No.

Date

数学Ⅱ　覚えるべきこと

一応シケタイなので不可回避用のまとめプリントを作ります。
行列とか僕のスキルじゃ到底無理なので、手書きで許して下さい。
汚ない字を読みたくない人はスルーしてね！　あと、できる人は読まなくていいです。

1　1次独立と1次従属

(1)　n次元のベクトル $\{a_1, a_2, a_3, \cdots a_r\}$ が与えられて

$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \cdots\cdots + \lambda_r a_r = \vec{0}$ が成り立つのが

$\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_r = 0$ に限るとき　1次独立

$\lambda_1, \lambda_2 \cdots \lambda_r$ のうち少なくとも1つは0でないようにとれるとき　1次従属

ちなみに $\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \cdots \lambda_r a_r$ を $a_1, a_2 \cdots a_r$ の1次結合という。

この1次結合で $\vec{0}$ をつくれないとき、1次独立である。

(2)　またこの $a_1, a_2, \cdots a_r$ のベクトルを並べて

$A = (a_1, a_2, a_3, \cdots a_r)$ という行列表示をしたとき、

$\{a_1, a_2 \cdots a_r\}$ が1次独立 $\iff |A| \neq 0$

〃　1次従属 $\iff |A| = 0$

証明は省略、覚えてしまえばいいと思います。

(3) $r+1$ 個の n 次元ベクトル $a_1, a_2 \cdots a_{r+1}$ が与えられており.

☆ $\{a_1, a_2 \cdots a_r\}$ が1次独立で, a_{r+1} が $a_1, a_2 \cdots a_r$ の1次結合であらわせないとする.

すると $\{a_1, a_2 \cdots a_{r+1}\}$ も1次独立である。

グラムシュミットの正規直交化法はこれを利用している。

(5) $\{a_1, a_2, \cdots a_r\}$ をベクトル空間 W の基底とする.
← 1次独立

グラムシュミットは与えられた空間の基底を正規化（大きさを1にする）
直交化（内積を0にする）したい
かつ1次独立を保つ必要がある.

（ベクトルっぽさを出すために → 書いただけで特に意味はない）

$\vec{b_1} = \vec{a_1}$ とおいて

$\vec{b_2} = \vec{a_2} + \lambda_1 \vec{b_1}$

ここで $\vec{b_2}$ は $\vec{a_2}$ と $\vec{a_1}$ によってでき
$\vec{b_1}$ は $\vec{a_1}$ だけでできるため.
$\vec{b_1}$ と $\vec{b_2}$ は1次独立 …☆より

ここで $\vec{b_1} \perp \vec{b_2}$ にしたいから.

$\vec{b_1} \cdot \vec{b_2} = \vec{a_2} \cdot \vec{b_1} + \lambda_1 \vec{b_1} \cdot \vec{b_1} = 0$ よって $\lambda_1 = -\dfrac{\vec{a_2} \cdot \vec{b_1}}{\vec{b_1} \cdot \vec{b_1}}$ （$\vec{b_1} \cdot \vec{b_1} = |\vec{b_1}|^2$ と表記してもよい）

$$\vec{b_2} = \vec{a_2} - \frac{\vec{a_2} \cdot \vec{b_1}}{\vec{b_1} \cdot \vec{b_1}} \vec{b_1}$$

同様に $\vec{b_3} = \vec{a_3} + \lambda_2 \vec{b_1} + \lambda_3 \vec{b_2}$

ここで $\vec{b_3}$ は $\vec{a_1}$ と $\vec{a_2}$ と $\vec{a_3}$ によってできるから.
$\vec{b_1}$ と $\vec{b_2}$ と $\vec{b_3}$ は1次独立 …☆より

$\vec{b_3} \perp \vec{b_1}$, $\vec{b_3} \perp \vec{b_2}$ にしたい（ここまでの条件から $\vec{b_1} \perp \vec{b_2} \Leftrightarrow \vec{b_1} \cdot \vec{b_2} = 0$ が成立）

