数学 IA 講義ノート(No.4)　　　理科一類 37 組

～はじめに～

数学 IA の講義ノート第 4 弾です.2 学期もよろしくお願いします.一学期とは変わり,計算中心の講義と計算中心の試験みたいなので,計算問題集的な講義ノートになっています.加えて一学期の内容とかぶっている箇所がありますが,講義で扱った以上試験範囲になり得るので再び掲載します.

…ちなみに全部で 44 ページです.

≪復習≫ 級数

級数とは何か,などの基本的なことについては割愛します(というか,この章自体必要ないかも知れませんが).ほとんど知っていることとは思いますが,講義で紹介された定理を羅列します.

定理 r.1(比較定理) $a_n \geq b_n > 0$のとき

(1). $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束 $\Rightarrow$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ も収束.

(2). $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ が発散 $\Rightarrow$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ も発散.

定理 r.2(D'Alembert の判定法) $a_n > 0$とする.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \rho$$

が存在するとき,

$$\rho < 1 \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ は収束,}$$

$$\rho > 1 \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ は発散.}$$

定理 r.3(Cauchy の判定法) $a_n > 0$とする.

$$\lim_{n\to\infty} {a_n}^{\frac{1}{n}} = \rho$$

が存在するとき,

$$\rho < 1 \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ は収束,}$$

$$\rho > 1 \quad \Longrightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ は発散.}$$

定理 r.4(Raabe の判定法) $a_n > 0$とする.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_{n+1}}{a_n} - 1\right)n = \rho$$

が存在するとき,

$$\rho < -1 \quad \Longrightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ は収束,}$$

$$\rho > -1 \quad \Longrightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ は発散.}$$

定理 r.5 絶対収束する級数は収束する.

次の定理も非常に有名なので覚えておくとよいでしょう.

定理 r.6 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$を各項が正の単調減少数列で$a_n \to 0\ (n \to \infty)$とする.このとき級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$$

は収束する.

Exr.1 次の級数の収束,発散を判定せよ.

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+2}$ (2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^3+2n-2}$

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n}}{n}$ (4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\log(n+1)}$

(5) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(n+1)}{(n+1)^3}$ (6) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!}$

(7) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\log\left(1+\frac{1}{n}\right)$ (8) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n\sin\frac{1}{n}$

(9) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ (10) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(2n+1)!!}$ ($m!!$は 2 重階乗[1])

[1] 正の奇数に対してはその数以下の全ての奇数の積を,正の偶数に対してはその数以下の全ての偶数の積を対応させる関数です.たとえば$5!! = 5\cdot 3\cdot 1 = 15$, $10!! = 10\cdot 8\cdot 6\cdot 4\cdot 2 = 3840$となります.また,$0!! = (-1)!! = 1$と定義します.

(11) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{3^n}$　　(12) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n-1)!}{n^{n+1}}$

(13) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(n-\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{3}{2}\right)\cdots\frac{1}{2}}{n!}$　　(14) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\binom{2n}{n}$ $\left(\binom{m}{r}\text{は二項係数}\right)$

(15) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\sin\left(\sin\frac{1}{n^2}\right)$

第 4 章　積分

§ 4.1　不定積分

不定積分の計算は高校時代にさんざん練習したと思うので,ここでは基本事項は省略します.問題を解きながら計算テクニックを身につけましょう.なお,問題によっては逆三角関数や双曲線関数を使ったりするので,知らない人は付録 A をご覧ください.

Ex4.1.1 次の不定積分を求めよ(番号が赤い問題は,解けなくて構いません).

