクトル

$\vec{a_1}, \cdots, \vec{a_n} \in \mathbb{R}^m$ を使って表すと、

$\mathrm{Im}(f_A) = \mathrm{span}\{\vec{a_1}, \vec{a_2}, \cdots, \vec{a_n}\}$ となる。

No.

DATE

次に $\dim \mathrm{Im}(f_A)$ を計算しよう。

例 $A := \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 3 & 0 \\ -2 & 5 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ $\mathrm{Im}(f_A)$ の次元は？

$$\mathrm{Im}(f_A) = \mathrm{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$= \mathrm{Span}\{\vec{u_1}, \vec{u_2} + 2\vec{u_1}, \vec{u_3} - \vec{u_1}, \vec{u_4} + \vec{u_1}\}$$

$$\left(\because \ \mathrm{Span}\{\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3}, \vec{u_4}\} = \boxed{\{a\vec{u_1} + b\vec{u_2} + c\vec{u_3} + d\vec{u_4} \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}\}} \right)$$

$$= \{x\vec{u_1} + y(\vec{u_2} + 2\vec{u_1}) + z(\vec{u_3} - \vec{u_1}) + w(\vec{u_4} + \vec{u_1}) \mid x, y, z, w \in \mathbb{R}\}$$

$$= \boxed{\{(x + 2y - z + w)\vec{u_1} + y\vec{u_2} + z\vec{u_3} + w\vec{u_4} \mid x, y, z, w \in \mathbb{R}\}}$$

集合として、□と□は同じ。

$$\mathrm{Im}(f_A) = \mathrm{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\} = \mathrm{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$$

$$= \mathrm{span}\{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3} - 2\vec{v_2}\}$$

$$= \mathrm{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix} \right\}$$

これは、これ以上減らせないことがわかる。

以上をまとめると、

A：$m \times n$ 行列に対し、$\dim \mathrm{Im}(f_A)$ を求めるためには、A に列基本変形を施して、横からみて、階段行列になるようにし、その結果得られた 0 でないベクトルの数を求めればよい。

つまり、$\dim \mathrm{Im}(f_A) = \mathrm{rank}({}^tA) = \mathrm{rank}(A)$

まとめると、次の次元公式が得られる。

定理（次元公式）

A：$m \times n$ 行列　$f_A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$（$A$ の定める線型写像）

そのとき、$\underbrace{n}_{\text{未知数の数}} = \underbrace{\dim \mathrm{Im}(f_A)}_{A\text{の階数}} + \dim \ker(f_A)$

↑解に現れるパラメータの数

6/8(火)　行列式（P.63）

英語では、
- determinant（行列式）
- matrix（行列）
- row（行）
- column（列）

☆ 行列式は符号のついた体積

n 次正方行列（$n \times n$ 行列）に対して、行列式が定義される。

A：n 次正方行列　A の行列式を $\det A$ とか $|A|$ とか書く。

また、$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ のように成分を使って表された行列に対しては、

$\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とか $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ を用いる。

定義（行列式）

n次正方行列の行列式は次の4つの性質をみたすものとして定義される。

(i) $\det E_n = 1$. $\left(E_n = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \right)$

(ii) ある列をスカラー倍すると、行列式もスカラー倍される。つまり、

$$|\vec{a_1}, \cdots, \lambda \vec{a_i}, \cdots, \vec{a_n}| = \lambda |\vec{a_1}, \cdots, \vec{a_i}, \cdots, \vec{a_n}|$$

ただし、$n \times n$行列を $(\vec{a_1}, \vec{a_2}, \cdots, \vec{a_n})$ と表すことにする。(各 $\vec{a_i}$ は $n \times 1$ 行列)

(iii) ある列が2つの列の和になっていれば、行列式もそれに応じた和に分かれる。

つまり、$|\vec{a_1}, \cdots, \vec{a_i} + \vec{a_i'}, \cdots, \vec{a_n}|$

$$= |\vec{a_1}, \cdots, \vec{a_i}, \cdots, \vec{a_n}| + |\vec{a_1}, \cdots, \vec{a_i'}, \cdots, \vec{a_n}|$$

(iv) 2つの列を入れかえると、行列式の符号がかわる。

つまり、$|\vec{a_1}, \cdots, \vec{a_i}, \cdots, \vec{a_j}, \cdots, \vec{a_n}| = -|\vec{a_1}, \cdots, \vec{a_j}, \cdots, \vec{a_i}, \cdots, \vec{a_n}|$

☆ $n=2$ のとき 行列式とは何か？

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ のとき、$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ を求める。

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \det\left(\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}\right)$$

$$= \det\left(\begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}\right)$$

$$\overset{(iii)}{=} \begin{vmatrix} a & b \\ 0 & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

$= \det\left(a\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix}\right)$

$$\overset{(iii)を2回}{=} \begin{vmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ c & d \end{vmatrix}$$

$$\overset{(ii)を8回}{=} ab \times \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} + ad \times \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + bc \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + cd \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

ここで、(iv)より　1列目と2列目を入れかえた。

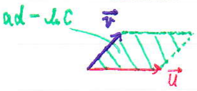
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \qquad \therefore \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

同様に、$\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$

また、(i)より $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \det E_2 = 1$.

