力学

Tomonori Fukutani

平成 22 年 8 月 14 日

1　プロローグ

物理学…自然現象の観測に基礎を置く数理科学。

- 理論
- 実験、観測

1.1　惑星の運動

天動説と地動説

プトレマイオス（B.C.2 世紀）ー天動説
火星の逆行現象
仮説：火星は地球の周りを回る天体の周りを回っている。
→金星や水星などの内惑星は説明出来ない。

コペルニクス（16 世紀初頭）ー地動説
火星の逆行現象
仮説：地球よりも大きな軌道を描く火星を地球が追い越している。

ティコ・ブラーエ
20 年に及ぶ天体観測（1577〜1599）

ケプラー
オーストリア、クラーツの数学教師

→ティコ・ブラーエとケプラーがプラハで出会う
→理論と観測が合わさり、ケプラーの法則が生まれる。

1. 惑星は太陽の周りを楕円軌道で回る。

2. 面積速度一定。

3. 惑星の公転周期の 2 乗は、軌道の長半径の 3 乗に比例する。

1.2　地上の物体の運動

ガリレオ (1638)
実験により下の表を得る。

時間	1	2	3	4	5
間隔	1	3	5	7	9
距離	1	4	9	16	25

→距離は時間の 2 乗に比例する。（等加速度運動）
→様々な角度でも同じ結果。
→垂直でも同じだろうと推測（落下）

また、斜面を転がした球は、斜面の角度に依らず初期位置と同じ高さまで上がる
→平坦な面では球は永遠に運動を続ける。
→運動の第一法則（慣性の法則）

$$\text{運動学}\begin{cases}\text{天体の運動}\\ \text{地上の運動}\end{cases} \longrightarrow \text{ニュートン力学}$$

2　運動の記述

2.1　位置、速度、加速度ベクトル

2.1.1　位置ベクトル

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

基本ベクトルとして、

$$\vec{e_x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \vec{e_y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \vec{e_z} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

とすると、

$$\vec{r} = x\vec{e_x} + y\vec{e_y} + z\vec{e_z}$$
$$r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

2.1.2　速度ベクトル

- 物体を質量を持つ点と考える。（質点）
- 質点 P が運動を行う時、位置ベクトル $\vec{r}$ は時刻 t の関数 $\vec{r}(t)$ となる。

$$\begin{aligned}\vec{v} : &= \frac{d\vec{r}}{dt} \\ &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} \\ &= \frac{dx}{dt}\vec{e_x} + \frac{dy}{dt}\vec{e_y} + \frac{dz}{dt}\vec{e_z}\end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \\ \frac{dz}{dt} \end{pmatrix}$$

2.1.3　加速度ベクトル

$$\begin{aligned}\vec{a} : &= \frac{d\vec{v}}{dt} \\ &= \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{d^2x}{dt} \\ \frac{d^2y}{dt} \\ \frac{d^2z}{dt} \end{pmatrix}$$

2.2　３次元空間のベクトルとその演算

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \vec{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix}$$

とすると、

2.2.1　和、差

$$\vec{a} \pm \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \pm b_x \\ a_y \pm b_y \\ a_z \pm b_z \end{pmatrix}$$

2.2.2　スカラー積（内積）

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \\ &= |\vec{a}||\vec{b}| \cos\theta \end{aligned}$$

ただし、$\vec{a}$ と $\vec{b}$ の成す角を　θ とする。

2.2.3　ベクトル積（外積）

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix} \\ \vec{a} \times \vec{b} &= -\vec{b} \times \vec{a} \\ |\vec{a} \times \vec{b}| &= |\vec{a}||\vec{b}| \sin\theta \end{aligned}$$

よって、

$$\vec{e_x} \times \vec{e_x} = \vec{e_y} \times \vec{e_y} = \vec{e_z} \times \vec{e_z} = \vec{0}$$

$$\begin{cases} \vec{e_x} \times \vec{e_y} = \vec{e_z} \\ \vec{e_y} \times \vec{e_z} = \vec{e_x} \\ \vec{e_z} \times \vec{e_x} = \vec{e_y} \end{cases}$$

が成り立つ。
分配法則

$$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$$

三重積

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})$$

2.3 極座標

三次元空間内の点を極座標表示すると、

$$
\begin{aligned}
x &= r\sin\theta\cos\varphi \\
y &= r\sin\theta\sin\varphi \\
z &= r\cos\theta
\end{aligned}
$$

また、r, θ, φ の新しい軸を取り、

$$\vec{A} = A_r\vec{e_r} + A_\theta\vec{e_\theta} + A_\varphi\vec{e_\varphi}$$

と表す。
今、xy 平面において φ 回転を行うと $r-\varphi$ 平面に座標が変換されるので、

$$\begin{pmatrix} A_r \\ A_\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \end{pmatrix}$$

と書ける。よって、

$$\begin{cases} A_r = A_x\cos\varphi + A_y\sin\varphi \\ A_\varphi = -A_x\sin\varphi + A_y\cos\varphi \end{cases}$$

が成り立つ。

また、速度ベクトルは

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{pmatrix} \\
&= \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \dot{r}\cos\varphi - r\dot{\varphi}\sin\varphi \\ \dot{r}\sin\varphi + r\dot{\varphi}\cos\varphi \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

よって、

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} v_r \\ v_\varphi \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \dot{r} \\ r\dot{\varphi} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

と表され、加速度ベクトルは、

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{d^2x}{dt^2} \\ \frac{d^2y}{dt^2} \end{pmatrix} \\
&= \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} \dot{r}\cos\varphi - r\dot{\varphi}\sin\varphi \\ \dot{r}\sin\varphi + r\dot{\varphi}\cos\varphi \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \ddot{r}\cos\varphi - 2\dot{r}\dot{\varphi}\sin\varphi - r\ddot{\varphi}\sin\varphi - r\dot{\varphi}^2\cos\varphi \\ \ddot{r}\sin\varphi + 2\dot{r}\dot{\varphi}\cos\varphi + r\ddot{\varphi}\cos\varphi - r\dot{\varphi}^2\sin\varphi \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

よって、

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} a_r \\ a_\varphi \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 \\ 2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 \\ \frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\varphi}) \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

