記号論理学 I

担当教官 : 岡本賢吾

2001 年度 夏学期 月曜 2 限

1.　記号論理学って何?

学問の内容というのはなかなか一言で言いつくせるものではありませんが,「記号論理学」を簡単に説明するとすればこんな感じになるでしょうか :「人間の思考過程を記号化 (形式化) し, その中の法則や構造を調べる学問」.「え,『思考過程の記号化』!?」いえいえ, 心配する必要はありません.「A かつ B ならば C である」を「$A \land B \to C$」と表したりするということです. 別に難しくないでしょ?

で, こんなことをして何になるのかというと, 物事の真偽の判断や数学の定理の証明などが機械的な計算だけでできたりするのです (まあ, これを面白いと感じるかどうかは人それぞれでしょうが . . .). また, この記号論理学は数学や計算機科学などで応用されるので, これらの分野に興味がある人にとっては知っておいて損のないことだと思います. **が**, さしあたり皆さんにとって気になるのは試験の点でしょう (笑). というわけで, 能書きはこれくらいにして講義内容の説明に入っていきます.

1.1.　記号化するということ

「記号化」については上で簡単に紹介 (?) しましたが, ここでは文の記号化というのがどんなものなのか, 具体的な例を見ていきます.

■例 1 「夏目漱石は夏目金之助である」

これはつまり「夏目漱石 = 夏目金之助」ということです. だから, 夏目漱石 = a, 夏目金之助 = b などとおいてみれば「$a = b$」と表せます.「なんだ, 馬鹿馬鹿しい」はい, そうですね. では次の例へどうぞ.

■例 2 「夏目漱石は作家である」

これも 夏目漱石 = a, 作家 = c とおけば「$a = c$」と表せる . . . というわけではありません.「作家」は「夏目漱石」や「夏目金之助」と少し性質が違うのです.「夏目漱石」や「夏目金之助」は固有名詞ですが,「作家」は一般名詞 (=ある性質をもったものの**総称**) なので, 作家 = c という風に「1 つのもの」と見なすのは不適当, というわけです. そこで, 記号論理学ではこのような「(一般名詞) である」をまとめて「述語」としてとらえ,「x は作家である」を「$F(x)$」のように表します[*1]. したがって, (夏目漱石 = a として)「夏目漱石は作家である」は「$F(a)$」となります.

■例 3 「作家は (みな) 人間である」

今度はどうでしょう?「作家」も「人間」も一般名詞ですね. 答えから言ってしまうと,「どん

[*1] 括弧をつけずに Fx と書くこともありますが, 意味は同じです.

な x についても x が作家であるならば x は人間である」ということで, 「$\forall x\,(F(x) \to G(x))$」となります (「$x$ は人間である」を $G(x)$ としました). $\forall$ は (多くの人は知っていると思いますが) 「任意の」という意味です. 数学でもよく使いますね.

■例 4 「象は鼻が長い」

そろそろウンザリしてきたかもしれませんが, これで最後です. 「x は象である」を $E(x)$, 「y は x の鼻である」を $N(y, x)$, 「y は長い」を $L(y)$ とします (Elephant, Nose, Long). すると, これは「$\forall x\,(E(x) \to \exists y\,(N(y, x) \wedge L(y)))$」となります ($\exists$ は「. . . が存在する」) . . . ん? ダメ? では, 落ち着いて考えてみましょう.

$$\underbrace{\text{任意の } x \text{ について}}_{\forall x},\ \underbrace{x \text{ が象である}}_{E(x)}\ \underbrace{\text{ならば}}_{\to},$$
$$\underbrace{\text{次のような } y \text{ が存在する}}_{\exists y} :\ \underbrace{y \text{ は } x \text{ の鼻であり}}_{N(y,x)},\ \underbrace{\text{かつ}}_{\wedge}\ \underbrace{y \text{ は長い}}_{L(y)}.$$

はい, 分かりましたね? (分かってください (ぉぃ))
なお, この場合「x は鼻が長い」を $LN(x)$ とおいて「$\forall x\,(E(x) \to LN(x))$」などとしても OK[*2] なのですが, ここでは練習ということで細かく書いてみました.

というわけで, 文の記号化というのはこんな感じです.

✎ **補足** : 論理記号
ここまででいくつかの論理記号が出てきましたが, せっかくなので全部紹介しておきます.

表記	意味
$A \wedge B$	A かつ B (A and B)
$A \vee B$	A または B (A or B)
$A \to B$	A ならば B (if A then B)
$\neg A$	A でない (not A)
$\forall x$	任意の x について (for all x)
$\exists x$	x が存在する (there exists x)

ちなみに, これらには「論理結合子」・「量化子」などの名前があるのですが, 名前を覚えることと証明が書けるようになることにはあまり関係がないと思うので, 名前に関してはほとんど扱いません. 気になる方は授業で配られたプリントを参照して下さい.

1.2. 推論しよう

前節で文の記号化をやったわけですが, それだけでは「論理学」になりません. 規則にしたがって何らかの結論を**導き出す**のが論理ですから, 文を書き下しただけではしょうがない. というわけで, その「推論」のやり方を見ていきましょう.

[*2] つまり, 一部分をまとめて記号化してもよい.

■例　$(A \wedge B) \wedge C$ のとき A が成り立つことを示せ.