そして、(iv)と(i)より $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -\det E_2 = -1$.

だから、$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$



注意　$ad - bc$ は2つのベクトル $\vec{u} = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$ の作る平行四辺形の面積

ただし、$\vec{u}$ を反時計回りにまわして、$\vec{v}$ の方向と重なるとき、面積は正と定める。そうでないときは負。

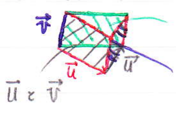
平行四辺形の(符号つき)面積が(i)～(iv)をみたすことの証明

(i) $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ とすれば、 $= 1$.

(ii) $\det(\lambda\vec{u}, \vec{v})$　　底辺(高さ)がλ倍されるので、面積もλ倍

(注、$\lambda < 0$ のときは符号がかわる)

(iii) $\det(\vec{u} + \vec{u'}, \vec{v})$



図より

$$\det(\vec{u} + \vec{u'}, \vec{v}) = \det(\vec{u}, \vec{v}) + \det(\vec{u'}, \vec{v})$$

(iv) $\det(\vec{u}, \vec{v})$ と $\det(\vec{v}, \vec{u})$ は符号がちがう

反時計まわり

時計まわり

右手系 か 左手系

☆ $n=3$ のときも同様に 3つの空間ベクトルの作る平行六面体の $\boxed{\text{符号つき}}$ 体積であることが示される。

$n=3$ のときの計算

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \overset{①}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}} + \overset{②}{\begin{vmatrix} 0 & & \\ a_{21} & & \\ 0 & & \end{vmatrix}} + \overset{③}{\begin{vmatrix} 0 & & \\ 0 & & \\ a_{31} & & \end{vmatrix}}$$

$$① = \underbrace{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 0 & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix}}_{\parallel} + \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{vmatrix}$$

$$a_{11}a_{12}\begin{vmatrix} 1 & 1 & a_{13} \\ 0 & 0 & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix} = 0$$

$$= \overset{=0}{\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & a_{13} \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}} + \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} + \overset{=0}{\begin{vmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{vmatrix}} + \overset{=0}{\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & a_{13} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{32} & 0 \end{vmatrix}} + \begin{vmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{vmatrix} + \overset{=0}{\begin{vmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{vmatrix}}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{23} \\ 0 & a_{32} & 0 \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + a_{11}a_{23}a_{32}\overset{=-1}{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

$$② = a_{13}a_{21}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

$$③ = a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

これをサラスの公式という。

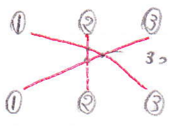
命題 $\vec{e_1}, \vec{e_2} \cdots \vec{e_n}$: 基本ベクトル、つまり、$\vec{e_1} = \begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}$、$\vec{e_2} = \begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix}$ $\cdots$ $\vec{e_n} = \begin{pmatrix}0\\\vdots\\0\\1\end{pmatrix}$ とおく。

また、$(i_1, i_2 \cdots i_n)$ を n個の数 $\{1, 2, \cdots, n\}$ からできる順列とする。

そのとき、$\det(\vec{e_{i_1}}, \vec{e_{i_2}} \cdots \vec{e_{i_n}})$ は次のように計算できる。

例 $n=3$

$$\det(\vec{e_3}, \vec{e_2}, \vec{e_1}) = -1$$



3つ $(-1)^3 = -1$

6/15(火)　☆ 行列式の全展開式 (P.67)

復習 (サラスの公式)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

この証明は1列目を $\begin{pmatrix} a_{11} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ a_{21} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a_{31} \end{pmatrix}$、2列目を $\begin{pmatrix} a_{12} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ a_{22} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a_{32} \end{pmatrix}$、3列目を ---- のように分解し (iii)、同じ行のみが0でない組み合わせ (たとえば、$\begin{pmatrix} a_{11} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} a_{12} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ など) は0になることを利用することで得られた。