$\vec{b_3} \cdot \vec{b_1} = \vec{a_3} \cdot \vec{b_1} + \lambda_2 \vec{b_1} \cdot \vec{b_1} + \lambda_3 \underbrace{\vec{b_2} \cdot \vec{b_1}}_{0} = 0$ より $\lambda_2 = -\dfrac{\vec{a_3} \cdot \vec{b_1}}{\vec{b_1} \cdot \vec{b_1}}$

$\vec{b_3} \cdot \vec{b_2} = \vec{a_3} \cdot \vec{b_2} + \lambda_2 \underbrace{\vec{b_1} \cdot \vec{b_2}}_{0} + \lambda_3 \vec{b_2} \cdot \vec{b_2} = 0$ より $\lambda_3 = -\dfrac{\vec{a_3} \cdot \vec{b_2}}{\vec{b_2} \cdot \vec{b_2}}$

よって $\vec{b_3} = \vec{a_3} - \dfrac{\vec{a_3} \cdot \vec{b_1}}{\vec{b_1} \cdot \vec{b_1}} \vec{b_1} - \dfrac{\vec{a_3} \cdot \vec{b_2}}{\vec{b_2} \cdot \vec{b_2}} \vec{b_2}$ だいたいここまでしか使わない!

一般化すると $\vec{b_k} = \vec{a_k} - \dfrac{\vec{a_k} \cdot \vec{b_1}}{\vec{b_1} \cdot \vec{b_1}} \vec{b_1} - \dfrac{\vec{a_k} \cdot \vec{b_2}}{\vec{b_2} \cdot \vec{b_2}} \vec{b_2} \cdots - \dfrac{\vec{a_k} \cdot \vec{b_{k-1}}}{\vec{b_{k-1}} \cdot \vec{b_{k-1}}} \vec{b_{k-1}}$

…続く

No.

Date

あとは正規化するだけ．大きさを1にするので

$$c_k = \frac{\vec{b_k}}{\|\vec{b_k}\|}$$ ← ノルムという。大きさを示す

とりあえず，グラムシュミットはどういう仕組みか把握したら公式暗記でOK！

2 ベクトル空間．部分空間

(1) ベクトル空間とは

$$R^n = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \middle| \ x_1, x_2, \cdots x_n \in R \right\}$$ n次元ベクトル空間

n≦3以下じゃないとつかみづらいので，難しいところ。
たとえば n=3 なら．

$$R^3 = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \middle| \ x, y, z \in R \right\}$$ だと3次元の実数軸の xyz 空間を指す

(2) 部分空間とは

n次元ベクトル空間 R^n の中．のある部分内において，2つの条件を満たせば
部分空間であるといえる．　この部分空間をWとし．　Wは空でない（ゼロでないみたいな）
① $a \in W$．$b \in W$ ならば $a+b \in W$
② $\lambda \in R$，$a \in W$ ならば $\lambda a \in W$
すなわち ある空間内において．スカラー倍しても和をとってもその空間内に落ちつく。　このとき Wは R^n の部分空間といえる。
n次元空間の中で一定のルールが成り立つ部分がある．これを新たな空間として定義づけているわけである。

言葉じゃ難しいから例を挙げます。

No.

Date

例1　$W=\left\{\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\middle|\ x.y は整数\right\}$ は $\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\in W$　$\vec{b}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\in W$ ならば

$\vec{a}+\vec{b}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\in W$ は満たすが、$\frac{1}{2}\vec{a}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\0\end{pmatrix}\notin W$ であるから R^2 の部分空間でない。

例2　$W=\left\{\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\middle|\ x=0 または y=0\right\}$ は $\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\in W$　$\vec{b}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\in W$ ならば

$\vec{a}+\vec{b}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\notin W$ でダメ　ちなみに $\lambda\vec{a}=\begin{pmatrix}\lambda\\0\end{pmatrix}\in W$ である.

こういうことをスカラー倍について閉じているが、和について閉じていないと表現する。

例3　$W=\left\{\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\middle|\ x+y=0\right\}$　$\vec{a}\in W$　$\vec{b}\in W$ というベクトルをとる (例 $\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$)

$\vec{a}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}$　$\vec{b}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix}$ とすると　$a_1+a_2=0$.　$b_1+b_2=0$ が成り立つ.