と表される。

2.4　等速円運動

半径：$r_0 =$ 一定

角速度：$\omega =$ 一定 とすると、

$$
\begin{aligned}
\vec{r} &= \begin{pmatrix} r_0\cos\omega t \\ r_0\sin\omega t \end{pmatrix} \\
\vec{v} &= \frac{d}{dt}\vec{r} \\
&= \begin{pmatrix} -r_0\omega\sin\omega t \\ r_0\omega\cos\omega t \end{pmatrix} \\
\vec{r}\cdot\vec{v} &= 0 \\
|\vec{v}| &= r_0\omega \\
\vec{a} &= \frac{d}{dt}\vec{v} \\
&= \begin{pmatrix} -r_0\omega^2\cos\omega t \\ -r_0\omega^2\sin\omega t \end{pmatrix} \\
&= -\omega^2\vec{r}
\end{aligned}
$$

となる。

3　運動の法則

3.1　ニュートンの三法則

1. 慣性の法則
2. 運動方程式
3. 作用、反作用の法則

慣性の法則が成り立つ系を慣性系と言い、慣性系に対して静止または等速直線運動している系も慣性系となる。
ここで、地球の表面は近似的に慣性系とみなせる。（地球全体に対して起こる台風のようなものはその限りではない。）

3.2　運動量と力

運動量ベクトル $\vec{p} := m\vec{v}$ (m : 質量) とすると、

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} \ (\vec{F} : \text{力})$$

であり、

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = m\frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{dm}{dt}\vec{v}$$

だから、m が一定ならば、

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = m\vec{a}$$

よって、

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

が成り立つ。
従って、

$$m\frac{d^2}{dt^2}r(t) = F(\vec{r}, \frac{d\vec{r}}{dt}, t)$$

が与えられた時、初期条件：
$t = t_0$ の時 $\vec{r} = \vec{r_0}, \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v_0}$
または、
$t = t_1$ で $r = r_1$、$t = t_2$ で $r = r_2$
が与えられると任意の時刻における位置 $\vec{r}$ が一意的に決まる。
$\longrightarrow$　因果律

力積：力が極めて短時間しか働かない場合、積分型の運動方程式が有効にな

る。
$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$ より、

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt &= \int_{t_1}^{t_2} \frac{d\vec{p}}{dt} dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} dp \\ &= p_2 - p_1 \end{aligned}$$

となる。

4　運動方程式の解法

4.1　放物体の運動

運動方程式 $m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{F}$ において、$\vec{F}$ が x, y, z で独立であれば、

$$\begin{cases} m\frac{d^2x}{dt^2} = \vec{F}_x = 0 \\ m\frac{d^2y}{dt^2} = \vec{F}_y = 0 \\ m\frac{d^2z}{dt^2} = \vec{F}_z = -mg \end{cases}$$

と分解でき、初期条件を

$$\begin{cases} \vec{r_0} = (0, 0, 0) \\ \vec{v_0} = (v_{0x}, 0, v_{0z}) \\ |\vec{v_0}| = v_0 \end{cases}$$

とすると、両辺を積分することで、

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = v_{0x} \\ \frac{dy}{dt} = 0 \\ \frac{dz}{dt} = -gt + v_{0z} \end{cases} \qquad \begin{cases} x = v_{0x}t \\ y = 0 \\ z = -\frac{1}{2}gt^2 + v_{0z}t \end{cases}$$

と求まる。

射出角度を θ とすると、

$$v_{0x} = v_0 \cos\theta, v_{0z} = v_0 \sin\theta$$

より t を消去すると、

$$z = -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2\theta}\left(x - \frac{v_0^2 \sin 2\theta}{2g}\right)^2 + \frac{v_0^2 \tan^2\theta}{8g}$$

を得る。

4.2 空気抵抗を含む落下運動

4.2.1 粘性抵抗

…速度に比例する抵抗力

運動方程式 $m\frac{dv}{dt} = mg - kmv$ を解く。（k : 定数）

$$
\begin{aligned}
&m\frac{dv}{dt} = mg - kmv \\
&\frac{dv}{dt} = g - kv = -k(v - \frac{g}{k}) \\
&\frac{dv}{v - \frac{g}{k}} = -kdt \\
&\int \frac{dv}{v - \frac{g}{k}} = -\int kdt \\
&\log(v - \frac{g}{k}) = -kt + C_1 (C_1 : \text{定数}) \\
&v - \frac{g}{k} = e^{-kt+C_1} = C_2 e^{-kt} (C_2 : \text{定数})
\end{aligned}
$$

初期条件：$t = 0$ で $v = v_0$ とすると、$C_2 = v_0 - \frac{g}{k}$ だから、

$$
\begin{aligned}
v &= \frac{g}{k} + (v_0 - \frac{g}{k})e^{-kt} \\
y &= \int vdt \\
&= \frac{g}{k}t - \frac{1}{k}(v_0 - \frac{g}{k})e^{-kt} + C_3 (C_3 : \text{定数})
\end{aligned}
$$

初期条件：$t = 0$ で $y = 0$ とすると、$C_2 = \frac{1}{k}(v_0 - \frac{g}{k})$ だから、

$$
y = \frac{g}{k}t + \frac{1}{k}(v_0 - \frac{g}{k})(1 - e^{-kt})
$$

と求まる。

4.2.2 慣性抵抗

…速度の 2 乗に比例する抵抗力

(a) 下向きに投げる

運動方程式 $m\frac{dv}{dt}=mg-kmv^2$ を解く。(k : 定数)

$$
\begin{aligned}
&m\frac{dv}{dt}=mg-kmv^2\\
&-kdt=\frac{dv}{v^2-\frac{g}{k}}=\frac{1}{2\alpha}(\frac{1}{v-\alpha}-\frac{1}{v+\alpha})dv\ (\sqrt{\frac{g}{k}}=\alpha\text{とおいた。})\\
&-kt+C_1=\frac{1}{2\alpha}(\log(v-\alpha)-\log(v+\alpha))=\frac{1}{2\alpha}\log\frac{v-\alpha}{v+\alpha}(C_1:\text{定数})\\
&\frac{v-\alpha}{v+\alpha}=C_2e^{-2\alpha kt}(C_2:\text{定数})
\end{aligned}
$$

初期条件：$t=0$ で $v=v_0$ とすると、$C_2=\frac{v_0-\alpha}{v_0+\alpha}$ だから、$C_2e^{-2\alpha kt}=\beta$ とおくと、

$$\frac{v-\alpha}{v+\alpha}=\beta$$

より、これを v について解くと、

$$
\begin{aligned}
v &= \frac{1+\beta}{1-\beta}\alpha\\
&= \frac{1+\frac{v_0-\alpha}{v_0+\alpha}e^{-2\alpha kt}}{1-\frac{v_0-\alpha}{v_0+\alpha}e^{-2\alpha kt}}\alpha\\
&= \frac{v_0+\alpha+(v_0-\alpha)e^{-2\alpha kt}}{v_0+\alpha-(v_0-\alpha)e^{-2\alpha kt}}\alpha\\
&= \frac{v_0(1+e^{-2\alpha kt})+\alpha(1-e^{-2\alpha kt})}{v_0(1-e^{-2\alpha kt})+\alpha(1+e^{-2\alpha kt})}\alpha\\
&= \frac{v_0+\alpha\frac{e^{\alpha kt}-e^{-\alpha kt}}{e^{\alpha kt}+e^{-\alpha kt}}}{v_0\frac{e^{\alpha kt}-e^{-\alpha kt}}{e^{\alpha kt}+e^{-\alpha kt}}+\alpha}\alpha
\end{aligned}
$$