これを、一般のn次行列に適用すると、

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\det A \underset{\text{1列目で分解}}{=} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \cdots + \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & 0 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \left| \begin{pmatrix} a_{11} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ a_{22} \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \vec{a_3} \cdots \vec{a_n} \right| + \left| \begin{pmatrix} a_{11} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a_{32} \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \vec{a_3} \cdots \vec{a_n} \right|$$

$$+ \cdots + \left| \begin{pmatrix} a_{11} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ a_{n2} \end{pmatrix} \vec{a_3}, \cdots \vec{a_n} \right| + \left| \begin{pmatrix} 0 \\ a_{21} \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{12} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \vec{a_3}, \cdots \vec{a_n} \right| +$$

$$\left| \begin{pmatrix} 0 \\ a_{21} \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ a_{32} \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \vec{a_3} \cdots \vec{a_n} \right| + \cdots + \left| \begin{pmatrix} 0 \\ a_{21} \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ a_{n2} \end{pmatrix} \vec{a_3} \cdots \vec{a_n} \right| + \cdots + \left| \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ a_{n1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{12} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \vec{a_3} \cdots \vec{a_n} \right|$$

$$+ \cdots + \left| \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ a_{n1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ a_{n-1,2} \\ 0 \end{pmatrix} \vec{a_3}, \cdots \vec{a_n} \right|$$

$$= a_{11}a_{12} \left| \vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{a_3} \cdots \vec{a_n} \right| + a_{11}a_{32} \left| \vec{e_1}, \vec{e_3}, \vec{a_3} \cdots \vec{a_n} \right| + \cdots +$$
$$a_{11}a_{n2} \left| \vec{e_1}, \vec{e_n}, \vec{a_3} \cdots \vec{a_n} \right| + a_{21}a_{12} \left| \vec{e_2}, \vec{e_1}, \vec{a_3} \cdots \vec{a_n} \right| + \cdots +$$
$$a_{21}a_{n2} \left| \vec{e_2}, \vec{e_n}, \vec{a_3} \cdots \vec{a_n} \right| + \cdots + a_{n1}a_{12} \left| \vec{e_n}, \vec{e_1}, \vec{a_3} \cdots \vec{a_n} \right| + \cdots +$$
$$a_{n1}a_{n-1,2} \left| \vec{e_n}\ \vec{e_{n-1}}, \vec{a_3}, \cdots \vec{a_n} \right|$$

$$= a_{11} \sum_{i \neq 1} a_{i2} \left| \vec{e_1}, \vec{e_i}, \vec{a_3}, \cdots \vec{a_n} \right| + a_{21} \sum_{i \neq 2} a_{i2} \left| \vec{e_2}, \vec{e_i}, \vec{a_3}, \cdots \vec{a_n} \right| + \cdots +$$
$$a_{n1} \sum_{i \neq n} a_{i2} \left| \vec{e_n}, \vec{e_i}, \vec{a_3}, \cdots \vec{a_n} \right|$$

$$= \sum_{i,j\,(i \neq j)} a_{j1} a_{i2} \left| \vec{e_j}, \vec{e_i}, \vec{a_3}, \cdots \vec{a_n} \right|$$

これを続けると、

$$\boxed{\det A = \sum_{(i_1, i_2, \cdots, i_n)} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_n n} \left| \vec{e_{i_1}}, \vec{e_{i_2}}, \cdots, \vec{e_{i_n}} \right|}$$

置換または順列

ただし、総和は $\{1, 2, \cdots, n\}$ の並べかえすべてにわたる。

あとは、$\left| \vec{e_{i_1}}, \vec{e_{i_2}}, \cdots, \vec{e_{i_n}} \right|$ を計算すればよい。

定義 (置換の符号)

$(i_1, i_2, \cdots, i_n)$ を $\{1, 2, \cdots, n\}$ の置換とする。

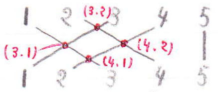
$(i_1, i_2, \cdots, i_n)$ の中で、左の方が大きい対の数が偶数のとき $+1$、奇数のとき -1 として符号をきめる。これを $\mathrm{sgn}(i_1, i_2, \cdots, i_n)$ と書く。

例　$(3, 4, 1, 2, 5)$

この中に現れる対 (i, j) で $i > j$ となるのは

$(3,1), (3,2), (4,1), (4,2)$　　$\therefore\ sgn(3,4,1,2,5) = +1$.

計算は



$\therefore\ |\vec{e_{i_1}}, \vec{e_{i_2}}, \cdots \vec{e_{i_n}}| = sgn(i_1, i_2 \cdots i_n)$

定理　A: $n \times n$ 行列　${}^tA$: A の転置行列.　$\det({}^tA) = \det A$

証明　$n = 3$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \qquad {}^tA = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$\det A =$

$(1,2,3)$　$a_{11}a_{22}a_{33}$ ①　　$(1,3,2)$　$-a_{11}a_{32}a_{23}$ ②　　$(2,1,3)$　$-a_{21}a_{12}a_{33}$ ③

$(2,3,1)$　$a_{21}a_{32}a_{13}$ ④　　$(3,1,2)$　$a_{31}a_{12}a_{23}$ ⑤　　$(3,2,1)$　$-a_{31}a_{22}a_{13}$ ⑥

$\det({}^tA) =$

$(1,2,3)$　$a_{11}a_{22}a_{33}$ ①　　$(1,3,2)$　$-a_{11}a_{23}a_{32}$ ②　　$(2,1,3)$　$-a_{12}a_{21}a_{33}$ ③