「そんなの自明[*3] じゃん!」はい, ごもっともです. しかし, 論理学では必ず**規則にしたがって**推論しなければいけません. このような単純な例でも, です. じゃあどんな規則を使えばいいの? ということになりますが, こんな規則があります :

$$\frac{A \wedge B}{A}$$

「は? 分数?」いえいえ. 記号論理学ではこのような形で推論を表すのです. これは $A \wedge B$ から A が導けるということを示しています. 他にも同じような規則 (推論規則といいます) がいくつかあり, 記号論理学ではそれらを使って証明を行います. で, この推論規則を使うと先ほどの命題は次のように証明できます.

$$\dfrac{\dfrac{(A \wedge B) \wedge C}{A \wedge B}\ \text{($A{\to}A{\wedge}B,\ B{\to}C$ として上の規則を適用)}}{A}\ \text{(そのまま適用)}$$

推論というのは大体こんなものです. 推論規則にしたがい, 上のような図を書いて, 「証明」するわけです. なお, 上のような図を証明図といいます. 試験で問われたりすることはないと思いますが, まあ名前くらいは知っておきましょう.

✎ **補足** : 「→」と「⊢」
前述の例で「$(A \wedge B) \wedge C$ のとき A が成り立つ」と書きましたが, これを「$(A \wedge B) \wedge C \to A$」と書けばいいのに, と思った人がいるかもしれません[*4]. 実はこう書いたのには理由があります. これは本来は「$(A \wedge B) \wedge C \vdash A$」と書きます. それについてちょっと説明しましょう.
「$A \vdash B$」は「A から B が導出できる (A が導けるなら B も導ける)」という意味です. 「なんだ, 結局『→』と同じじゃん」いや, それが違うのです. 「→」は命題の**中**で「ならば」という意味を記述するのに使いますが, 「⊢」は命題の**外**で使う, 1 ランク上の記号です. 大雑把にいえばこんな感じでしょうか :

$A \to B$　$\cdots$　「A ならば B」**という命題**
$A \vdash B$　$\cdots$　A から B が**導出できる**

違いが分かりましたか? まあ, そういうわけで普通は「『$(A \wedge B) \wedge C \vdash A$』を示せ」などという風に書きます.

2.　命題論理

さて, いきなりワケの分からない単語が出てきました. 「命題論理」. でも心配することはありません. 1.2 みたいなものが命題論理です. もう少し言うと, $\wedge$, $\vee$, $\to$, $\neg$ の 4 つの論理記号および A, B, C, ... などの大文字アルファベットで表される命題を使って推論をしていくのが命題論理です. では, れっつごー.

[*3] by 某 français 大鬼教官
[*4] それは講義を聴いていないということにもなりますが ... (笑)

2.1. 推論規則

1.2 で推論規則というのを軽く紹介しましたが, ここではより詳しく見ていきたいと思います.

■「∧」: **かつ** (and)

$$\text{導入則}\ \boxed{\dfrac{A \quad B}{A \wedge B}} \qquad \text{除去則}\ \boxed{\dfrac{A \wedge B}{A} \qquad \dfrac{A \wedge B}{B}}$$

「『導入則』と『除去則』?」はい, また新しい用語が出てきました. でも全然難しいものではないのでご安心下さい.

1.2 で「論理学では必ず**規則にしたがって**推論しなければいけない」と書きました. この「規則」が推論規則であるわけですが, (1.2 のように) 論理式を変形して証明を構築するのに最低限必要な規則ってどんなものでしょう? よくよく考えてみると, 各論理記号を式に新しく加える (導入する) 方法と, 式から消す (除去する) 方法が決まっていれば良いのです. どんな論理式も命題と論理記号の組み合わせで書いてありますから, この「導入」·「除去」だけでどのような式変形でも行うことができます. で, これらを導入則 · 除去則というわけです.

この ∧ の場合, 導入則については「A と B が成り立っているとき, $A \wedge B$ と結論してよい」と定義していることになります. 「当たり前」過ぎて何を言っているのか分からないかもしれませんが, 「『∧』はまだ定義されていないので, A と B の 2 つが成り立っているとき, これを『$A \wedge B$』と呼ぶことにする」という風に考えれば良いと思います.

ここまで分かったら除去則は簡単. ただ単に「$A \wedge B$ が成り立っているなら, A であると結論してもよいし, B であると結論してもよい」ということです. 大丈夫ですね?

■「→」: **ならば** (if . . . then . . .)

$$\text{導入則}\ \boxed{\dfrac{\begin{array}{c}[A]_1\\ \vdots\\ B\end{array}}{A \to B}\,1} \qquad \text{除去則}\ \boxed{\dfrac{A \quad A \to B}{B}}$$

除去則については説明しなくても OK でしょう. 「そのまんま」です. 問題は導入則. 「$[A]_1$ の括弧と 1 は何?」これはこういうことです :

$$\begin{array}{c}A\\ \vdots\\ B\end{array} \xrightarrow{A\text{ を消す}} \dfrac{\begin{array}{c}\cancel{A}\\ \vdots\\ B\end{array}}{A \to B}$$

つまり, A から B が導けたのなら, 途中のごちゃごちゃしたところはすっ飛ばして「$A \to B$」として良い, ってこと. そして, 消去した部分 (大括弧 [ ] でくくる) と新しく推論した部分がワンセットであることを示すために「1」を付けるのです. 1 を既に使っている場合, 順に 2, 3, . . . と使っていきます (なお, 普通は数字を使いますが, それ以外に $*$ などの記号を使うこともあります. 要は, 2 つの操作が一緒ということが分かれば OK).

✎ **補足**：「Γ」について
(講義で配布された) プリント No.1 の p.2 を見ると, → の導入則のところに Γ というのが出ています. 上の説明には書いていなかったので気になる人がいるかもしれません. この Γ は「いろいろな前提 (仮定) のまとまり」という意味で使います. B を導くとき普通は A 以外の仮定も使うので, それらをまとめて Γ と書いているわけですが, → の導入には直接関係しないので, ここでは省略しました. いずれにせよ, 実際の証明では Γ などとまとめずに条件を逐一書いていくことになるので, あまり気にしなくても OK です.