ここで、双曲線関数を導入する。
双曲線関数とは

$$
\begin{cases}
\tanh x=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}\\
\cosh x=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})\\
\sinh x=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x}) \qquad (e:\text{自然対数の底})
\end{cases}
$$

で定義されるものであり、三角関数と似た以下の性質を持つ。

$$
\begin{cases}
\tanh x=\frac{\sinh x}{\cosh x}\\
\cosh^2 x-\sinh^2 x=1\\
\frac{d}{dx}\cosh x=\sinh x\\
\frac{d}{dx}\sinh x=\cosh x
\end{cases}
$$

従って、

$$\begin{aligned} v &= \frac{\alpha(v_0+\alpha\tanh\alpha kt)}{v_0\tanh\alpha kt+\alpha} \\ &= \frac{\alpha(v_0\cosh\alpha kt+\alpha\sinh\alpha kt)}{v_0\sinh\alpha kt+\alpha\cosh\alpha kt} \\ &\to \alpha=\sqrt{\frac{g}{k}}(t\to\infty)(\because \lim_{x\to\infty}\tanh x=1) \end{aligned}$$

よって、

$$v_\infty=\sqrt{\frac{g}{k}}(\text{終端速度})$$

また、上の第二式を両辺積分することで、

$$\begin{aligned} y &= \{\alpha\log(v_0\sinh\alpha kt+\alpha\cosh\alpha kt)\}\frac{1}{\alpha k}+C_3(C_3:\text{定数}) \\ &= \frac{1}{k}\log(v_0\sinh\alpha kt+\alpha\cosh\alpha kt)+C_3 \end{aligned}$$

初期条件：$t=0$ で $y=0$ とすると、$C_3=-\frac{1}{k}\log\alpha$ だから、

$$y=\frac{1}{k}\log(\frac{v_0}{\alpha}\sinh\alpha kt+\cosh\alpha kt)$$

と求まる。

今、$k\to 0$ とした時について考える。

$$\begin{aligned} \lim_{k\to0}y &= \lim_{k\to0}\frac{1}{k}\log(v_0\sqrt{\frac{k}{g}}\sinh\sqrt{kg}t+\cosh\sqrt{kg}t) \\ &= \lim_{k\to0}\frac{1}{k}\frac{\log(v_0\sqrt{\frac{k}{g}}\sinh\sqrt{kg}t+\cosh\sqrt{kg}t)}{v_0\sqrt{\frac{k}{g}}\sinh\sqrt{kg}t+\cosh\sqrt{kg}t-1}(v_0\sqrt{\frac{k}{g}}\sinh\sqrt{kg}t+\cosh\sqrt{kg}t-1) \\ &= \lim_{k\to0}\frac{1}{k}\{\frac{1}{2}v_0\sqrt{\frac{k}{g}}(e^{\sqrt{kg}t}-e^{-\sqrt{kg}t})+\frac{1}{2}(e^{\sqrt{kg}t}+e^{-\sqrt{kg}t})-1\}\ (\because \lim_{x\to0}\frac{\log x}{x-1}=1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{k\to0}\frac{1}{k}\{\frac{1}{2}v_0\sqrt{\frac{k}{g}}(e^{\sqrt{kg}t}-e^{-\sqrt{kg}t})\} &= \lim_{s\to0}\frac{1}{2}v_0\sqrt{\frac{1}{g}}\frac{e^{\sqrt{g}st}-e^{-\sqrt{g}st}}{s}(\sqrt{k}=s) \\ &= \lim_{s\to0}\frac{1}{2}v_0\sqrt{\frac{1}{g}}(\sqrt{g}te^{\sqrt{g}st}+\sqrt{g}te^{-\sqrt{g}st})\ (\text{ロピタルの定理}) \\ &= v_0t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{k\to0}\frac{1}{k}\{\frac{1}{2}(e^{\sqrt{kg}t}+e^{-\sqrt{kg}t})-1\} &= \lim_{s\to0}\frac{1}{2s^2}(e^{\sqrt{g}st}+e^{-\sqrt{g}st}-2)(\sqrt{k}=s) \\ &= \lim_{s\to0}\frac{1}{4s}(\sqrt{g}te^{\sqrt{g}st}-\sqrt{g}te^{-\sqrt{g}st})\ (\text{ロピタルの定理}) \\ &= \lim_{s\to0}\frac{1}{4}(gt^2e^{\sqrt{g}st}+gt^2e^{-\sqrt{g}st})\ (\text{ロピタルの定理}) \\ &= \frac{1}{2}gt^2 \end{aligned}$$

よって、

$$\lim_{k\to 0} y = v_0 t + \frac{1}{2} g t^2$$

となり、これは抵抗を考えない時の位置と一致する。

(b) 上向きに投げる

運動方程式 $m\frac{dv}{dt} = mg + kmv^2$ を解く。（k : 定数）

$$\begin{aligned} m\frac{dv}{dt} &= mg + kmv^2 \\ \frac{dv}{v^2+\alpha^2} &= kdt\ (\sqrt{\frac{g}{k}} = \alpha \text{とおいた。}) \end{aligned}$$

$v = \alpha \tan\theta (-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2})$ とおくと、

$dv = \frac{\alpha}{cos^2\theta} d\theta$ だから、

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\alpha^2(\tan^2\theta+1)} \cdot \frac{\alpha}{cos^2\theta} \cdot d\theta = kdt \\ &d\theta = \alpha k dt \\ &\theta = \alpha kt + C_1 (C_1 : \text{定数}) \\ &v = \alpha \tan(\alpha kt + C_1) \end{aligned}$$

初期条件：$t = 0$ で $v = -v_0$ とすると、$\tan C_1 = -\frac{v_0}{\alpha}$ だから、

$$\begin{aligned} v &= \alpha \tan(\alpha kt + C_1) \\ &= -\alpha \cdot \frac{\tan\alpha kt + \tan C_1}{1 - \tan\alpha kt \tan C_1} \\ &= \alpha \cdot \frac{v_0 - \alpha\tan\alpha kt}{\alpha + v_0 \tan\alpha kt} \end{aligned}$$

