2008年度冬学期　数学 Ia　解答

山本昌宏

2009年2月13日（金）10:55~12:25

1.

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{y\cdot(x^2+y^2)-xy\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2}=\frac{y(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}.$$

同様に

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{x(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\therefore \nabla f=\left(\frac{y(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2},\frac{x(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}\right).$$

また,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}\right)=\frac{-2xy\cdot(x^2+y^2)^2-y(y^2-x^2)\cdot 2(x^2+y^2)2x}{(x^2+y^2)^4}$$

$$=\frac{2xy(x^2-3y^2)}{(x^2+y^2)^3}.$$

同様に

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{2xy(y^2-3x^2)}{(x^2+y^2)^3}.$$

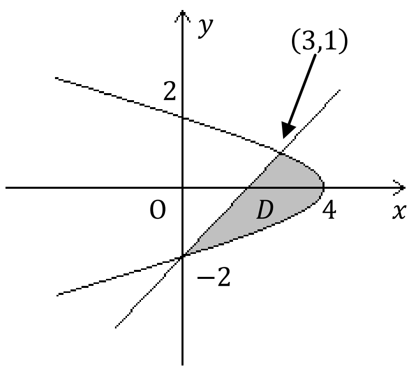
最後に

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}\right)=\frac{(3x^2-y^2)\cdot(x^2+y^2)^2-x(x^2-y^2)\cdot 2(x^2+y^2)2x}{(x^2+y^2)^4}$$

$$=\frac{-x^4+6x^2y^2-y^4}{(x^2+y^2)^3}.$$

★$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$が成り立ちます.余力のある人は,実際に計算して確かめてみるとよいでしょう.

2. $D=\{(x,y)|-2\le y\le 1\,,y+2\le x\le 4-y^2\}$であるから



$$\iint_D x^2y\,dxdy=\int_{-2}^{1}\left(\int_{y+2}^{4-y^2}x^2y\,dx\right)dy=\int_{-2}^{1}\left[\frac{x^3y}{3}\right]_{y+2}^{4-y^2}dy$$

$$=\frac{1}{3}\int_{-2}^{1}y(4-y^2)^3dy-\frac{1}{3}\int_{-2}^{1}y(y+2)^3dy.$$

ここで

$$\int_{-2}^{1} y(4-y^2)^3 dy = -\frac{1}{2}\int_{-2}^{1}(4-y^2)'(4-y^2)^3 dy = -\frac{1}{2}\left[\frac{(4-y^2)^4}{4}\right]_{-2}^{1} = -\frac{81}{8},$$

$$\int_{-2}^{1} y(y+2)^3 dy = \int_{-2}^{1}((y+2)^4 - 2(y+2)^3)dy = \left[\frac{(y+2)^5}{5} - \frac{(y+2)^4}{2}\right]_{-2}^{1} = \frac{81}{10}.$$

よって

$$\iint_D x^2 y dx dy = \frac{1}{3}\left(-\frac{81}{8} - \frac{81}{10}\right) = -\frac{243}{40}.$$

3. 十分大きなRに対し

$$\int_1^R \frac{1}{x(1+x^2)}dx = \int_1^R \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2}\right)dx = \left[\log|x| - \frac{1}{2}\log|1+x^2|\right]_1^R$$

$$= \log R - \frac{1}{2}\log(1+R^2) + \frac{1}{2}\log 2 = \log\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{R^2}}} + \frac{1}{2}\log 2$$

$$\therefore \int_1^\infty \frac{1}{x(1+x^2)}dx = \lim_{R\to\infty}\int_1^R \frac{1}{x(1+x^2)}dx = \lim_{R\to\infty}\left(\log\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{R^2}}} + \frac{1}{2}\log 2\right) = \frac{1}{2}\log 2.$$

4. (i) $a_n = n+2$とすると,収束半径Rは

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+1}{n+2}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{2}{n}} = 1.$$

(ii) $a_n = \frac{r^n}{n^2}$とすると,収束半径Rは

$$R = \sqrt{\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|} = \sqrt{\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{r^n}{n^2}}{\frac{r^{n+1}}{(n+1)^2}}\right|} = \sqrt{\lim_{n\to\infty}\frac{1}{r}\left(1+\frac{1}{n}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{r}}.$$