■「∨」：**または** (or)

導入則 $$\boxed{\dfrac{A}{A \lor B} \qquad \dfrac{B}{A \lor B}}$$

除去則 $$\boxed{\dfrac{A \lor B \quad \begin{array}{|c}\underline{[A]_1}\\ \vdots \\ C\end{array} \quad \begin{array}{|c}\underline{[B]_1}\\ \vdots \\ C\end{array}}{C}\,1}$$

これも, 導入則については説明不要でしょう.

除去則がちょっとややこしい形をしています. 細かく見ていきましょう. まず, ∨ を除去するための基本方針は「$A \lor B \vdash C$ を示す」というものです. C というのが突然出てきたので, 「C って何?」と思うかもしれませんが, 悩む必要はありません. 実際の問題では, C は問題文に書いてあるか証明の流れから明らかに分かるかのどちらかである場合がほとんどです. で, この $A \lor B \vdash C$ を示すために, 右上の方で $A \vdash C$, $B \vdash C$ を示しています. さて, なぜこれで 1 の推論ができるのでしょうか? それはこういうことです：

A から C が導ける.
B から C が導ける.
つまり, A と B のどちらからでも C が導ける.
よって, A または B のどちらかが成り立っているのなら,
どちらが成り立っていようと, C が導ける.

そうそう, 図の中の縦線についてもちょっと触れておきましょう. ∨ の除去則では, $A \lor B \vdash C$ を示すために $A \vdash C$ と $B \vdash C$ を示すのですが, これは言ってみれば「場合分け」で, A が成り立っている場合には C が成り立ち, B が成り立っている場合にも C が成り立つ, ということを言っているわけです. この縦線は「場合分け」を強調するためのもので, 「分かりやすいように」書いてあります. しかし, それ以上の深い意味はありません (実際, 縦線を書かない人もいます ... まあ, 書いた方が分かりやすいと思いますが).

■「¬」：... **でない** (not)

導入則 $$\boxed{\dfrac{\begin{matrix}\underline{[A]_1}\\ \vdots \\ \bot\end{matrix}}{\neg A}\,1}$$

除去則 [NJ]
(不条理則) $$\boxed{\dfrac{\begin{matrix}\vdots \\ \bot\end{matrix}}{A}}$$

除去則 [NK]
(二重否定則) $$\boxed{\dfrac{\neg\neg A}{A}}$$

おっと, ここで ⊥ などという怪しげな記号が出てきました. まずこれについて軽く触れておきましょう. この ⊥ は「矛盾」を表します. 「なんで p.2 の表に入れなかったんだー」と言われそうで

すが, これは $\wedge, \to$ などとはちょっと違う記号なのです. つまり「矛盾という**命題**を表す記号」であり, どちらかといえば $A, B, \ldots$ に近いものです. ただし, 導入則 $\boxed{\dfrac{A \quad \neg A}{\perp}}$ があったりします. これも覚えておいてください.

さて, $\perp$ についてはこれくらいにして, $\neg$ の推論規則の説明に入っていきましょう. まず導入則です. 3 段目までは OK ですね? A から推論を進めていくと $\perp$ (矛盾) が出ました. ここからなぜ「$\neg A$」が導けるのでしょうか? 「背理法」を思い出してみてください. 背理法では, 証明すべき命題の否定 (つまり間違ったこと) を仮定して矛盾を導き, 結果として元の命題が正しいことを示します. この $\neg$ の導入則もほぼ同じことで, A を仮定して $\perp$ が出たなら $\neg A$ としてよかろう, ということです.

次に除去則を見てみましょう. NJ とか NK とか, よく分からないものが出てきています. まずこれらから説明します. 実は, 今までやってきた推論 (証明法) は「自然演繹」と呼ばれるシステムなのですが, この中にはいくつかの体系があります. それが NJ と NK です. これらはともに p.2 の表にある 6 つの論理記号から成り立っていて, ほとんどの部分は同じですが, この $\neg$ の除去則の定義が違うのです. ということで, その除去則をこれから説明しましょう.

まず, NJ の方の $\neg$ の除去則は不条理則といわれるもので, $\perp \vdash A$ と表されます. 「矛盾からは A が導ける」ということですが, この A については何の制限もついていないので, 結局のところ「矛盾からは何でも導ける」ということになります. 「どういうこと?」うーん, 具体例で考えてみましょうか. たとえば「$1 = 2$ ならば $3 = 5$ である」という文があるとします. $1 = 2$ はもちろん誤りですが, この文全体は誤りではありません. 実際に $1 = 2$ となることはないので, 好き放題に言って OK なのです. まだ納得できないという人は, この文の対偶を取ってみましょう. 「$3 \neq 5$ ならば $1 \neq 2$ である」となりますが, これは正しいですね? ということで元の文も正しいのです. 納得してもらえましたか?

さて, ここでこう思った人もいるでしょう: 「不条理則って『$\neg$ の除去則』のはずなのに, どこにも $\neg$ が出てきてないじゃん!」もっともな疑問です. が, $\perp$ の導入則を思い出してみて下さい. $\dfrac{A \wedge \neg A}{\perp}$ ということでした. この $\perp$ の導入則と不条理則を合わせると, こういうことになります:

$$\cfrac{\cfrac{A \wedge \neg A}{\perp}}{B}$$

全体としては $\neg$ が除去できていますね. ということで不条理則は「除去則」なのです.

そして, NK の方の $\neg$ の除去則である二重否定則ですが, これはすぐに意味が分かるでしょう. 特に説明する必要はないと思います.