$(2,3,1)$　$a_{12}a_{23}a_{31}$ ⑤　　$(3,1,2)$　$a_{13}a_{21}a_{32}$ ④　　$(3,2,1)$　$-a_{13}a_{22}a_{31}$ ⑥

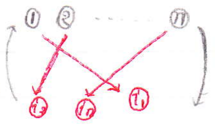
これより，$\det A$ と $\det({}^tA)$ の各項は

$\det A$ ---- $(i_1, i_2, \cdots i_n)$

$\updownarrow$

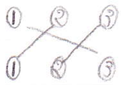
$\det({}^tA)$　　逆の置換

逆の置換



$(i_1, i_2, \cdots i_n)$

例　$(3\ 1\ 2)$ の逆置換は $(2, 3, 1)$



符号は逆の置換をとってもかわらない．

$\therefore\ \det A = \det({}^tA)$

系（行列式の性質）

(ii) ある行を λ 倍すると，行列式も λ 倍

(iii) $\begin{vmatrix} \vec{a_1} \\ \vdots \\ \vec{a_i} + \vec{a_i}' \\ \vdots \\ \vec{a_n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{a_1} \\ \vdots \\ \vec{a_i} \\ \vdots \\ \vec{a_n} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{a_1} \\ \vdots \\ \vec{a_i}' \\ \vdots \\ \vec{a_n} \end{vmatrix}$

(iv) 行をいれかえると符号がかわる．

命題

$\begin{vmatrix} a & B \\ \vec{0} & A \end{vmatrix} = a \det A$　また，$\begin{vmatrix} a & \vec{0} \\ D & A \end{vmatrix} = a \det A$

ただし，a はスカラー　A は正方行列，B は横ベクトル，D は縦ベクトル

$A := \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$，$a_{11} = a$　　$B := (a_{12}, a_{13} \cdots a_{1n})$ とおくと，

$\begin{pmatrix} a & \vec{0} \\ D & A \end{pmatrix}$ は $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ に $a_{21} = \cdots = a_{n1} = 0$ を代入したもの．

No.
DATE

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & B \\ 0 & A \end{pmatrix} = \sum_{(i_1, i_2 \cdots i_n)} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_n n} \times \mathrm{sgn}(i_1, i_2 \cdots, i_n)$$ で $a_{21} = a_{31} \cdots = a_{n1} = 0$

$$= \sum_{(1, i_2 \cdots i_n)} a_{11} a_{i_2 2} \cdots a_{i_n n}\, \mathrm{sgn}(1, i_2, \cdots, i_n)$$

ところが、$(1, i_2, \cdots i_n)$ は $\{2, 3, \cdots, n\}$ の置換全部を動く。
これは $\{1, 2, \cdots, n-1\}$ の置換全部と一対一に対応し、

$\mathrm{sgn}(1, i_2 \cdots i_n) = \mathrm{sgn}(\underline{i_2 \cdots i_n})$ ← $(2, \cdots, n)$ の置換

$$\therefore \det\begin{pmatrix} a_{11} & B \\ 0 & A \end{pmatrix} = a_{11} \sum_{(i_2 \cdots i_n)} a_{i_2 2} a_{i_3 3} \cdots a_{i_n n}\, \mathrm{sgn}(i_2 \cdots i_n)$$
$$= a_{11} \det A$$

<u>系</u>　上三角行列や下三角行列の行列式は対角成分の積

つまり、
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & & & 0 \\ a_{21} & \ddots & & \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{n1} & \cdots & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \times a_{22} \times \cdots \times a_{nn}$$

6/22(火)　余因子展開

<u>例</u>　先週の復習

$\begin{vmatrix} a & C \\ 0 & B \end{vmatrix} = a|B|$　(a：スカラー、C：横ベクトル、B：正方行列)

このように、n次の行列の行列式を$(n-1)$次の行列の行列式で表す方法を考える。

<u>定義</u>　(余因子)

A：$n \times n$ 正方行列、$A = (a_{ij})$

A の (i, j) 余因子 $\widetilde{a_{ij}}$ を　$\widetilde{a_{ij}} := (-1)^{i+j} \times$

i行を除く　　j列を除く

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \boxed{a_{1j}} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & & & \vdots \\ \boxed{a_{i1}} & \boxed{a_{i2}} & \cdots & \boxed{a_{ij}} & \cdots & \boxed{a_{in}} \\ \vdots & \vdots & & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \boxed{a_{nj}} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

<u>定理</u>　(余因子展開)

$A := (a_{ij})$　(n次正方行列)　　$\widetilde{a_{ij}}$：(i, j) 余因子

このとき、$\det A = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \widetilde{a_{ik}}$　　i行に関する余因子展開

$= a_{i1}\widetilde{a_{i1}} + a_{i2}\widetilde{a_{i2}} + \cdots + a_{in}\widetilde{a_{in}}$ が

