実数の性質

実数にはそれを特徴づける様々な性質があります。大きく分けると、

1） 四則演算

2） 大小関係

3） 連続性　　　　　　　みたいな感じになります。

1）と 2）は基本的なことなので、ここでは飛ばします。3）については

$\forall a \in \mathbf{R}, \exists m \in \mathbf{Z} : m<a\leq m+1$ と

アルキメデスの原理（任意の二つの実数 $a>0$, $b>0$ に対して、$na>b$ となる自然数 n が存在する。）

という２つの同値な性質を授業では紹介していました。

実数の連続性はこれから出てくる極限の存在を保証する役割を果たします。

数列の収束と発散

定義　Sは $\mathbb{R}$の部分集合であるとする。

$\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in S : x\leq M$ が成り立つとき、S が上に有界であり、M を S の上界と呼ぶ。

また、S の上界のうち最小のものを S の上限と呼ぶ

定理　1）収束する数列は有界である。

2）上に有界な単調増加数列は上限に収束する

3）$\mathbb{R}$の任意の有界な部分集合には上限と下限が存在する

4）区間縮小法

有界閉区間の列 $I_1=[\alpha_1, \beta 1]$　$I_2=[\alpha_2, \beta_2]$　・・・・$I_n=[\alpha_n, \beta_n]$に対して

i)　$\alpha_1\leq \alpha_2 \cdots \alpha_n\leq \beta_n \cdots \beta_2\leq \beta_1$

ii)　$\lim_{n\to\infty}(\beta_n-\alpha_n)=0$　　が成り立つとき、

すべての I_n に共通に含まれる実数がただ１つ存在する

定義　(X_n)が下記の条件を満たせば、(X_n)が X^*に収束するという。

$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} : n>N \Rightarrow |X^*-X_n|< \varepsilon$

また、$\forall M > 0, \exists N \in \mathbb{N} : n> N \Rightarrow X_n>M$ が成り立つとき、

(X_n)は$+\infty$ に発散するという。

定理　$\lim_{n\to\infty} \alpha_n=\alpha$, $\lim_{n\to\infty} \beta_n=\beta$ とする。

1) $\forall\lambda,\mu \in \mathbb{R}$： $\lim_{n\to\infty}(\lambda\alpha_n+\mu\beta_n)=\lambda\alpha+\mu\beta$
2) $\lim_{n\to\infty}(\alpha_n\beta_n)=\alpha\beta$
3) $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\beta n}=\frac{1}{\beta}$ （$\beta, \beta_n \neq 0$ の場合）
4) 任意の $n\in\mathbb{N}$ に対して $\alpha_n>\beta_n$ が成り立つとき、$\alpha\geq\beta$

定義　自然数の値をとる数列 $(n(k))_{k\in\mathbb{N}}$ が狭義単調増加であるとき、数列(a_n)から作られた数列$(a_{n(k)})$を(a_n)の部分列という。
(簡単に言うと、部分列は元の数列から適当に項を無限個取り出して、それを順序を変えずに並べたものみたいな感じです。）
上の定義から収束する数列の部分列はすべて収束することもわかります。

定理　有界な数列には必ず収束する部分列がある

ボルツァーノ・ワイヤストラスの定理っていうやつです。
区間縮小法とか使ったら証明できます。
授業では、次に出てくる定理の証明に使うために紹介してました。

定義　下記の条件をみたす数列(X_n)をコーシー列と呼ぶ
$\forall\varepsilon>0, \exists N\in\mathbb{N} : n,m > N \Rightarrow |X_n-X_m|<\varepsilon$

定理　(X_n)が収束するための必要十分条件は(X_n)がコーシー列であることである

コーシーの収束条件っていうやつです。
極限値はわからなくてもいいけど、とりあえず収束することだけ示したいってときに使えて便利です。
大事な定理だと思います。覚えておきましょう。

１変数関数

１変数関数は$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$写像を行うものである。
$f_{(D)}=\{y\in\mathbb{R} \mid x\in D, y=f_{(X)}\}$ を像集合と呼び、(D は f の定義域)
任意の $y\in f_{(D)}$ に対して $y=f_{(X)}$ となる $x\in D$ がただ１つ存在するとき、
f が y において逆関数をもつといい、$x=f^{-1}{}_{(y)}$ で定義する。