✎ **補足** : NJ と NK

上でも書いた通り, 自然演繹には NJ と NK があります. これらについてもう少し説明しましょう.
NJ は不条理則, NK は二重否定則によって定義されますが, 普通は NJ (不条理則) を使います. これは不条理則の方が二重否定則より弱いからです. 「弱いほうを使う」というのは奇妙に思えるかもしれませんが, 論理を構築するにあたってはなるべく最小限の原理を使う方がキレイだということです. また, 1 で書いたとおり「記号論理を使うと定理の証明などが機械的な計算だけでできたりする」のですが, 二重否定則を使うとこれが難しくなってしまいます (その理由は後で実際に証明をやっていくうちに分かるでしょう). とにかく, **できるだけ NJ で証明する**ということを忘れないで下さい (まあ, あの

教官は NJ で証明できる場合は「$\vdash$」と書き, NK を使わないと証明できない場合は「$\vdash_{\mathrm{NK}}$」と書いているので, 実際はそれを見て判断すれば OK ですが).

2.2. 例題

ここまでで見てきた推論規則を使って, 実際に証明をやってみましょう.

■例題 1 「$(A \land B) \to C \vdash A \to (B \to C)$」を示せ.

(ヒント: A と B を仮定してみる)

まずは自分で考えてみて下さい. 答えは次のようになります:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[A]_2 \quad [B]_1}{A \land B} \qquad (A \land B) \to C}{C}}{B \to C}\,{\scriptstyle 1}}{A \to (B \to C)}\,{\scriptstyle 2}$$

「こんなの思いつかないよ!」まあまあ, そう言わずに以下の「考え方」をご一読ください.

1. まず, 結論 $A \to (B \to C)$ を下の方に書いておきます.

$$A \to (B \to C)$$

2. この式は「○○ → ××」という形をしているので, $\to$ の導入則を使って導かれたはず. つまり, この前段階はこのようになるはずです:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[A]_*}{\vdots}}{B \to C}}{A \to (B \to C)}\,{\scriptstyle *}$$

3. 今度は $B \to C$ を導けばよいので, 上と同様に考えて, このようにします:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[A]_* \quad [B]_\#}{\vdots}}{C}}{B \to C}\,{\scriptstyle \#}}{A \to (B \to C)}\,{\scriptstyle *}$$

4. ということで, C を導けばよいというところまで来ました. ここで前提である $(A \land B) \to C$ を思い出してみると, $A \land B$ を導けば C が導けるということが分かるので, こうなります:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[A]_* \quad [B]_\#}{\vdots}}{A \land B} \qquad (A \land B) \to C}{C}}{B \to C}\,{\scriptstyle \#}}{A \to (B \to C)}\,{\scriptstyle *}$$

5. あとは左上の空白を埋めれば良いのですが, これは自明でしょう. $\land$ の導入則を使えば一発です. ということで最終的にこうなります:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[A]_* \quad [B]_\#}{A \land B} \qquad (A \land B) \to C}{C}}{B \to C}\,{\scriptstyle \#}}{A \to (B \to C)}\,{\scriptstyle *}$$

6. これでほとんどできているのですが, 普通は # や $*$ を数字にします. 上から見ていくと, $\# \to *$ という順番に推論をしているので, $\# \to 1$, $* \to 2$ と置き換えて

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[A]_2 \quad [B]_1}{A \land B} \qquad (A \land B) \to C}{C}}{B \to C}\,{\scriptstyle 1}}{A \to (B \to C)}\,{\scriptstyle 2}$$

となり, 証明が完成しました.

いろいろとやっているように見えますが, **基本となる操作は次の 2 つだけ**です.

(A) 前提 (or 既に導かれている式) の principal operator[*5] の除去則を使う. (図の 4)

(B) 結論 (or これから導こうとしている式) の principal operator の導入則を使う. (図の 2, 3, 5)

たとえばこの問題のように結論が「○○ → ××」という形なら, ○○を仮定して××を導き, → の導入則を使います. 結論が「¬○○」という形なら, ○○を仮定して ⊥ (矛盾) を導き, ¬ の導入則を使います. また, 前提が「○○ → ××」という形なら, ○○をうまく導いてから → の除去則を使います. 他の場合も同様. とにかく, **迷ったら推論規則を思い出す**ということです.

これらをふまえて, 次の問題をやってみて下さい.

■**例題** 2 「$A \to (B \to C) \vdash (A \land B) \to C$」を示せ.

(ヒント: $A \land B$ を仮定してみる)

答えは次のようになります. 自分で証明が書けましたか?

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[A \land B]_1}{B} \qquad \dfrac{\dfrac{[A \land B]_1}{A} \qquad A \to (B \to C)}{B \to C}}{C}}{(A \land B) \to C}\,{}^{1}$$

例によって「考え方」を載せておきます (もちろん, 証明がスッと思いつく場合はこんな風に考えなくて構いません. この程度の証明なら, 最終的にはそうやって一気に書けるようになるでしょう).

1. まず, 結論を下の方に書いておきます.
$$(A \land B) \to C$$
2. 前述の「原則」にしたがって → の導入則を考え, こうします:
$$\dfrac{\begin{array}{c}\underline{[A \land B]_\#}\\ \vdots \\ \overline{C}\end{array}}{(A \land B) \to C}\,{}^{\#}$$
3. あとは C を導けば OK です. 前提 $A \to (B \to C)$ に目を向けてみると, C が導けそうな形ですね. ということで, とりあえず → の除去則を使いましょう.
$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\underline{[A \land B]_\#}\\ \vdots \\ \overline{B}\end{array} \qquad \begin{array}{c}\underline{[A \land B]_\#}\\ \vdots \\ \overline{B \to C}\end{array}}{C}}{(A \land B) \to C}\,{}^{\#}$$
4. 左上は「そのまんま」です. 右上は「原則」通り前提の → の除去則を使いましょう.
$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[A \land B]_\#}{B} \qquad \dfrac{\begin{array}{c}\underline{[A \land B]_\#}\\ \vdots \\ \overline{A}\end{array} \qquad A \to (B \to C)}{B \to C}}{C}}{(A \land B) \to C}\,{}^{\#}$$
5. 後は上の空白を埋めて # → 1 とすれば完成.
$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[A \land B]_1}{B} \qquad \dfrac{\dfrac{[A \land B]_1}{A} \qquad A \to (B \to C)}{B \to C}}{C}}{(A \land B) \to C}\,{}^{1}$$

1 つ注意しておくと, → の導入則で使う前提 (大括弧 [ ] で消す式) はいくつあっても OK です. ここでは $[A \land B]_1$ が 2 個所出てきていますが, こういう場合もあるということ. ちなみにこれは 0 個所でも OK です. つまり, $\dfrac{A}{B \to A}$ のような推論も可能です (実際に使うことがあるので覚えておきましょう).