任意の $i\ (1 \leq i \leq n)$ について成立する。

同様に、$\det A = \sum_{k=1}^{n} a_{kj} \widetilde{a_{kj}}$　　j列に関する余因子展開

$= a_{1j}\widetilde{a_{1j}} + a_{2j}\widetilde{a_{2j}} + \cdots + a_{nj}\widetilde{a_{nj}}$ が

任意の $j\ (1 \leq j \leq n)$ について成立する。

<u>証明</u>

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

j列を左端にもってくるためには、左隣の列と$(j-1)$回入れかえる必要がある。

$$\therefore \det A = (-1)^{j-1} \begin{vmatrix} a_{1j} & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j-1} & a_{1j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{nj} & a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{nj-1} & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

1列目を $\begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ a_{2j} \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \cdots + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}$ に分解すると、

$$\det A = (-1)^{j-1} \begin{vmatrix} a_{1j} & a_{11} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{21} & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \cdots\cdots + (-1)^{j-1} \begin{vmatrix} 0 & a_{11} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & & & & \\ a_{kj} & a_{k1} & \cdots & \cdots & a_{kn} \\ 0 & & & & \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \cdots$$

j列目がないという意味

ここで、k番目の項において、第k行を上に持っていくのには、
すぐ上の行との入れ替えを $k-1$ 回する必要がある。

よって、k番目の項は

$$(-1)^{j-1} \times (-1)^{k-1} \times \begin{vmatrix} a_{kj} & a_{k1} & \cdots & \cdots & a_{kn} \\ 0 & a_{11} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{21} & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & a_{k-1,1} & \cdots & \cdots & a_{k-1,n} \\ 0 & a_{k+1,1} & \cdots & \cdots & a_{k+1,n} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{k+j} a_{kj} \cdots = a_{kj}\widetilde{a_{kj}}$$

よって、$\det A = a_{1j}\widetilde{a_{1j}} + \cdots + a_{kj}\widetilde{a_{kj}} + \cdots + a_{nj}\widetilde{a_{nj}}$

積の行列式

<u>定理</u>　A, B : n 次正方行列

このとき、$\det(AB) = \det(A) \times \det(B)$

証明のために行列式の「特徴付け」を使う、

$\boxed{\text{行列式の特徴付け}}$

次の性質をみたすような n 次行列から数への関数 F は行列式のみである。

(i) $F(E_n) = 1$、(ただし、E_n は n 次単位行列)

(ii) ある列を λ 倍すると、F は λ 倍される。

(iii) $F((\vec{a_1}, \cdots, \vec{a_{i-1}}, \vec{a_i} + \vec{\lambda_i}, \vec{a_{i+1}}, \cdots, \vec{a_n}))$
$= F(\vec{a_1} \cdots \vec{a_i} \cdots \vec{a_n}) + F((\vec{a_1}, \cdots \vec{\lambda_i}, \cdots \vec{a_n}))$

(iv) $F((\vec{a_1}, \cdots \vec{a_i} \cdots \vec{a_j}, \cdots \vec{a_n})) = -F((\vec{a_1}, \cdots \vec{a_j}, \cdots \vec{a_i} \cdots \vec{a_n}))$

<u>定理の証明</u>

F を n 次正方行列全体から数への関数で、

6/29(火)　$A := (a_{ij})$　(n次正方行列)

$\det A = \sum_{k=1}^{n} a_{i\boxed{k}} \times \widetilde{a_{i\boxed{k}}}$　(i行での展開)　　左の青で囲った添字をかえるとどうなるか？

$= \sum_{l=1}^{n} a_{l\boxed{j}} \times \widetilde{a_{l\boxed{j}}}$　(j列　〃　)

補題

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\widetilde{a_{mk}} = 0 & (m \neq i) \\ \sum_{l=1}^{n} a_{lj}\widetilde{a_{lg}} = 0 & (g \neq j) \end{cases}$$

例

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$　$i = 2,\ m = 3$ のとき.

$a_{21}\widetilde{a_{31}} + a_{22}\widetilde{a_{32}} + a_{23}\widetilde{a_{33}}$ --- ☆

$$= a_{21}(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} \cancel{a_{11}} & a_{12} & a_{13} \\ \cancel{a_{21}} & a_{22} & a_{23} \\ \cancel{a_{31}} & \cancel{a_{32}} & \cancel{a_{33}} \end{vmatrix} + a_{22}(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} a_{11} & \cancel{a_{12}} & a_{13} \\ a_{21} & \cancel{a_{22}} & a_{23} \\ \cancel{a_{31}} & \cancel{a_{32}} & \cancel{a_{33}} \end{vmatrix} + a_{23}(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cancel{a_{13}} \\ a_{21} & a_{22} & \cancel{a_{23}} \\ \cancel{a_{31}} & \cancel{a_{32}} & \cancel{a_{33}} \end{vmatrix}$$

a_{21}, a_{22}, a_{23} を1つの行にまとめたい.