よって、$v = 0$ となるのは、$v_0 = \alpha \tan\alpha kt$ のときだから、

この時の $t = t_1$ とすると、

$$t_1 = \frac{1}{\alpha k} \tan^{-1} \frac{v_0}{\alpha}$$

であり、$t > t_1$ の時、$v_0 = 0$ で下向きに投げたと考えて、

$$v = \alpha \tanh(\alpha k(t - t_1))(t > t_1)$$

となる。また、

$$\begin{aligned} v &= -\alpha \cdot \frac{v_0 - \alpha\tan\alpha kt}{\alpha + v_0 \tan\alpha kt} \\ &= -\alpha \cdot \frac{v_0 \cos\alpha kt - \alpha \sin\alpha kt}{v_0 \sin\alpha kt + \alpha\cos\alpha kt} \end{aligned}$$

より、

$$
\begin{aligned}
y &= -\alpha \cdot \frac{1}{\alpha k} \log(v_0 \sin \alpha kt + \alpha \cos \alpha kt) + C_2 (C_2 : \text{定数}) \\
&= -\frac{1}{k} \log(v_0 \sin \alpha kt + \alpha \cos \alpha kt) + C_2
\end{aligned}
$$

初期条件：$t = 0$ で $y = 0$ とすると、$C_2 = \frac{1}{k} \log \alpha$ だから、

$$
y = -\frac{1}{k} \log(\sin \alpha kt + \frac{v_0}{\alpha} \cos \alpha kt)
$$

と求まる。

(c) 斜めに投げる（粘性抵抗）
次の二つの運動方程式を解く。

$$
\begin{cases}
m\frac{dv_x}{dt} = -mkv \cos \theta = -mkv_x \\
m\frac{dv_y}{dt} = -mkv \sin \theta - mg = -mkv_y - mg
\end{cases}
$$

初期条件：$t = 0$ で $v_x = v_{x_0}$,$v_y = v_{y_0}$ とすると、

$$
\begin{cases}
v_x = v_{x_0} e^{-kt} \\
v_y = (v_{y_0} + \frac{g}{k}) e^{-kt} - \frac{g}{k}
\end{cases}
$$

初期条件：$t = 0$ で $x = y = 0$ とすると、

$$
\begin{cases}
x = \frac{v_{x_0}}{k}(1 - e^{-kt}) \\
y = \frac{1}{k}(v_{y_0} + \frac{g}{k})(1 - e^{-kt}) - \frac{g}{k} t
\end{cases}
$$

となる。
ちなみに慣性抵抗の場合は方程式を解くことが出来ない。

4.3 ばね振り子

4.3.1 単振動

運動方程式 $ma = -Kx$ を解く。（K : ばね定数）
$\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m}}$ とおくと、$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0$
これを解くと、

$$
\begin{aligned}
x &= A \sin(\omega_0 t + B) \\
\frac{2\pi}{\omega_0} &= T : \text{周期} \\
\omega_0 &: \text{角振動数} \\
\frac{1}{T} &= \iota : \text{振動数}
\end{aligned}
$$

4.3.2 減衰運動

運動方程式 $ma = -Kx - 2mkv$ を解く。(k : 摩擦定数)

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2k\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0 \text{（斉次方程式）}$$

$x = e^{\lambda t}$ とおくと、$\frac{dx}{dt} = \lambda e^{\lambda t}, \frac{d^2x}{dt^2} = \lambda^2 e^{\lambda t}$ より、

$$\begin{aligned}&\lambda^2 + 2k\lambda + \omega_0^2 = 0\\&\lambda = -k \pm \sqrt{k^2 - \omega_0^2}(= \alpha, \beta \text{とする。})\end{aligned}$$

よって、

$$x = Ae^{\alpha t} + Be^{\beta t}$$

となる。

(1)$k < \omega_0$ の時

$$x = e^{-kt}(Ae^{\gamma it} + Be^{\gamma it}) \ (\gamma = \sqrt{\omega_0^2 - k^2})$$

オイラーの公式 $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ より、

$$\begin{aligned}x &= e^{-kt}(C\cos\gamma t + D\sin\gamma t)\\&= ae^{-kt}\sin(\gamma t + \alpha) \text{（減衰運動）}\end{aligned}$$

となる。

(2)$k = \omega_0$ の時

$x = B(t)e^{\lambda t} = B(t)e^{-kt}$ とおくと、

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= B'(t)e^{-kt} - kB(t)e^{-kt}\\\frac{d^2x}{dt^2} &= B''(t)e^{-kt} - 2kB'(t)e^{-kt} + k^2B(t)e^{-kt}\end{aligned}$$

を斉次方程式に代入して、$\frac{d^2}{dt^2}B(t) = 0$ を得るので、

$$B(t) = Ct + D$$

よって、

$$x = (Ct + D)e^{-kt}$$

となる。

4.3.3 強制振動

(1)$X = X_0 \sin\omega t$ の時
運動方程式 $m\frac{d^2x}{dt^2} = -Kx + X_0 \sin\omega t$ を解く。

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = \frac{X_0}{m}\sin\omega t \text{（斉次方程式）}$$

ここで、右辺を 0 とした時の斉次方程式の解は、$x = A\sin(\omega_0 t + B)$
また、$x = C\sin\omega t$ とおいて、斉次方程式に代入すると、

$$-C\omega^2 \sin\omega t + C\omega_0^2 \sin\omega t = \frac{X_0}{m}\sin\omega t$$

よって、$C = \frac{X_0}{m(\omega_0^2 - \omega_0)}$ と求まるので、

$$x = A\sin(\omega_0 t + B) + \frac{X_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}\sin\omega t$$

となる。
この時、右辺第一項を一般解、右辺第二項を特解という。
また、特解の形より、$\omega_0 = \omega$ の時に共振、共鳴が起きる。

(2) さらに粘性抵抗が働く場合
運動方程式 $m\frac{d^2x}{dt^2} = -Kx + X_0 \sin\omega t - 2kv$ を解く。

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2k\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{X_0}{m}\sin\omega t \text{（斉次方程式）}$$

上と同様に、一般解は、$x = ae^{-kt}\sin(\gamma t + \alpha)$ である。

次に特解を求めるために、$x = Ce^{i\omega t} = C(\cos\omega t + i\sin\omega t)$ とおく。
$\sin\omega t = i\cos\omega t - ie^{i\omega t}$ より、
斉次方程式の実部について解いて、

$$C(-\omega^2 + 2ik\omega + \omega_0^2)e^{i\omega t} = -i\frac{X_0}{m}e^{i\omega t}$$