[*5] "principal operator" というのは「主要な演算子」つまり「文の中で最も広い範囲を支配している演算子」のことです. たとえば「$1+2\times3$」の principal operator は「+」,「$(4+5\times6)-7$」の principal operator は「−」,「$(A\land\neg B)\lor(C \to D)$」の principal operator は「∨」... という具合.

■例題 3　「$(A \land B) \lor (A \land C) \vdash A \land (B \lor C)$」を示せ.

(ヒント: $(A \land B) \lor (A \land C)$ に対して $\lor$ の除去則を使う)

答え:

$$
\dfrac{(A \land B) \lor (A \land C) \quad \Bigg| \quad \dfrac{\dfrac{[A \land B]_1}{A} \qquad \dfrac{\dfrac{[A \land B]_1}{B}}{B \lor C}}{A \land (B \lor C)} \quad \Bigg| \quad \dfrac{\dfrac{[A \land C]_1}{A} \qquad \dfrac{\dfrac{[A \land C]_1}{C}}{B \lor C}}{A \land (B \lor C)}}{A \land (B \lor C)}\ {}^{1}
$$

だんだん要領がつかめてきたと思いますから, 説明も少し簡略化します. この証明では, まず前提の principal operator である $\lor$ に着目しています. $A \land B$ と $A \land C$ がそれぞれ成り立っているとき, 結論 $A \land (B \lor C)$ も成り立つことを示そう, という方針です (このように, 大まかな方針を頭の中で考えておくと証明がやりやすいです).

ちなみに, 結論の principal operator である $\land$ に着目して以下のように証明することもできます (が, まあ上の証明の方が楽ですよね).

$$
\dfrac{\dfrac{(A \land B) \lor (A \land C) \quad \Big| \quad \dfrac{[A \land B]_1}{A} \quad \Big| \quad \dfrac{[A \land C]_1}{A}}{A}\ {}^{1} \qquad \dfrac{(A \land B) \lor (A \land C) \quad \Bigg| \quad \dfrac{\dfrac{[A \land B]_2}{B}}{B \lor C} \quad \Bigg| \quad \dfrac{\dfrac{[A \land C]_2}{C}}{B \lor C}}{B \lor C}\ {}^{2}}{A \land (B \lor C)}
$$

■例題 4　「$\neg A \land \neg B \vdash \neg(A \lor B)$」を示せ.

(ヒント: $A \lor B$ を仮定し, $\lor$ の除去則を使う)

答え:

$$
\dfrac{\dfrac{[A \lor B]_2 \quad \Bigg| \quad \dfrac{[A]_1 \qquad \dfrac{\neg A \land \neg B}{\neg A}}{\bot} \quad \Bigg| \quad \dfrac{[B]_1 \qquad \dfrac{\neg A \land \neg B}{\neg B}}{\bot}}{\bot}\ {}^{1}}{\neg(A \lor B)}\ {}^{2}
$$

これは結論が $\neg$○○ という形をしているので, ○○を仮定して $\bot$ (矛盾) を導くという方針をとります. さらにその ○○ $= A \lor B$ に $\lor$ が含まれているため, A と B のそれぞれが成り立っているときに矛盾が起こることを示す, という流れになります. ここまで分かったら後は簡単. 式をうまくつなげるだけです.

■例題 5　「$\neg A \to \neg B \vdash_{\mathrm{NK}} B \to A$」を示せ.

(ヒント: $\neg A$ と B を仮定し, $\neg\neg A$ を導く)

答え:

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[B]_2 \qquad \dfrac{[\neg A]_1 \quad \neg A \to \neg B}{\neg B}}{\bot}}{\neg\neg A}\ {}^{1}}{A}}{B \to A}\ {}^{2}
$$

NK で証明するということは, どこかで二重否定則を使うということです. つまり, $\neg\neg$〇〇 という形を導くことになります. しかし, この「〇〇」として何をとるべきかは分かりません. それが NK の面倒なところです. この場合は 〇〇 $= A$ として, $\neg\neg A \vdash_{\mathrm{NK}} A$ というところで使っているわけですが, これも勘で見つけるしかありません (と書いていたのですが, 試験では結構ヒントがあるようなので, そんなに迷わなくて済むかもしれません).

というわけで, 大体証明のやり方が分かってきたと思います. この「証明ができるかできないか」は結構慣れの問題なので, とにかく自分でたくさん証明を書いてみることが大事です. プリントには重要な法則がたくさん載っているので, ぜひ証明してみてください.

3.　述語論理

ここまで来て, 1.1 でやった $\forall$ や $\exists$ が出てこないなあと思っている人がいるかもしれません. 実は, この述語論理というところで出てきます.

「述語論理」を一言で説明すると, 命題論理の「命題」の部分 $(A, B, \ldots)$ が少し複雑になったもの, と言うことができます. たとえば, 1.1 の例 2「夏目漱石は作家である」を考えてみると, 命題論理では「1 つの命題 = 1 文字」ということで, この文全体を「A」のように表してしまうわけですが, 述語論理では「$F(a)$」という風に書きます. この方がより細かい分析ができる, というのは何となく分かってもらえると思います. で, これは命題 (文) を主語と述語に分けていることになりますが, それが「述語論理」と呼ばれる所以です.