ここで $\vec{a}+\vec{b}=\begin{pmatrix}a_1+b_1\\a_2+b_2\end{pmatrix}$ であるがこれは $(a_1+b_1)+(a_2+b_2)=0$ であるから
$\vec{a}+\vec{b}\in W$

また $\lambda\vec{a_1}=\begin{pmatrix}\lambda a_1\\\lambda a_2\end{pmatrix}$ より　$\lambda(a_1+a_2)=0$ で　$\lambda\vec{a}\in W$

よって W は R^2 の部分空間である.

左ページの ① と ② をまとめて

$\lambda\in R$, $\mu\in R$ かつ $a\in W$. $b\in W$ ならば $\lambda a+\mu b\in W$ が成り立つ.

これを部分空間であることの条件としてもよい。

(3) 逆に1次独立なベクトルを与えられたとき部分空間を作ることができる

R^n のベクトル $a_1, a_2, \cdots a_r$ が与えられたとき、これのスカラー倍と和をすべて集めたもの、それが R^n の部分空間となるのである。($a_1, a_2, \cdots a_r$ の一次結合によってできる空間

つまり、どんな形の和やスカラー倍であっても、最終的に

$\lambda_1 \vec{a_1} + \lambda_2 \vec{a_2} + \cdots + \lambda_r \vec{a_r}$ という形になれば

その空間内は部分空間と呼べるのだ。 できた部分空間を W として

つまり $p_1 a_1 + p_2 a_2 + \cdots + p_r a_r \in W$ $q_1 a_1 + q_2 a_2 + \cdots + q_r a_r \in W$ より

$(p_1 a_1 + p_2 a_2 + \cdots + p_r a_r) + (q_1 a_1 + \cdots q_r a_r) = (\lambda_1 + \mu_1) a_1 + (\lambda_2 + \mu_2) a_2 + \cdots + (\lambda_r + \mu_r) a_r$

より ① が成り立ち

$s(p_1 a_1 + p_2 a_2 + \cdots + p_r a_r) = s p_1 a_1 + s p_2 a_2 + \cdots + s p_r a_r$

より ② が成り立つから。 部分空間であるといえるわけだ。

そしてこの部分空間を作った $\{a_1, a_2 \cdots a_r\}$ こそが
この部分空間における基底なのである。

例題 $W = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} \middle| \ x+y+z+w=0 \right\}$ の基底と次元を求めよ。

$W = \left\{ \begin{bmatrix} -y-z-w \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} \right\}$ と直せるから。

$$\begin{pmatrix} -y-z-w \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + w \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

基底 $\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ 次元3 (このWをつくる基底が3つであるから)

(4) 部分空間の和 (難しいので簡単な説明だけ)

$W_1 \cap W_2$ は W_1, W_2 の共通部分 (重なり)

$W_1 \cup W_2$ は 和集合 (W_1, W_2 どちらか一方でも含むようなところ)

$W_1 \oplus W_2$ 　 $W_1 \cap W_2 = \{0\}$ のときに限る。直和とよぶ。

$R^3 = \{e_1\} \oplus \{e_2, e_3\}$

$R^3 = \{e_1, e_2\} + \{e_2, e_3\}$ であるが

$\{e_1, e_2\} \oplus \{e_2, e_3\}$ ではない ($\{e_2\} \neq \{0\}$ より)

正直これを使った問題は難しいと思うので、読者のポテンシャルに任せます。
自分もよくわかんないです。たぶんこういうのがしっかり使えれば優なのかな…
あんまり出なそうだけど、出たらゴメンなさい!!
11月2日の小テストが出来ればいいと思います。(ない人は当日みれば間に合うと思います。)

左ページの補足

基底はもちろん1次独立になるようにとりましょう.

部分空間の次元は基底の数のことです。

上の補足

一応2次元定理を覚えておきましょう

$$\dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2)$$

W_1, W_2 の次元は求められると思うので、あとは気合いで $W_1 \cap W_2$ について考えてね!

No.

Date

3 線型写像

$f: V \to W$ とし

(1) $f(a+b) = f(a) + f(b)$

(2) $f(\lambda a) = \lambda f(a)$

が すべての $a, b \in V$ 　$\lambda \in R$ なら 線型写像 といえる.