よって、

$$\begin{aligned} C &= -i\frac{X_0}{m}\frac{1}{-\omega^2 + 2ik\omega + \omega_0^2} \\ &= -i\frac{X_0}{m}\frac{\omega_0^2 - \omega^2 - 2ik\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4k^2\omega^2} \end{aligned}$$

よって、x は実数だから、

$$\begin{aligned} x &= \frac{X_0}{m}\frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4k^2\omega^2}\{(\omega_0^2 - \omega^2)\sin\omega t - 2k\omega\cos\omega t\} \\ &= \frac{X_0}{m}\frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4k^2\omega^2}}\sin(\omega t - \varphi) \text{ (ただし、}\tan\varphi = \frac{2k\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}\text{)} \end{aligned}$$

よって、一般解と特解を合わせて、

$$x = ae^{-kt}\sin(\gamma t + \alpha) + \frac{X_0}{m}\frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4k^2\omega^2}}\sin(\omega t - \varphi)$$

となる。

この時、振幅が最大となるのは、$(\omega_0^2-\omega^2)^2+4k^2\omega^2$ が最小となる時だから、

$$\begin{aligned}(\omega_0^2-\omega^2)^2+4k^2\omega^2 &= \omega^4+2(2k^2-\omega_0^2)\omega^2+\omega_0^4\\ &= (\omega^2-(\omega_0^2-2k^2))^2+\omega_0^4-(\omega_0^2-2k^2)^2\end{aligned}$$

より、$\omega = \sqrt{\omega_0^2-2k^2}$ のときである。

5　力学的エネルギー

5.1　運動エネルギーと仕事

仕事 W は、$\vec{F}$ と $\Delta\vec{r}$ が成す角を θ として、

$$\begin{aligned}\Delta W &= \vec{F}\cdot\Delta\vec{r}\\ &= |\vec{F}||\Delta\vec{r}|\cos\theta\end{aligned}$$

で表される。
よって、等速直線運動、等速円運動では共に、

$$\begin{aligned}\Delta W &= m\frac{d^2r}{dt^2}\cdot\Delta\vec{r}\\ &= |\vec{F}||\Delta\vec{r}|\cos\frac{\pi}{2}\\ &= 0\end{aligned}$$

となるので、双方共に力が仕事をしない運動と見ることが出来る。

5.2　運動エネルギー

A から B までの経路 C を微小区間 Δr_i に分割すると、

$$\lim_{\Delta r_i\to 0}\sum_i \vec{F_i}\cdot\Delta\vec{r_i} = \int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}(\text{線積分})$$

$\vec{F} = m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}, \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}d\vec{r} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\frac{d\vec{r}}{dt}dt = \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}(\frac{d\vec{r}}{dt})^2\right]dt$ より、

$$\begin{aligned}\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r} &= m\int\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}(\frac{d\vec{r}}{dt})^2\right]dt\\ &= \frac{1}{2}m\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)^2_{t=t_B} - \frac{1}{2}m\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)^2_{t=t_A}\end{aligned}$$

よって、

$$
\begin{aligned}
T &= \frac{1}{2}m\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)^2 : \text{運動エネルギー} \\
W &= \int_C \vec{F}\cdot d\vec{r} : \text{仕事}
\end{aligned}
$$

が導かれる。

5.3 保存力場

$\vec{F} = mg\vec{e_z}$ とする。経路 $\begin{cases} C_1 : A \to B \\ C_2 : A \to D \to B \\ C_3 : A \to B\ (\text{半円}) \end{cases}$ について仕事を考える

と、

$C_1 : d\vec{r} = \vec{e_z}dz$ より、

$$
\begin{aligned}
W_1 &= \int_{C_1} \vec{F}\cdot d\vec{r} \\
&= \int_a^{-a} -mg|\vec{e_z}|^2 dz \\
&= 2mga
\end{aligned}
$$

$C_2 : \vec{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ -mg \end{pmatrix}, d\vec{r} = \begin{pmatrix} dx \\ dz \end{pmatrix}$ より、

$$
\begin{aligned}
W_2 &= \int_{AD+DB} \vec{F}\cdot d\vec{r} \\
&= \int_{AD} -mgdz \\
&= 2mga
\end{aligned}
$$

$C_3 : \vec{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ -mg \end{pmatrix}, \vec{r} = \begin{pmatrix} -a\cos\theta \\ a\sin\theta \end{pmatrix}, d\vec{r} = \begin{pmatrix} -a\cos\theta d\theta \\ a\sin\theta d\theta \end{pmatrix}$ より、

$$
\begin{aligned}
W_3 &= \int_{C_3} \vec{F}\cdot d\vec{r} \\
&= mga\int_0^{\pi} \sin\theta d\theta \\
&= 2mga
\end{aligned}
$$

よって、重力による仕事は経路に依らないと推測できる。

質点の運動において、力 $\vec{F}$ のする仕事が出発点と到達点の位置だけで決まり、途中の経路に依らない場合 $\vec{F}$ は保存力であると言う。つまり、

$$\int_{A\to P\to B} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{A\to Q\to B} \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

であれば、$\vec{F}$ は保存力。

5.4 力学的エネルギー保存則

5.4.1 偏微分

一変数関数の微分係数

$$\frac{df}{dx} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

二変数関数の微分係数

$$\begin{aligned}
f_x &= \frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x, y)-f(x,y)}{\Delta x}\\
f_y &= \frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x, y+\Delta y)-f(x,y)}{\Delta y}\\
f_{xx} &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, f_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}, f_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}, f_{yx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}
\end{aligned}$$

f_{xy}, f_{yx} が共に連続ならば、$f_{xy} = f_{yx}$

$$\begin{aligned}
\Delta x &= f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y)\\
&= \frac{f(x+\Delta x, y+\Delta y)-f(x, y+\Delta y)}{\Delta x}\Delta x + \frac{f(x, y+\Delta y)-f(x,y)}{\Delta y}\Delta y\\
&= \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy
\end{aligned}$$

5.4.2 力学的エネルギー保存則

F_x, F_y, F_z が一価関数 $U(x,y,z)$ で与えられる場合、

$$F_x = -\frac{\partial}{\partial x}U(x,y,z), F_y = -\frac{\partial}{\partial y}U(x,y,z), F_z = -\frac{\partial}{\partial z}U(x,y,z)$$