3.1.　推論規則

■「$\forall$」: 任意の . . . について (for all)

$$\text{導入則}\ \boxed{\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma\\ \vdots\\ \phi(t)\end{array}}{\forall x\,\phi(x)}} \qquad \text{除去則}\ \boxed{\dfrac{\forall x\,\phi(x)}{\phi(t)}}$$

まず, 除去則の方から説明します. この規則が言っているのは, 「どんなものも ϕ であるならば, t も ϕ である」ということです. 難しくないですよね? 例えば「『どんな人間もものを食べる』ならば『太郎はものを食べる』」という具合です.

そして導入則. これは一見すると除去則を上下逆さにしただけで, 「『太郎は背が高い』ならば『どんな人間も背が高い』」などというとんでもない推論を許しているように見えます. しかしもちろん, 実際は違います. この規則が言っているのは「**適当に選んだ** t が**必ず**ϕ であるならば, どんなものも ϕ である」ということです. よく分からない人は次の例を考えてみましょう.

「三角形の内角の和は 180° であることを示せ」という問題があるとします. この命題を示すとき, 普通は適当な図を描いて補助線を引いて錯角がどうのこうのと言うわけですが, よくよく考えてみるとこれは図に描いた**特定**の三角形について内角の和が 180° であると言っているに過ぎませ

ん. それにもかかわらず, これは上の命題の「証明」になるのです. 何故でしょうか. それは, この三角形が**勝手に選んだ**三角形だからです. 適当に三角形を選ぶと必ず内角の和が 180° になるというのであれば, 任意の三角形について同じことが言えるということです.

この ∀ の導入則も同じことで, t は「適当に選んだ」ものです. もう少し言うと, Γ (前提) の中に t を限定する条件が含まれていないということが必要です. その条件の下でこの「特定 → 一般」の推論ができるのです.

■「∃」: . . . が存在する (there exists)

導入則 $\boxed{\dfrac{\phi(t)}{\exists x\,\phi(x)}}$ 　　除去則 $\boxed{\dfrac{\exists x\,\phi(x) \quad \begin{array}{|c}\dfrac{[\phi(t)]_1}{\vdots} \\ \psi\end{array}}{\psi}\,{}_1}$

まず導入則です. これが言っているのは「t が ϕ であるならば, ϕ であるものが存在する」ということです. 例えば「太郎はテストで 100 点を取った」なら,「テストで 100 点を取った学生がいる」といえますね.

ここで注意してほしいのは,「$\phi(t)$ の t を x で置き換えるとき, 全ての t を置き換えなくてもよい」ということです. 多分これだけでは分かりにくいと思いますから, 例で考えてみましょう.「パスカルは哲学者であり, かつ, パスカルは数学者である」という文を考えます. これに ∃ の導入則を適用すると, 普通はこんな風になるでしょう:

$$\frac{\text{パスカルは哲学者である} \land \text{パスカルは数学者である}}{\exists x\,(x\ \text{は哲学者である} \land x\ \text{は数学者である})}$$

しかし, 以下のような推論をすることもできます:

$$\frac{\text{パスカルは哲学者である} \land \text{パスカルは数学者である}}{\exists x\,(x\ \text{は哲学者である} \land \text{パスカルは数学者である})}$$

ちょっと不自然な感じもしますが, 論理的に誤ってはいませんね (「x は哲学者であり, かつ, パスカルは数学者である」ような x は確かに存在しますから). この「一部だけを置き換える」推論はあまり意味がないように見えるかもしれませんが, 実際はときどき使うことがあるので, 忘れないようにしてください.

そして除去則です. 見た目がどことなく ∨ の除去則に似ていますが, 中身もやっぱり似ています. まず, 全体としては「$\exists x\,\phi(x) \vdash \psi$」つまり「$\phi$ であるものが存在するならば ψ である」ということを示すことになります. そのために,「ϕ であるものをとりあえず t とおき, その t を使って ψ を示す」ということをやっています.「ϕ であるものが (実際に何であるかは分からないが) 存在する」という不確定的な形では扱いにくいので, とりあえず「t」と名前を付けてみよう, ということ.「t」というハッキリした形なら扱いが簡単ですから.

なお, ψ に「(t)」が付いていないことから分かるかもしれませんが, ψ は t を含んでいてはいけません. ψ に t が含まれていると奇妙な推論が可能になってしまいます. 次の例を見てください :

$$\cfrac{\cfrac{\exists x\,\phi(x) \quad \left|\ \cfrac{[\phi(t)]_1}{\phi(t)}\right.}{\phi(t)}\,1}{\forall x\,\phi(x)}$$

つまり「ある x に対して $\phi(x)$ ならば, すべての x に対して $\phi(x)$ である」ということですが, これはどう見ても変ですよね. というわけで, ψ は t を含んでいてはいけないのです. うっかりしがちなところなので, 注意してください.

■ **「=」**: **等しい** (is equal to)

$$\text{導入則}\ \boxed{\dfrac{}{t = t}} \qquad \text{除去則}\ \boxed{\dfrac{\phi(t) \quad t = s}{\phi(s)}}$$

「あれ? 『=』って p.2 の表になかったよね?」はい, その通りです. $\perp$ も p.2 の表にはなかったと思いますが, この「=」も同じく $\wedge$, $\rightarrow$, $\forall$ などとはちょっと違う記号です. 「=」は**述語記号**, つまり「$\phi(x, y)$」などと同じ類のものです.

推論規則について軽く触れておくと, 導入則は妙な形をしていますが「何の前提もなしに $t = t$ という式を導入することができる」ということです. 除去則は「$\phi(t)$ と $t = s$ が成り立っているなら, $\phi(t)$ の t を s で置き換えた式 $\phi(s)$ も成り立つ」ということです. まあ, そんなに細かく説明する必要もないでしょう.