★(ii)では項がとびとびになっているので注意が必要です.極限$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$が存在しない場合は,次のCauchy-Hadamard の公式を用います:

$$R = \left(\limsup_{n\to\infty}|a_n|^{\frac{1}{n}}\right)^{-1}.$$

5. $f(x)=\sqrt{1-x}$とおくと

$$f'(x)=-\frac{1}{2}(1-x)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\therefore f(x)=f(0)+f'(0)x+O(x^2)=1-\frac{x}{2}+O(x^2).$$

よって,

$$\sqrt{1-x^2}=f(x^2)=1-\frac{x^2}{2}+O(x^4)\approx 1-\frac{x^2}{2}.$$

6. (i) $a_n=\frac{1}{n(n-1)}$とすると,収束半径Rは

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{1}{n(n-1)}}{\frac{1}{(n+1)n}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n}}{1-\frac{1}{n}}=1.$$

(ii) $|x|<1$のとき

$$f'(x)=\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{x^n}{n(n-1)}\right)'=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n-1}$$

$$\therefore f''(x)=\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{x^{n-1}}{n-1}\right)'=\sum_{n=2}^{\infty}x^{n-2}=\frac{1}{1-x}.$$

(iii)

$$f'(x)=\int\frac{1}{1-x}dx=-\log(1-x)+C\ (\because |x|<1).$$

$f'(0)=0$より$C=0$だから,$f'(x)=-\log(1-x)$.従って

$$f'(x)=-\int\log(1-x)\,dx=\int(1-x)'\log(1-x)\,dx$$

$$=(1-x)\log(1-x)-\int(1-x)\cdot\frac{-1}{1-x}dx=(1-x)\log(1-x)+x+C.$$

$f(0)=0$より$C=0$だから,$f(x)=(1-x)\log(1-x)+x$.

7. $f_n(x)=\frac{r^{2n}\sin^{4n}x}{n!}$とし,任意に$R>0$をとっておく.ここで

$$|\sin^{4n}x|\le 1\ ({}^{\forall}x\in[-R,R]\,,{}^{\forall}n),$$

であるから

$$|f_n(x)| \leq \frac{r^{2n}}{n!}$$

が成り立つ.さらに,$M_n = \frac{r^{2n}}{n!}$とおくと

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^{2n}}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(r^2)^n}{n!} = e^{r^2} - 1 < \infty \ ({}^{\forall} r > 0).$$

従って,Weierstrass の M テストより,級数$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$は$|x| \leq R$に対して一様かつ絶対収束する.

8. (問題の訂正:$x \to 3$)

求める曲線の長さをsとすると

$$s = \int_0^{3\pi} \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\, d\theta = \int_0^{3\pi} \sqrt{\left(a \sin^3 \frac{\theta}{3}\right)^2 + \left(a \sin^2 \frac{\theta}{3} \cos \frac{\theta}{3}\right)^2}\, d\theta$$

$$= a \int_0^{3\pi} \sin^2 \frac{\theta}{3} \sqrt{\sin^2 \frac{\theta}{3} + \cos^2 \frac{\theta}{3}}\, d\theta = a \int_0^{3\pi} \sin^2 \frac{\theta}{3}\, d\theta = a \int_0^{3\pi} \frac{1 - \cos \frac{2}{3}\theta}{2}\, d\theta$$

$$= \frac{a}{2}\left[\theta - \frac{3}{2} \sin \frac{2}{3}\theta\right]_0^{3\pi} = \frac{3}{2}\pi a.$$

★問題を訂正しました.xのままだと,rをθについて陽の形に表すことができず,事実上計算不能です.xをパラメータとして考えても,$x \neq 3$のときには楕円積分が登場し,これも計算できません.

〜あとがき〜

「IA」っぽくない試験でしたね.タイトルが「Ia」になっているところから少しやる気を失います(笑)

問題を見ても分かる通り,基本事項を理解してさえいれば全問正解も難しくありません.成績は相対評価ですから,試験が簡単なぶん小さなミスが命取りになると思います.油断しなければきっと大丈夫です.

2009 年 11 月 7 日　　髙橋　一史