よって、

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}mv_2^2-\frac{1}{2}mv_1^2 &= \int_{P_1}^{P_2}\vec{F}\cdot d\vec{r}\\ &= \int_{P_1}^{P_2}(F_x dx+F_y dy+F_z dz)\\ &= -\int_{P_1}^{P_2}(\frac{\partial U}{\partial x}dx+\frac{\partial U}{\partial y}dy+\frac{\partial U}{\partial z}dz)\\ &= -\int_{P_1}^{P_2}dU\\ &= U(P_1)-U(P_2)\end{aligned}$$

よって、

$$U(P_1)+\frac{1}{2}mv_1^2=U(P_2)+\frac{1}{2}mv_2^2=(\text{一定})$$

F_x, F_y, F_z が一価関数 $U(x,y,z)$ から求まる時、P_1 から P_2 までの経路に依らず、積分が求まる。

$$\begin{aligned}E &: \text{力学的エネルギー}\\ \frac{1}{2}mv^2 &: \text{運動エネルギー}\\ U &: \text{位置エネルギー}\end{aligned}$$

質点が保存力場で運動する時、力学的エネルギーは保存される。

例

(1) 落体運動

$$F_y=-mg=-\frac{\partial}{\partial y}U$$

よって、

$$U=mgy+C\ (C:\text{定数})$$

初期条件：$y=0$ で $U=0$ とすると、$C=0$ より、

$$U=mgy, E=\frac{1}{2}mv^2+mgy$$

となる。

(2) 放物運動

$$F_x=0=-\frac{\partial}{\partial x}U, F_y=-mg=-\frac{\partial}{\partial y}U$$

よって、

$$U=mgy+C\ (C:\text{定数})$$

初期条件：$y=0$ で $U=0$ とすると、$C=0$ より、

$$U=mgy, E=\frac{1}{2}mv^2+mgy$$

となる。

(3) ばねの振動

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx, x = A\sin(\omega_0 + \alpha)$$

よって、変形して、

$$\begin{aligned} -kxdx &= m\frac{d^2x}{dt^2}\frac{dx}{dt} \\ &= \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}m(\frac{dx}{dt})^2\right]dt \end{aligned}$$

だから、初期条件：$t = 0$ で $x = a$ として両辺積分して、

$$-k\int_a^x xdx = \frac{1}{2}m\int_0^t \frac{d}{dt}\left[(\frac{dx}{dt})^2\right]dt$$

より、

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}ka^2 = E \text{（一定）}$$

となる。

5.5 振り子

軌道に対して垂直方向には質点に対する仕事は 0 である。
以前導いたように、極座標表示すると、

$$\begin{cases} v_r = \dot{r} \\ v_\theta = r\dot{\theta} \end{cases} \quad \begin{cases} a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \\ a_\theta = \frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) \end{cases}$$

だから、r 方向と θ 方向に関して運動方程式を立てると、

$$\begin{cases} m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = mg\cos\theta - T \\ m\frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) = -mg\sin\theta \end{cases}$$

$r = l, \dot{r} = \ddot{r} = 0$ より、

$$\begin{cases} T = mg\cos\theta + ml\dot{\theta}^2 \\ ml\ddot{\theta} = -mg\sin\theta \end{cases}$$

第二式の両辺に $l\dot{\theta}dt$ を掛けると、

$$ml\ddot{\theta}(l\dot{\theta}dt) = -mg\sin\theta(l\dot{\theta}dt)$$

これを変形すると、

$$\text{左辺} = ml^2\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\dot{\theta}^2\right)dt$$
$$\text{右辺} = -mgl\sin\theta d\theta$$

より、初期条件：$t=0$ で $\theta=\theta_a, \dot{\theta}=0$ として両辺積分して、

$$\frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2=-mgl(\cos\theta_a-\cos\theta)$$

よって、$v_\theta=r\dot{\theta}=l\dot{\theta}$ より、

$$\frac{1}{2}mv_\theta^2-mgl\cos\theta=-mgl\cos\theta_a=E\ (\text{一定})$$

となる。この時左辺第一項が運動エネルギー、左辺第二項が位置エネルギーを表す。

振動が小さい場合、$\sin\theta\sim\theta$ と近似出来るので、

$$ml\ddot{\theta}=-mg\theta$$

となり、

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}=-\omega_0^2\theta\ (\omega_0=\sqrt{\frac{g}{l}})$$

だから、単振動の式になり、

$$\theta=A\sin(\omega_0t+\alpha)$$

と求まる。また、周期 $T=\frac{2\pi}{\omega_0}=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$（一定）となる。（振り子の等時性）

6　万有引力

6.1　角運動量

$$\vec{L}:=\vec{r}\times\vec{p}(\text{角運動量ベクトル})\ (\vec{p}=m\frac{dr}{dt})$$

と定義すると、

$$\begin{cases}\vec{L}=\vec{0}\Rightarrow\vec{r}//\vec{p}\\ \vec{L}\neq\vec{0}\Rightarrow\vec{r}\text{は}\vec{p}\text{に垂直な成分を持つ}\Rightarrow\text{原点}\ O\ \text{から見て回転している。}\end{cases}$$

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{L}}{dt}&=\frac{d\vec{r}}{dt}\times\vec{p}+\frac{d\vec{p}}{dt}\times\vec{r}\\&=\vec{r}\times\vec{F}\\&=\vec{N}\ (\text{力}\vec{F}\text{の能率})\end{aligned}$$

* 中心力の場合

$$\text{中心力}\cdots\begin{cases}\text{力の源と質点を結ぶ直線に沿って働く}\\ \text{距離の関数としての力}\end{cases}$$

（例）クーロン力、万有引力

力の源を原点 O にとると、

$$\vec{N} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{0} \quad \therefore \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{0}$$

よって、

$$\vec{L} = \vec{L_0}(\text{一定})\ (\text{角運動量保存})$$

質点が O を通り $\vec{L_0}$ に垂直な平面内で運動を続ける時、
$\vec{r}$ が微小時間 dt に描く面積 dS は、

$$dS = \frac{1}{2}|\vec{r} \times d\vec{r}| = \frac{1}{2}|\vec{r} \times \vec{v}dt|$$

よって、面積速度 $\frac{dS}{dt}$ は、

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= \frac{1}{2}|\vec{r} \times \vec{v}| \\ &= \frac{1}{2m}|\vec{r} \times \vec{p}| \\ &= \frac{1}{2m}|\vec{L_0}|\ (\text{一定}) \end{aligned}$$

よって、中心力のもとでは、力の源のまわりの面積速度は一定。

6.2　万有引力の法則 (1687)