☆の式は $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$ を第3行で展開したものと一致

この行列は2行目と3行目が同じなので、行列式は0

証明

$\sum_{l=1}^{n} a_{lg}\widetilde{a_{lj}} = 0 \ (g \neq j)$ を示す. 他の場合は同様.

次のような行列を考える.

$B = (\vec{a_1}, \cdots, \vec{a_{j-1}}, \vec{a_g}, \vec{a_{j+1}}, \cdots, \vec{a_n})$

ただし, $A = (\vec{a_1}, \cdots, \vec{a_{j-1}}, \vec{a_j}, \vec{a_{j+1}}, \cdots, \vec{a_n})$

$g \neq j$ なので, Bの第g列と第j列は一致している.

よって, $\det B = 0$.

ところで, Bを第j列で展開すると,

$\det B = \sum_{l=1}^{n}$ (Bの(l, j)成分) × (Bの(l, j)余因子)

〃 $\vec{a_g}$ の l 行目 a_{lg}

〃 $(-1)^{l+j}$ × (Bの l行とj列を取り除いた行列の行列式)

$= (-1)^{l+j}$ × (A　〃　)

$= \widetilde{a_{lj}}$

$0 = \sum_{l=1}^{n} a_{lg} \times \widetilde{a_{lj}}$

今までにわかったこと *

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\widetilde{a_{mk}} = \begin{cases} \det A & (i = m) \\ 0 & (i \neq m) \end{cases} \qquad \sum_{l=1}^{n} a_{lj}\widetilde{a_{lg}} = \begin{cases} \det A & (j = g) \\ 0 & (j \neq g) \end{cases}$$

これを使うと次の定理がえられる.

定理

$A = (a_{ij})$; $n \times n$ 行列

$\tilde{A}$ を第(i, j)成分が $\widetilde{a_{ji}}$ となる $n \times n$ 行列とすると,

$$A\tilde{A} = \tilde{A}A = (\det A)E_n$$

系. $\det A \neq 0$ のとき, A は正則であり, $A^{-1} = \frac{1}{\det A}\tilde{A}$ で与えられる.

No.
DATE

定理の証明

$A\widetilde{A}$ の (k,l) 成分は $\boxed{\sum_{p=1}^{n} a_{kp}\widetilde{a_{lp}}}$ で与えられる．

∵ $A=(a_{ij})$，$B=(b_{st})$ のとき AB の (k,l) 成分は $\sum_{p=1}^{n} a_{kp} b_{pl}$

$\widetilde{A}$ の (p,l) 成分は $\widetilde{a_{lp}}$ なので，上の式が成立．

$\boxed{}$ は ＊式で $i \to k$，$m \to l$ とおいたもの．

$$\therefore \boxed{} = \begin{cases} \det A & (k=l) \\ 0 & (k \neq l) \end{cases}$$

$A\widetilde{A} = (\det A)E_n$ がわかる． $\widetilde{A}A = (\det A)E_n$ も同様

例

$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ -2 & 4 & 5 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ の逆行列を求める

$\det A = 32 - 45 - 4 + 24 - 20 + 12 = -1$

余因子を求める

$\widetilde{a_{11}} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3$，　$\widetilde{a_{12}} = \cdots\cdots$

$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 7 \\ -11 & 14 & -24 \\ 10 & -13 & 22 \end{pmatrix}$　　　$A^{-1} = -\widetilde{A}$

7/6(火)　特別なブロック行列の行列式

定理　M：$n \times n$ 行列で次のような形をしているもの

$M = \begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix}$　ただし，A は $r \times r$　B は $(n-r)\times(n-r)$，C は $r \times (n-r)$ 型の行列で，O は $(n-r)\times r$ 型零行列

このとき，$\det M = \det A \times \det B$

証明（積の行列式と同様）

$f(X)$ を $\det\begin{pmatrix} X & C \\ O & B \end{pmatrix}$ とおく．ただし，C と B は固定しておき，X のみの関数とみなす．

f は $r \times r$ 行列から数への関数であり，

(i) 列を入れ替えると符号がかわる．
(ii) 列をスカラー倍すると，$f(X)$ もそのスカラー倍される
(iii) 列を2つの列の和にすると，$f(X)$ も対応した2つの和に分かれる．

をみたす．（$f(E_r)$ は 1 とは限らない）

よって，$f(X)$ は $f(E_r) \times \det(X)$ と表されることがわかる．

ところで，$f(E_r) = \det\begin{pmatrix} E_r & C \\ O & B \end{pmatrix}$

$\boxed{\text{列の基本変形で}}$　$\det\begin{pmatrix} E_r & C \\ O & B \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} E_r & O \\ O & B \end{pmatrix}$ となる．

ただし，右上の O は $r \times (n-r)$ 零行列である．

$\det\begin{pmatrix} E_r & O \\ O & B \end{pmatrix} = \det B$ より　$f(X) = \det B \times \det X$