3.2. 例題

■**例題** 1 「$\forall x\,(\phi(x) \rightarrow \psi(x)) \wedge \forall x\,(\psi(x) \rightarrow \chi(x)) \vdash \forall x\,(\phi(x) \rightarrow \chi(x))$」を示せ.

(ヒント: x を t で例化し, $\phi(t)$ を仮定してみる)

答え:

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{[\phi(t)]_1 \quad \cfrac{\forall x\,(\phi(x) \rightarrow \psi(x))}{\phi(t) \rightarrow \psi(t)}}{\psi(t)} \quad \cfrac{\forall x\,(\psi(x) \rightarrow \chi(x))}{\psi(t) \rightarrow \chi(t)}}{\chi(t)}}{\phi(t) \rightarrow \chi(t)}\,1}{\forall x\,(\phi(x) \rightarrow \chi(x))}$$

直観的には明らかですね. 証明に関しては, とりあえず t で例化して, $\rightarrow$ の除去則・導入則を使うだけです. 特に問題はないでしょう.

■**例題** 2 「$\exists x\,(\phi(x) \vee \psi(x)) \vdash \exists x\,\phi(x) \vee \exists x\,\psi(x))$」を示せ.

(ヒント: まず $\exists$ の除去則を使い, sub proof*6 の中で $\vee$ の除去則を使う)

*6 証明の中の証明. 特に $\vee$ や $\exists$ の除去則において縦線で区切られた部分のことをいう.

答え:

$$\cfrac{\exists x\,(\phi(x) \vee \psi(x)) \quad \left| \quad \cfrac{[\phi(t) \vee \psi(t)]_2 \quad \left| \quad \cfrac{\cfrac{[\phi(t)]_1}{\exists x\,\phi(x)}}{\exists x\,\phi(x) \vee \exists x\,\psi(x)} \quad \right| \quad \cfrac{\cfrac{[\psi(t)]_1}{\exists x\,\psi(x)}}{\exists x\,\phi(x) \vee \exists x\,\psi(x)}}{\exists x\,\phi(x) \vee \exists x\,\psi(x)}\,{}_{1} \right.}{\exists x\,\phi(x) \vee \exists x\,\psi(x)}\,{}_{2}$$

これも直観的に明らかです. ∃ の除去則を使うと $\phi(t) \vee \psi(t)$ が出て, そこから $\exists x\,\phi(x) \vee \exists x\,\psi(x))$ が導けそうなので, $\phi(t)$ と $\psi(t)$ の各々の場合について調べるわけです.

■**例題** 3 「$\exists x\,\forall y\,\phi(x,y) \vdash \forall y\,\exists x\,\phi(x,y)$」を示せ.

答え:

$$\cfrac{\exists x\,\forall y\,\phi(x,y) \quad \left| \quad \cfrac{\cfrac{\cfrac{[\forall y\,\phi(s,y)]_1}{\phi(s,t)}}{\exists x\,\phi(x,t)}}{\forall y\,\exists x\,\phi(x,y)} \right.}{\forall y\,\exists x\,\phi(x,y)}\,{}_{1}$$

証明は見れば分かるでしょう. ただし以下のようにやってはいけません. どこがまずいのかチェックしてみてください (分からなければ ∃ の除去則の説明を参照してください).

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\exists x\,\forall y\,\phi(x,y) \quad \left| \quad \cfrac{[\forall y\,\phi(s,y)]_1}{\phi(s,t)} \right.}{\phi(s,t)}\,{}_{1}}{\exists x\,\phi(x,t)}}{\forall y\,\exists x\,\phi(x,y)}$$

4. ペアノ算術

ペアノ算術 (Peano Arithmetic: PA) とは, NJ·NK に基づいて構築された自然数の理論です.

4.1. 公理

ペアノ算術は次の公理から定義されます.

(1)	$\forall x\,(\neg S(x) = 0)$	
(2)	$\forall x\,\forall y\,(S(x) = S(y) \to x = y)$	
(3-1)	$\forall x\,(x + 0 = x)$	
(3-2)	$\forall x\,\forall y\,(x + S(y) = S(x + y))$	
(4-1)	$\forall x\,(x \cdot 0 = 0)$	
(4-2)	$\forall x\,\forall y\,(x \cdot S(y) = xy + x)$	
(5)	$\dfrac{\phi(0) \quad \forall x\,(\phi(x) \to \phi(S(x)))}{\forall x\,\phi(x)}$	(数学的帰納法)

$S(x)$ という見慣れない記号が出てきていますが, これは x の successor (後者) と呼ばれるものです. もっと簡単に言ってしまうと $x+1$ のことです. 「なんでわざわざ変な書き方するんだ」ごもっとも. しかし, (1) や (2) で「+」を使うことはできません. 何故かというと, まだ定義されていないからです. 加算「+」は (3-1) と (3-2) で初めて定義されるものであって, 自然数自体の定義には使われていません. 細かいことですが, 気をつけましょう.

4.2. 重要な法則の証明

ここでは, ペアノ算術の公理を用いて以下の法則を証明してみます. なお, あらかじめ考えてきた定理の証明を書かせる問題が試験で出題されるということなので, まあ適当にお使いください (笑).

- 「$\vdash_{\mathrm{PA}} \forall x \forall y\,(x+y=y+x)$」→ p.15
- 「$\vdash_{\mathrm{PA}} \forall x\,(\neg x=0 \to \exists y\,(S(y)=x))$」→ p.16

5. その他の話題

以下に挙げる内容は試験に関係しないようなので, このシケプリでは扱いませんでした.