☆ (1)と(2) あわせて $f(\lambda a + \mu b) = \lambda f(a) + \mu f(b)$ のほうが便利かも.

例 $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ 2x-y \end{pmatrix}$ は 線型写像か.

$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ 　$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ として

$$f(\lambda a + \mu b) = f\begin{pmatrix} \lambda a_1 + \mu b_1 \\ \lambda a_2 + \mu b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_1 + \mu b_1 + \lambda a_2 + \mu b_2 \\ 2\lambda a_1 + 2\mu b_1 - \lambda a_2 - \mu b_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a_1 + a_2 \\ 2a_1 - a_2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} b_1 + b_2 \\ 2b_1 - b_2 \end{pmatrix}$$

$$= \lambda f(a) + \mu f(b)$$

① 表現行列とは

V の基底 $\{a_1, a_2, \cdots a_r\}$ と W の基底 $\{b_1, b_2, \cdots b_s\}$ を定めたとき

$f: V \to W$ として

$$\begin{cases} f(a_1) = f_{11} b_1 + f_{21} b_2 + \cdots + f_{s1} b_s \\ f(a_2) = f_{12} b_1 + f_{22} b_2 + \cdots + f_{s2} b_s \\ \vdots \\ f(a_r) = f_{1r} b_1 + f_{2r} b_2 + \cdots + f_{sr} b_s \end{cases}$$

小テスト　11月9日　$\vec{u_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ 　$\vec{u_2} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ 　$\vec{u_3} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \in V$

この変換を A

$(V := R^3,\ W := R^2)$ 　$\vec{w_1} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ 　$\vec{w_2} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \in W$ 　$f_A: V \to W$ で $A := \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

$|\vec{u_1}\ \vec{u_2}\ \vec{u_3}| = 1 \neq 0$ 　$|\vec{w_1}\ \vec{w_2}| = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ より 一次独立.

かつ V と W の次元に注目すると. 3, 2 より. $\{\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3}\}$ と $\{\vec{w_1}, \vec{w_2}\}$ は V, W の基底

$A\vec{u_1} = \begin{pmatrix} -6 \\ -1 \end{pmatrix} = -8\vec{w_1} - 9\vec{w_2}$

$A\vec{u_2} = \begin{pmatrix} -3 \\ 10 \end{pmatrix} = 17\vec{w_1} + 27\vec{w_2}$

$A\vec{u_3} = \begin{pmatrix} -8 \\ 18 \end{pmatrix} = 28\vec{w_1} + 46\vec{w_2}$

よって f_A の基底 $\{\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3}\}$, $\{\vec{w_1}, \vec{w_2}\}$ に関する表現行列は

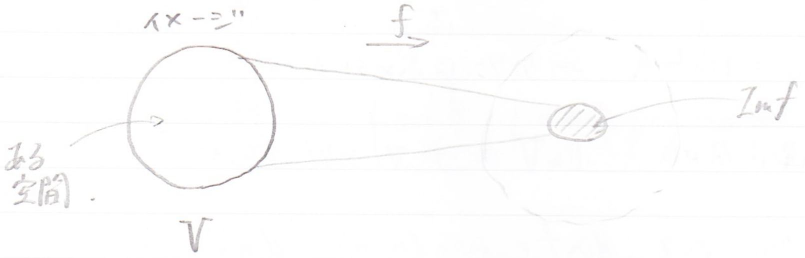
$$\begin{pmatrix} -8 & 17 & 28 \\ -9 & 27 & 46 \end{pmatrix}$$

② 像と核とは

$V \in R^n$, $W \in R^m$ $f: V \to W$ とすると.

像とは $\mathrm{Im} f$ と書き. $\mathrm{Im} f = \{ b \in W \mid f(a) = b$ となる $a \in V$ が存在する$\}$

これはある空間を f によって変換した後の空間のことを指す.



例: R^3 の線形変換 $f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-y \\ y-z \\ z-x \end{pmatrix}$ は.

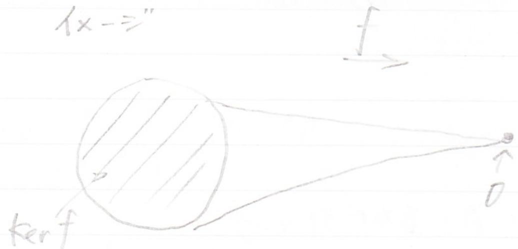
R^3 の任意のベクトルを $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ とすると

$$f\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-b \\ b-c \\ c-a \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$ より.