クラメールの公式

$n\times n$ 行列を係数行列としてもつ連立一次方程式の解の公式

定理（クラメールの公式）

$A=(a_{ij})$：$n\times n$ 行列　$\vec{x}=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$　$\vec{b}=\begin{pmatrix}b_1\\ \vdots\\ b_n\end{pmatrix}$

次の連立一次方程式を考える　$A\vec{x}=\vec{b}$

$\det A\neq 0$ のとき $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ についての解は次で与えられる

$$x_i=\frac{1}{\det A}\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,i-1} & b_1 & a_{1,i+1} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n1} & \cdots & a_{n,i-1} & b_n & a_{n,i+1} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}$$

i列目

つまり、$x_i=\frac{1}{\det A}\left|\vec{a_1}, \vec{a_2} \cdots \vec{a_{i-1}}, \vec{b}, \vec{a_{i+1}}, \cdots \vec{a_n}\right|$

ただし、$\vec{a_j}=\begin{pmatrix}a_{1j}\\ \vdots\\ a_{nj}\end{pmatrix}$ である

証明　$\det A\neq 0$ より A には逆行列 A^{-1} が存在する。

逆転公式より

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}\begin{pmatrix}\tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{21} & \cdots & \tilde{a}_{n1}\\ \tilde{a}_{12} & \tilde{a}_{22} & & \tilde{a}_{n2}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \tilde{a}_{1n} & \tilde{a}_{2n} & \cdots & \tilde{a}_{nn}\end{pmatrix}$$

となる。

ただし、$\tilde{a}_{ij}$ は (i,j) 余因子（A から第 i 行と第 j 列を取り除いて得られる $(n-1)$ 次正方行列の行列式に $(-1)^{i+j}$ をかけたもの）である。

与えられた方程式の両辺に左から A^{-1} をかけると、

$$\vec{x}=A^{-1}\vec{b}=\frac{1}{\det A}\begin{pmatrix}\tilde{a}_{11} & \cdots & \tilde{a}_{n1}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \tilde{a}_{1n} & \cdots & \tilde{a}_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_1\\ \vdots\\ b_n\end{pmatrix}$$

$$x_i=\frac{1}{\det A}\times\left(\tilde{a}_{1i}b_1+\tilde{a}_{2i}b_2+\cdots+\tilde{a}_{ni}b_n\right)$$

一方、$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i-1} & b_1 & a_{1i+1} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni-1} & b_n & a_{ni+1} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}$ を i 列で余因子展開する。

$b_1\times\tilde{a}_{1i}+b_2\times\tilde{a}_{2i}+\cdots+b_n\times\tilde{a}_{ni}$ が得られる。

よって、$x_i=\frac{1}{\det A}\times\left|\vec{a_1}, \cdots \vec{a_{i-1}}, \vec{b}, \vec{a_{i+1}}, \cdots \vec{a_n}\right|$ となる。

3次元ベクトルの外積(ベクトル積)

3次元のベクトルにのみ適用されるもの

$\vec{u}, \vec{v}$ 3次元ベクトル

$\vec{u}\times\vec{v}$: 3次元ベクトルを $\vec{u}$ と $\vec{v}$ の外積といい、次のように定義する。

$\vec{u} := \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$, $\vec{v} := \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ としたとき、

$$\vec{u}\times\vec{v} := \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & \vec{e_1} \\ u_2 & v_2 & \vec{e_2} \\ u_3 & v_3 & \vec{e_3} \end{vmatrix}$$

この意味は、

$$\begin{vmatrix} u_1 & v_1 & \vec{e_1} \\ u_2 & v_2 & \vec{e_2} \\ u_3 & v_3 & \vec{e_3} \end{vmatrix} \underset{\text{で展開}}{\overset{\text{3列目}}{=\!=}} \begin{vmatrix} u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix}\vec{e_1} - \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix}\vec{e_2} + \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix}\vec{e_3}$$

ただし、$\vec{e_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{e_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{e_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

補題 外積 $\vec{u}\times\vec{v}$ は次の性質をもつ

(1) $\vec{u}\times\vec{v} = -\vec{v}\times\vec{u}$

(2) $\vec{u}\times(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}\times\vec{v} + \vec{u}\times\vec{w}$

(3) $\lambda(\vec{u}\times\vec{v}) = (\lambda\vec{u})\times\vec{v} = \vec{u}\times(\lambda\vec{v})$

命題

(1) $\vec{u}\times\vec{v}$ は $\vec{u}$ とも $\vec{v}$ とも直交している。

(2) $\vec{u}\times\vec{v}$ の長さは、$\vec{u}$ と $\vec{v}$ が作る平行四辺形の面積に等しい。

(3) $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u}\times\vec{v})$ は右手系をなす。

証明

$\vec{w} := \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$ を3次元ベクトルとする

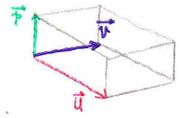
$\vec{u}\times\vec{v}$ と $\vec{w}$ の内積は

$$\begin{vmatrix} u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix} w_1 - \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix} w_2 + \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix} w_3 = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix}$$