- ラッセルの逆理, 連続体問題 (余談)
- ZF (NK ベースの一階公理的集合論; プリント No.2 p.14–16)
- 冪集合, 写像

6. 最後に

- このシケプリは一応入念に作ったつもりですが, 万一 (?) 間違いなどがありましたら下記メールアドレスまで連絡をお願いします.
- http://user.ecc.u-tokyo.ac.jp/˜g140944/ にこのシケプリをおいておくので, もし必要な人がいれば適当に取っていってください.
- 試験は 7 月 23 日 (月) の 2 限 (10:50 – 12:20) です. 講義で配布されたプリントは { 持ち込み · 書き込み } 可. まあ皆さん頑張りましょう :-)

シケプリ作成 :
中嶋 海介 (理科 I 類 1 年 23 組)
g140944@mail.ecc.u-tokyo.ac.jp

■「$\vdash_{\mathrm{PA}} \forall x\,\forall y\,(x+y=y+x)$」の証明

$x+y=y+x$ を $\phi(x,y)$ と略記する. 次の (1), (2) を示す.

(1) $\vdash_{\mathrm{PA}} \forall y\,\phi(0,y)$

(2) $\vdash_{\mathrm{PA}} \forall x\,(\forall y\,\phi(x,y) \to \forall y\,\phi(S(x),y))$

$\boxed{\text{(1) の証明}}$

$$
\dfrac{\dfrac{0+0=0+0}{\phi(0,0)} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\forall x\,\forall y\,(x+S(y)=S(x+y))}{0+S(t)=S(0+t)} \qquad \dfrac{\dfrac{\forall x\,(x+0=x)}{t+0=t} \qquad [0+t=t+0]_1}{0+t=t}}{0+S(t)=S(t)} \qquad \dfrac{\forall x\,(x+0=x)}{S(t)+0=S(t)}}{0+S(t)=S(t)+0}}{0+t=t+0 \to 0+S(t)=S(t)=0}\;{}^{1}}{\forall y\,(0+y=y+0 \to 0+S(y)=S(y)=0)}}{\forall y\,(\phi(0,y) \to \phi(0,S(y)))}}{\forall y\,\phi(0,y)}
$$

$\boxed{\text{(2) の証明}}$

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\phi(S(s),t)]_1}{S(s)+t=t+S(s)} \qquad \dfrac{\forall x\,\forall y\,(x+S(y)=S(x+y))}{t+S(s)=S(t+s)}}{S(s)+t=S(t+s)} \qquad \dfrac{\dfrac{[\forall y\,\psi(s,y)]_2}{\forall y\,(s+y=y+s)}}{s+t=t+s}}{S(s)+t=S(s+t)} \qquad \dfrac{\forall x\,\forall y\,(x+S(y)=S(x+y))}{s+S(t)=S(s+t)}}{S(s)+t=s+S(t)} \qquad \dfrac{\dfrac{[\forall y\,\phi(s,y)]_2}{\forall y\,(s+y=y+s)}}{s+S(t)=S(t)+s}}{S(s)+t=S(t)+s}
$$

$\vdots$

(下へ)

(上から)

$\vdots$

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{S(s)+0=S(s)+0 \qquad \dfrac{\dfrac{\forall y\,\phi(0,y)}{\forall y\,(0+y=y+0)}}{0+S(s)=S(s)+0}}{S(s)+0=0+S(s)}}{\phi(S(s),0)} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\forall x\,\forall y\,(x+S(y)=S(x+y))}{S(t)+S(s)=S(S(t)+s)} \qquad S(s)+t=S(t)+s}{S(t)+S(s)=S(S(s)+t)} \qquad \dfrac{\forall x\,\forall y\,(x+S(y)=S(x+y))}{S(s)+S(t)=S(S(s)+t)}}{S(s)+S(t)=S(t)+S(s)}}{\phi(S(s),S(t))}}{\phi(S(s),t) \to \phi(S(s),S(t))}\;{}^{1}}{\forall y\,(\phi(S(s),y) \to \phi(S(s),S(y)))}}{\forall y\,\phi(S(s),y)}}{\forall y\,\phi(s,y) \to \forall y\,\phi(S(s),y)}\;{}^{2}}{\forall x\,(\forall y\,\phi(x,y) \to \forall y\,\phi(S(x),y))}
$$

よって (1), (2) より

$$
\dfrac{\dfrac{\forall y\,\phi(0,y) \qquad \forall x\,(\forall y\,\phi(x,y) \to \forall y\,\phi(S(x),y))}{\forall x\,\forall y\,\phi(x,y)}}{\forall x\,\forall y\,(x+y=y+x)}
$$

■「$\vdash_{\mathrm{PA}} \forall x\,(\neg x = 0 \to \exists y\,(S(y) = x))$」の証明

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$0 = 0$}
\AxiomC{$[\neg 0 = 0]_1$}
\BinaryInfC{$\bot$}
\UnaryInfC{$\exists y\,(0 = S(y))$}
\RightLabel{$\scriptstyle 1$}
\UnaryInfC{$\neg 0 = 0 \to \exists y\,(0 = S(y))$}
\AxiomC{$S(x') = S(x')$}
\UnaryInfC{$\exists y\,(S(x') = S(y))$}
\UnaryInfC{$\neg S(x') = 0 \to \exists y\,(S(x') = S(y))$}
\UnaryInfC{$(\neg x' = 0 \to \exists y\,(x' = S(y))) \to (\neg S(x') = 0 \to \exists y\,(S(x') = S(y)))$}
\UnaryInfC{$\forall x\,((\neg x = 0 \to \exists y\,(x = S(y))) \to (\neg S(x) = 0 \to \exists y\,(S(x) = S(y))))$}
\BinaryInfC{$\forall x\,(\neg x = 0 \to \exists y\,(x = S(y)))$}
\end{prooftree}
$$