関数の極限

定義　$\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0 : 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f_{(X)} - a| < \varepsilon$　が成り立つとき、
$\lim_{X \to X0} f(x) = a$ と表す。
また、$\forall M > 0, \exists\delta > 0 : 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f_{(X)} > M$ が成り立つとき、
$\lim_{X \to X0} f(x) = +\infty$ と表す。

定理　$\lim_{X \to X0} f(x) = \alpha$　$\lim_{X \to X0} g(x) = \beta$　$(\alpha, \beta \in \mathbb{R})$　とする

1) $\forall\lambda, \mu \in \mathbb{R} : \lim_{X \to X0} (\lambda f(x) + \mu g(x)) = \lambda\alpha + \mu\beta$

2) $\lim_{X \to X0} (f(x)\, g(x)) = \alpha\beta$

3) $\beta \neq 0$, $g_{(X)}$ は x_0 の近くで 0 でないとき　$\lim_{X \to X0} \frac{1}{g(X)} = \frac{1}{\beta}$

4) $f(x) > g(x)$ が x_0 の近くにおいて成り立つとき、$\alpha \geq \beta$

5) $f(x)$ が $x = \beta$ で連続であるとき、$\lim_{X \to X0} f(g_{(X)}) = f(\beta) = f(\lim_{X \to X0} g(x))$

連続性

定義　$f_{(X)}$ が x=a で次の条件をみたすとき、$f_{(X)}$ は x=a で連続であるという。

1) $f_{(X)}$ は x=a および x=a の近くで定義されている。
2) $\lim_{x \to a} f(x) = b \in \mathbb{R}$ (a に近づくときの $f_{(X)}$の極限が存在する)
3) $f_{(a)} = b$ (その極限が $f_{(a)}$と等しい)

上の定義は次の定義と同値である

$\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0 : |x - a| < \delta \Rightarrow |f_{(X)} - f_{(a)}| < \varepsilon$

連続関数の性質

定理　$f_{(X)}$, $g_{(X)}$ は連続であるとする

1) $\forall\lambda, \mu \in \mathbb{R} : \lambda f(x) + \mu g(x)$　,　$f_{(X)}g_{(X)}$　,　$\frac{1}{g(X)}$ $(g_{(X)} \neq 0)$
はすべて連続
2) $(f \cdot g)_{(X)} = f(g_{(X)})$ は連続
3) x=a で $f_{(a)} > g_{(a)}$ であれば、$\exists\delta > 0, \forall x \in (a - \delta, a + \delta) : f_{(X)} > g_{(X)}$
4) $f_{(X)}$ が[a , b] で連続であれば、$f_{(X)}$ は[a , b] 上で有界であり、その上限、下限を M, m としたとき、$f(X_M) = M$, $f(X_m) = m$ をみたす $X_{M,}$

$X_m \in [\,a\,,b\,]$ が存在する。

中間値の定理

$f_{(X)}$ が $[\,a\,,b\,]$ で連続であり、$f_{(a)} \neq f_{(b)}$ とする。
そのとき、$f_{(a)}$ と $f_{(b)}$ の間に含まれている任意の c $\in \mathbb{R}$ に対して、
$\exists x \in (a\,,b)$ ： $f_{(X)} = c$ が成り立つ。

微分

定義　$f_{(X)}$ が $x = a$ の十分近くで次の関係式をみたすとき、「$f_{(X)}$ は $x = a$ で微分可能である」という。
$f_{(a+h)} = f_{(a)} + A \cdot h + \sigma_{(h)} \cdot h$　（ただし、A は h によらず、$\lim_{h \to 0} \sigma(h) = 0$）
また、$\displaystyle \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h \to 0} (A + \sigma_{(h)}) = A$　A を $f_{(X)}$ の a における微分係数といい、$\left.\frac{df}{dx}\right|_{x=a}$ と表す。