距離の逆 2 乗に比例する力

$F(r) = G\dfrac{Mm}{r^2}$ (G : 万有引力定数、$G = 6.67428 \times 10^{-11}(Nm^2/kg^2)(2009)$)

よって、運動方程式を立てると、

$$\begin{cases} m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = -G\frac{Mm}{r^2} \\ m\frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) = 0 \end{cases}$$

6.2.1　面積速度

$\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) = 0$ より、$r^2\dot{\theta}$ が一定だから、

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= \frac{1}{2}|\vec{r} \times \vec{v}| \\ &= \frac{1}{2}rv_0 \\ &= \frac{1}{2}r^2\dot{\theta}(\text{一定})\ (\text{以降} = \frac{1}{2}h\ \text{とおく}) \end{aligned}$$

よって、面積速度一定（ケプラーの第二法則）

6.2.2 楕円軌道

$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -G\frac{M}{r^2}, \dot{\theta} = \frac{h}{r^2}$（$h$：定数）より、

$$\ddot{r} - \frac{h^2}{r^3} = -G\frac{M}{r^2}$$

ここで、

$$\begin{aligned} \dot{r} &= \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \frac{h}{r^2}\frac{dr}{d\theta} \\ \ddot{r} &= \frac{d}{dt}\frac{dr}{dt} = \frac{h^2}{r^4}\frac{d}{d\theta}\frac{dr}{d\theta} \end{aligned}$$

を代入して、

$$\frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\theta}\right) - \frac{1}{r} = -G\frac{M}{h^2}$$

ここで、$\frac{1}{r} = u$ とおくと、$\frac{dr}{du} = -\frac{1}{u^2}$ より、$\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\theta} = \frac{1}{r^2}\frac{dr}{du}\frac{du}{d\theta} = -\frac{du}{d\theta}$ だから、

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{GM}{h^2}(= \frac{1}{l}\text{とおく})$$

よって、単振動の形になったので、

$$\frac{1}{r} = u = A\cos\theta + \frac{1}{l}$$

と求まる。よって、

$$r = \frac{l}{lA\cos\theta + 1} = \frac{l}{e\cos\theta + 1} \quad (e = lA : \text{離心率})$$

これは円錐曲線を示しており、e の値によって次のように形が変化する。

$$\begin{cases} \text{円} & (e = 0) \\ \text{楕円} & (0 < e < 1) \\ \text{放物線} & (e = 1) \\ \text{双曲線} & (1 < e) \end{cases}$$

次に、円、楕円になる条件を求める。
式変形を繰り返して、

$$\begin{aligned} & m(\ddot{r} - \frac{h^2}{r^3}) = -G\frac{Mm}{r^2} \\ & m(\ddot{r} - \frac{h^2}{r^3})\dot{r}dt = -G\frac{Mm}{r^2}\dot{r}dt \\ & m\int_0^t(\dot{r}\ddot{r} - \frac{h^2}{r^3}\dot{r})dt = -GMm\int_0^t \frac{\dot{r}}{r^2}dt \\ & \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}m\frac{h^2}{r^2} = \frac{GMm}{r} \end{aligned}$$

よって、

$$\frac{1}{2}m\dot{r}^2+\frac{1}{2}m\frac{h^2}{r^2}-\frac{GMm}{r}=\left[\frac{1}{2}m\dot{r}^2+\frac{1}{2}m\frac{h^2}{r^2}-\frac{GMm}{r}\right]_{t=0}=E\ (一定)$$

$h=r^2\theta$ より、

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}m\dot{r}^2+\frac{1}{2}m\frac{h^2}{r^2}-\frac{GMm}{r} \\ &= \frac{1}{2}mv_r^2+\frac{1}{2}mv_\theta^2-\frac{GMm}{r} \end{aligned}$$

近日点 $(\theta=0)$ において E を求めると、$r=\frac{l}{1+e},\dot{r}=0$ より、

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}m\frac{h^2}{r^2}-\frac{GMm}{r} \\ &= \frac{mh^2}{2}\frac{(1+e)^2}{l^2}-GMm\frac{1+e}{l} \\ &= \frac{mh^2}{2}\frac{(1+e)^2}{l^2}-mh^2\frac{1+e}{l^2}\ (\because\frac{GM}{h^2}=\frac{1}{l}) \\ &= \frac{e^2-1}{2l^2}mh^2 \end{aligned}$$

よって、

$$\begin{cases} E=-\frac{mh^2}{2l} & (e=0)\Rightarrow 円運動 \\ -\frac{mh^2}{2l}<E<0 & (0<e<1)\Rightarrow 楕円運動 \\ E=0 & (e=1) \\ E>0 & (1<e) \end{cases}$$

となる。

6.2.3 ケプラーの第三法則

楕円軌道の長半径の長さを a、短半径の長さを b とする。
$\theta=0$ として、$r_A=\frac{l}{1+e}$,$\theta=\pi$ として、$r_C=\frac{l}{1-e}$ を得るから、

$$a=\frac{r_A+r_C}{2}=\frac{l}{1-e^2}$$

また、焦点距離 OF は、

$$OF=a-r_A=ea$$

さらに、$b^2+(ea)^2=a^2$ より、

$$b^2=a^2-(ea)^2=(1-e^2)a^2=al$$

よって、

$$\begin{aligned} a &= \frac{l}{1-e^2} \\ &= \frac{2l^2}{1-e^2}\frac{1}{2l} \\ &= -\frac{GMm}{2E} \\ b^2 &= al \\ &= -\frac{h^2m}{2E} \end{aligned}$$

面積速度は、$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2}h$ だから、周期 T は、

$$T = \frac{\pi ab}{\frac{1}{2}h} = \frac{2\pi}{h}a(al)^{\frac{1}{2}}$$

なので、

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2 l}{h^2} = \frac{4\pi^2}{GM}(一定)$$

よって、ケプラーの第三法則、惑星の公転周期の 2 乗は、軌道の長半径の 3 乗に比例することが示された。

7 相対運動

物体の運動の法則→座標系の取り方で変わるのか？

7.1 互いに並進運動している座標系

$$\vec{r} = \vec{r'} + \vec{r_0}$$

とすると、

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r'} + \vec{r_0}) = \frac{d\vec{r'}}{dt} + \vec{v_0}$$

より、$\vec{v_0}$ が一定ベクトルの場合、O’ は O に対して等速直線運動をしている。
初期条件：$t = 0$ で $O = O'$ とすると、$\vec{r_0} = \vec{v_0}t$ だから、

$$\vec{r'} = \vec{r} - \vec{v_0}t, \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d^2\vec{r'}}{dt^2}$$