(1)

(2) $\vec{p} := \vec{u}\times\vec{v}$ とおき、$\vec{p} := \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$ とする。

$$\underbrace{|\vec{u}\times\vec{v}|^2}_{\text{ベクトルの長さ}} = |\vec{p}|^2 = \underbrace{(\vec{u}\times\vec{v}, \vec{p})}_{\text{内積}} = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & p_1 \\ u_2 & v_2 & p_2 \\ u_3 & v_3 & p_3 \end{vmatrix}$$



これは、$\vec{u}, \vec{v}, \vec{p}$ のつくる平行六面体の体積に等しい。

ところが、$\vec{p}\perp\vec{u}$, $\vec{p}\perp\vec{v}$ だから、体積 = 底面積 × 高さ

= 平行四辺形の面積 × $\vec{p}$ の長さ

∴ $\vec{p}$ の長さ = 平行四辺形の面積

(3) 省略　例: $\vec{e_1}\times\vec{e_2} = \vec{e_3}$

固有値と固有ベクトル（平面ベクトルについて）

2×2行列Aを考えると、これは平面の変換を与える。
この変換を分類したい。

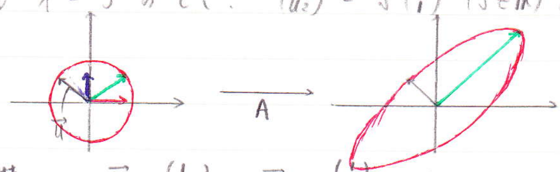
例: $A := \begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}$

この行列は $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ という変換である。

◎ 緑の矢印は何となくスカラー倍されているだけのような気がする。
このように、スカラー倍だけされるベクトルをみつけることができれば、
何かいいことがありそうな気がする。

☆ こういうベクトルを見つけよう。
「Aを左からかけることで、スカラー倍になる」ベクトルを $\vec{u}$ とおく。
つまり、 $A\vec{u} = \lambda\vec{u}$
右辺 $= \lambda E_2 \vec{u}$ とかきかえて、左辺−右辺を計算すると、
$A\vec{u} - \lambda E_2\vec{u} = \vec{0}$ $\boxed{(A-\lambda E_2)\vec{u} = \vec{0}}$
つまり、$\vec{u} \neq \vec{0}$ とすると、これは、$\boxed{\quad}$ という連立一次方程式の自明ではない解になっている
つまり、$A-\lambda E_2$ という2×2行列の行列式は0でなければならない。
$A = \begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}$ なので、$\det(A-\lambda E_2) = \text{------} = (\lambda-1)(\lambda-3)$
よって、$\lambda = 1$ または 3

① $\lambda = 1$ のとき、$\vec{u}$ を求める
$\vec{u}$ は $\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ の解だから $\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix} = t\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ $(t\in\mathbb{R})$ の形をしている。
② $\lambda = 3$ のとき、$\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix} = s\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ $(s\in\mathbb{R})$ の形をしている。



特に、$\vec{v} := \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$、$\vec{w} := \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ とおくと、$A\vec{v} = \vec{v}$、$A\vec{w} = 3\vec{w}$
よって、Aという1次変換は $\vec{v}$ 方向を保ち、$\vec{w}$ 方向を3倍する変換であることがわかる。

一般に、n次正方行列Aに対し、$A\vec{u} = \lambda\vec{u}$ をみたすような、零でないベクトル $\vec{u}$ のことを、Aの固有ベクトルといい、λ を $\vec{u}$ に対応する固有値という。

固有方程式
実際の計算では、$\boxed{\det(A-\lambda E_n) = 0}$ の解 λ が固有値となり、
$(A-\lambda E_n)\vec{u} = \vec{0}$ の解が固有ベクトルとなる。

例 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ とする。

Aの固有値とそれに対応する固有ベクトルを求める。

解 固有方程式は $\begin{vmatrix} 1-x & -1 \\ 1 & 1-x \end{vmatrix} = 0$ より $x^2-2x+2=0$ $x = 1 \pm i$

$x = 1 \pm i$ に対応する固有ベクトルは

$\begin{pmatrix} \mp i & -1 \\ 1 & \mp i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ より、たとえば、$\begin{pmatrix} 1 \\ \mp i \end{pmatrix}$ が固有値 $1 \pm i$ に対応する固有ベクトルである。

注意 1つの固有値に対して、固有ベクトルは無限個ある。

($\because$ $\vec{u}$ が固有ベクトルなら、$a \neq 0$ のとき $a\vec{u}$ も固有ベクトル)

実は、$A = \sqrt{2} \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{4} & -\sin\frac{\pi}{4} \\ \sin\frac{\pi}{4} & \cos\frac{\pi}{4} \end{pmatrix}$ より A は $\frac{\pi}{4}$ 回転と $\sqrt{2}$ 倍の合成である。