$\mathrm{Im} f$ は $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ の一次結合で示される.

$\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ より $\mathrm{Im} f$ の基底は $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ で R^3 の部分空間

核とは $\mathrm{Ker} f$ と書き $\mathrm{Ker} f = \{ a \in V \mid f(a) = 0 \}$



例は上と同様とし

$f\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0 = \begin{pmatrix} a-b \\ b-c \\ c-a \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ (c は任意)

$\mathrm{Ker} f$ は $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ を基底とする R^3 の部分空間

No.

Date

③ 線形写像の次元定理

$f: V \to W$ に対し　　　$f := A$　　A を $m \times n$ 行列とする.

$\dim V - \dim(\mathrm{Ker} f) = \dim(\mathrm{Im} f)$

さらに $\dim(\mathrm{Im} f) = \mathrm{rank}\,A$ ← カンタンに求められる.

また $\dim V$ も簡単に分かる　　$\dim V$ は $f: V \to W$ であるから.

f と V は同じ次元　よって　$\dim f = \max\{m, n\} = \dim V$ である
　　　　　　　　　　　　　m と n の大きいほう.

よって 核の次元は $\dim V$ と $\dim(\mathrm{Im} f)$ を求めてから出すのがよい.

④ 内積の利用

(1) 内積とは　(,) を内積とおくとき.

$(p, p) \geq 0$　　　…正値性
$(p, q) = (q, p)$　　…対称性
$(p, \lambda q + \mu r) = \lambda(p, q) + \mu(p, r)$ …双線型性が言えればよい.

(2) 直交行列とは.

${}^tAA = A{}^tA = I$ を満たす A を直交行列という.

(1) $|A| = \pm 1$
(2) ${}^tA = A^{-1}$
(3) A の列ベクトル $A = (a_1\ a_2\ a_3 \cdots a_n)$ は R^n の正規直交基底を成す.

小テスト 12月21日 をよく見ておくとよいです。

No.

Date

5 固有値、固有ベクトル

だいたいみんなできると思うので、補足をしておく程度で。

(1) 固有空間の答え方

固有値～に対し $\left\{ s \begin{pmatrix} 固有 \\ ベ \\ ク \\ ト \\ ル \end{pmatrix} \middle| s \in R \right\}$ と答えます。

(2) ユニタリー行列とは

$A^* = A^{-1}$ （A^*はAに対し転置かつ複素共役）

が成立する

$$A = \begin{pmatrix} a+bi & c+di \\ e+fi & a+bi \end{pmatrix} \quad A^* = \begin{pmatrix} a-bi & e-fi \\ c-di & a-bi \end{pmatrix}$$

実数ならば

$A^* = A^t$ より 直交行列と同じになる。

(3) 色々豆知識

固有空間の基底をグラム・シュミットすると、直交行列・ユニタリ行列が求められる。

（小テスト 1月11日とか）

Aが正則 $\Leftrightarrow$ $|A| \neq 0$

↖逆行列を持つ

正方行列Aの固有値がすべて異なるならば Aは対角化可能。

No.

Date

2次曲線の問題

$$ax^2 + bxy + cy^2 + \bigcirc = 0$$

の特性方程式は $\begin{pmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{pmatrix}$ の固有多項式で求められる.

2008年冬の問題4が解説詳しいので頑張って下さい.

過去問つながりで.

単射　　$f(a_1) = f(a_2) \longrightarrow a_1 = a_2$

1点ずつ対応してる. $f(x) = x$ はそうだけど
$f(x) = x^2$ はダメ.

全射　　$f: A \to B$ で
$a \in A$ で $f(a) = B$ が成り立つこと.
f による写像が B の空間内におさまること.

後書き

あんまり時間なくて後半適当になりました すいません。
とりあえずおさえておくべきことをまとめましたが、基本的に
小テストが自力で解けるようになれば大丈夫だと思います。
読んでくれた人はありがとう。 あとは演習いっぱいやって
頑張って下さい!!