$O - xyz$ 系が慣性系とすると、

$$\vec{F} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d^2\vec{r'}}{dt^2}$$

が成り立つから $t = t'$ の仮定の下で、O’ 系では O 系と同じ物理法則が成り立つ。（運動の法則）
ここで、$t = t', \vec{r'} = \vec{r} - \vec{v_0}t$ の座標変換をガリレイ変換と言う。

7.2 慣性系に対して加速度を持つが、回転していない系

上と同様に、

$$\vec{r} = \vec{r'} + \vec{r_0}, m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{F}$$

とおくと、

$$m\frac{d^2}{dt^2}(\vec{r'} + \vec{r_0}) = \vec{F}$$

より、

$$m\frac{d^2\vec{r'}}{dt^2} = \vec{F} - m\vec{a_0}$$

が成り立つ。
よって、O 系に対して加速度 $\vec{a_0}$ で運動している O' 系では質点に対して見かけの力 $-m\vec{a_0}$ が加わっていると見なさなければニュートンの運動方程式が適用できない。

7.3 慣性系に対して一定の加速度を持つ座標系

O 系:$\vec{e_x}, \vec{e_y}, \vec{e_z}$
O' 系:$\vec{e'_x}, \vec{e'_y}, \vec{e'_z}$
O' 系では $\frac{d\vec{e_x}}{dt} = 0$ だが、$\frac{d\vec{e_x}}{dt} \neq 0$ とする。

7.3.1 角速度ベクトル

回転の角速度：$\vec{\omega}, |\vec{\omega}| = \omega$ とする。
ただし、回転方向は回転軸に平行で右ねじに従うものとする。
$\vec{a}$ が O 系において角速度ベクトル $\vec{\omega}$ の回転をしている場合、$\vec{a}$ の先端は微小時間 dt の間に、$|\vec{a}|\omega \sin\theta dt$ 変位する。ただし、θ は $\vec{a}$ と、$\vec{\omega}$ の回転軸とが成す角度である。
よって、

$$|d\vec{a}| = |\vec{a}|\omega \sin\theta dt$$

より、

$$d\vec{a} = \vec{\omega} \times \vec{a}dt, \therefore \left(\frac{d\vec{a}}{dt}\right)_O = \vec{\omega} \times \vec{a}(O\text{ 系})$$

が成り立つ。
よって、O' 系が O 系に対して角速度ベクトル $\vec{\omega}$ で表される回転をしている時、

$$\left(\frac{d\vec{e'_j}}{dt}\right)_O = \vec{\omega} \times \vec{e'_j}, \left(\frac{d\vec{e'_j}}{dt}\right)'_O = 0 \ (j = x, y, z)$$

となる。

7.3.2　位置ベクトル、速度ベクトル

O 系の観測者：$\vec{r} = x\vec{e_x} + y\vec{e_y} + z\vec{e_z}$
O' 系の観測者：$\vec{r'} = x'\vec{e'_x} + y'\vec{e'_y} + z'\vec{e'_z}$
同じ点を見ているならば、$\vec{r} = \vec{r'}$（原点は一致している）とすると、

$$\vec{v_{O'}} = \left(\frac{d\vec{r'}}{dt}\right)'_O = \frac{dx'}{dt}\vec{e'_x} + \frac{dy'}{dt}\vec{e'_y} + \frac{dz'}{dt}\vec{e'_z}$$

より、

$$\begin{aligned}
\vec{v_O} &= \left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_O \\
&= \left(\frac{d\vec{r'}}{dt}\right)_O \\
&= \left[\frac{dx'}{dt}\vec{e'_x} + \frac{dy'}{dt}\vec{e'_y} + \frac{dz'}{dt}\vec{e'_z}\right]_O + \left[x'\frac{\vec{e'_x}}{dt} + y'\frac{\vec{e'_y}}{dt} + z'\frac{\vec{e'_z}}{dt}\right]_O \\
&= \vec{v_{O'}} + \left[x'\vec{\omega} \times \vec{e'_x} + y'\vec{\omega} \times \vec{e'_y} + z'\vec{\omega} \times \vec{e'_z}\right] \\
&= \vec{v_{O'}} + \vec{\omega} \times \vec{r} \ (\because \vec{r} = \vec{r'})
\end{aligned}$$

7.3.3　加速度ベクトル

速度ベクトルと同様に解いて、

$$\vec{a_{O'}} = \left(\frac{d\vec{v_{O'}}}{dt}\right)'_O = \frac{d^2x'}{dt^2}\vec{e'_x} + \frac{d^2y'}{dt^2}\vec{e'_y} + \frac{d^2z'}{dt^2}\vec{e'_z}$$

より、

$$\begin{aligned}
\vec{a_O} &= \left(\frac{d\vec{v_{O'}}}{dt}\right)_O + \left(\frac{d}{dt}(\vec{\omega} \times \vec{r})\right)_O \\
&= \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{dx'}{dt}\vec{e'_x} + \frac{dy'}{dt}\vec{e'_y} + \frac{dz'}{dt}\vec{e'_z}\right)\right]_O + \left(\frac{d\vec{\omega}}{dt}\right)_O \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_O \\
&= \vec{a_{O'}} + \left[\frac{dx'}{dt}\left(\frac{d\vec{e'_x}}{dt}\right)_O + \frac{dy'}{dt}\left(\frac{d\vec{e'_y}}{dt}\right)_O + \frac{dz'}{dt}\left(\frac{d\vec{e'_z}}{dt}\right)_O\right]_O + \vec{\omega} \times \vec{v_0} \\
&= \vec{a_{O'}} + \vec{\omega} \times \vec{v_{0'}} + \vec{\omega} \times (\vec{v_{O'}} + \vec{\omega} \times \vec{r}) \\
&= \vec{a_{O'}} + 2\vec{\omega} \times \vec{v_{0'}} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})
\end{aligned}$$

この時、右辺第二項がコリオリ力、右辺第三項が遠心力を表している。

7.3.4　フーコーの振り子（参考プリント参照）

パンテオン（タイ、緯度 θ）において南：x、東：y、鉛直方向：z、

$\vec{\omega} = \begin{pmatrix} -\omega\cos\theta \\ 0 \\ \omega\sin\theta \end{pmatrix}$（z 方向にはほとんど動かない）とする。

8　質点系の運動（以下プリント）

9　エピローグ

運動方程式→因果律（過去→現在→未来）

$\updownarrow$

カオス/非常に多くの粒子

…初期条件のわずかな違いによって結果が大きく異なる

cf. 量子力学…ミクロの粒子

確率に支配される