定理　1) $f_{(X)}$ が $x = a$ で微分可能であれば、$f_{(X)}$ は $x = a$ で連続である。
2)　$f_{(X)}\,,\,g_{(X)}$ は微分可能とする
i)　$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ： $\lambda f(x) + \mu g(x)$ は微分可能
$(\lambda f(x) + \mu g(x))` = \lambda f`_{(X)} + \mu g`_{(X)}$
ii)　$(f_{(X)} g_{(X)})` = f`_{(X)}\, g(x) + f(x) g`_{(X)}$
iii)　$f(g_{(X)})` = \left.\frac{df(y)}{dy}\right|_{y=g(x)} \frac{dg(x)}{dx}$
iv)　$\left(\frac{1}{g(x)}\right)` = \left(\frac{1}{x} \cdot g_{(x)}\right)` = \frac{-g`(x)}{g(X)2}$　（ただし、$g_{(X)} \neq 0$）

定義　$n \in \mathbb{N}$ に対して、f が n 回微分可能で $f^{(n)}$ が連続であるとき、$f \in C^n$（f は C^n 級である）と表す。
また、任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して、f が C^n 級であるとき、$f \in C^\infty$（f は C^∞ 級である）と表す。

定理　f , g は C^n 級であるとする。
$$\frac{d^n}{dx^n}(f \cdot g) = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} f^{(k)} g^{(n-k)}$$

定理　　$f(x)$ は区間 I で連続かつ単調であるとする。
そのとき、f は I 上では、$f(I)$ で定義できる逆関数 g をもつが、
（$\forall x \in I : g(f(x)) = x$, $\forall y \in f(I) : f(g(y)) = y$）
$g(y)$ は $f(I)$ で連続な単調関数である。
さらに、$f(x)$ が I 上で微分可能であれば、$f`(x) \neq 0$ のとき、
$g(y)$ は微分可能で、$g`(y) = \frac{1}{f`(x)}\Big|_{x = g(y)}$

ロルの定理
$f(x)$ は$[a , b]$ で連続 ,(a , b) で微分可能で、$f(a) = f(b)$ とする。
そのとき、$\exists c \in (a , b) : f`(c) = 0$ が成り立つ。

わかりやすい定理だと思います。次に出てくる定理の証明に使います。

コーシーの平均値の定理
f , g は $[a , b]$ で連続 ,(a , b) で微分可能で、$g`(x) \neq 0$ （$\forall x \in (a,b)$）のとき、
$\exists c \in (a , b) : \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f`(c)}{g`(c)}$ が成り立つ。

後に出てくるテイラーの定理の証明に使います。
$g(x) = x$ とすると、おなじみの平均値の定理がでてきます。

ロピタルの定理
$f(x) , g(x)$ は(a , b) で微分可能で、$g(x)$ と $g`(x)$ は a (b) の近くで 0 にならず、$\lim_{x\to a+0(b-0)} f(x) = \lim_{x\to a+0(b-0)} g(x) = 0$
このとき、$\lim_{x\to a+0(b-0)} \frac{f`(x)}{g`(x)}$ が存在すれば、$\lim_{x\to a+0(b-0)} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a+0(b-0)} \frac{f`(x)}{g`(x)}$
また、$\lim_{x\to a+0(b-0)} f(x) = \lim_{x\to a+0(b-0)} g(x) = \infty$, $a = \pm\infty$ のときも成り立つ。

とても便利な定理です。使いこなせるようにしときましょう。

テイラーの定理
$f(x)$ は(a , b) 上で C^n 級の関数であるとする。
そのような $f(x)$ に対して、次の n 次多項式を定義する。

$Tf_c^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(X)|_{x=c}(x-c)^k$　（$c \in (a, b)$）

また、$f(X) = Tf_c^{(n-1)} + R_n(x)$ とする。
このとき、$\forall x, c \in (a, b)$ に対して、

$\exists \theta \in (0, 1) : R_n(x) = \frac{1}{n!} f^{(n)}(c+\theta(x-c))(x-c)^n$ が成り立つ。

この $R_n(x)$ をラグランジュの剰余項という。

テイラー展開

$\lim_{n\to\infty} Rn(x) = 0$ が成り立つとき、$f(X) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)(x-a)^n$

と表され、これを a を中心とする f のテイラー展開という。