(1) $I=\displaystyle\int e^{\sqrt{x}}dx$　　(2) $I=\displaystyle\int\frac{dx}{(x+1)^2(x+2)}$

(3) $I=\displaystyle\int\frac{dx}{x^3-1}$　　(4) $I=\displaystyle\int\frac{dx}{x^4+1}$

(5) $I=\displaystyle\int\frac{dx}{x^5-1}$　　(6) $I=\displaystyle\int\frac{dx}{(x^2+1)^3}$

(7) $I=\displaystyle\int\frac{dx}{\sin x}$　　(8) $I=\displaystyle\int\frac{dx}{\sinh x}$

(9) $I=\displaystyle\int\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}dx$　　(10) $I=\displaystyle\int\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}dx$

(11) $I=\displaystyle\int(\log x)^3dx$　　(12) $I=\displaystyle\int\sqrt{1+x^2}dx$

(13) $I=\displaystyle\int\frac{x}{\sqrt{2-x-x^2}}dx$　　(14) $I=\displaystyle\int\frac{\sqrt[4]{x}}{1-\sqrt{x}}dx$

(15) $I=\displaystyle\int\sqrt{e^{2x}-1}dx$　　(16) $I=\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$

(17) $I=\displaystyle\int\sqrt{\tan x}\,dx$　　(18) $I=\displaystyle\int xe^x\sin x\,dx$

(19) $I=\displaystyle\int\frac{x}{(1+\cos x)^2}dx$　　(20) $I=\displaystyle\int\frac{dx}{x^3-3x+1}$

§4.2 定積分

一般に,関数$f(x)$に対して$F'(x) = f(x)$となる関数$F(x)$を原始関数と呼び,その全体を不定積分と呼ぶのでした.これとは独立に,関数$f(x)$の定積分は次のように定義されます:

関数$f(x)$は閉区間$[a,b]$で有界とする.

$$\Delta:\ \ a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$$

を$[a,b]$の小区間への分割とし,$x_{i-1} \le c_i \le x_i$となるc_iを任意にとり

$$\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\delta_i \quad (\delta_i = x_i - x_{i-1})$$

を作る.$\delta = \delta(\Delta)$を$\delta_i\,(i = 1,2,\cdots,n)$の最大値とする.

もし分割Δ及び$c_i\,(i = 1,2,\cdots,n)$の選び方とは無関係に,一定の極限値

$$\lim_{\delta \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\delta_i$$

が存在するならば,$f(x)$は可積分であるといい,この極限値を$f(x)$の定積分と呼んで

$$\int_a^b f(x)dx$$

で表す.

証明は省きますが,一般に連続関数は可積分であることが知られています(cf.付録 B).この定積分と不定積分を関係づけるのが,次の微分積分学の基本定理です:

定理 4.2.1(微分積分学の基本定理) $f(x)$を閉区間$[a,b]$で連続な関数とし,cをこの区間の 1 点とする.このとき,

(1) $S(x) = \int_c^x f(x)dx$は$f(x)$の原始関数である.

(2) $F(x)$を$f(x)$の原始関数の 1 つとすれば

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b.$$

これによって,高校以来勉強してきた定積分の計算が正当化されるというわけです.定積分の基本性質などは十分承知していることと思いますから,あとは計算練習をしましょう.

Ex4.2.1 次の定積分を求めよ(番号が赤い問題は,少し難しいです).

(1) $I = \int_0^1 \sqrt{x + \sqrt{x}}dx$

(2) $I = \int_{-1}^1 |e^x - 1|dx$

(3) $I = \int_0^1 e^{x+e^x} dx$

(4) $I = \int_0^2 x^2\sqrt{4 - x^2}dx$

(5) $I=\int_0^1 x\sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}}\,dx$　　(6) $I=\int_{-1}^1 \frac{\pi^x-1}{\pi^x+1}\log(\cos x)\,dx$

(7) $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2+\cos x}$　　(8) $I=\int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{3+\sin^2 x}dx$

(9) $I=\int_0^1 \frac{\log(1+x)}{1+x^2}dx$　　(10) $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\tan^{\sqrt{2}} x}$

§4.3 積分の応用

前のセクションで定積分を定義し,不定積分との関係を示す微分積分学の基本定理を紹介しました.ここでは積分の応用,特に求積法を扱います.

まずは面積の話から.閉区間$[a,b]$上で正の値をとる連続関数$y=f(x)$のグラフとx軸,及び直線$x=a, x=b$で囲まれた部分の面積Sを考えます.閉区間$[a,b]$を

$$\Delta:\quad a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$$

のように分割し,和

$$\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\delta_i \quad (\delta_i=x_i-x_{i-1})$$

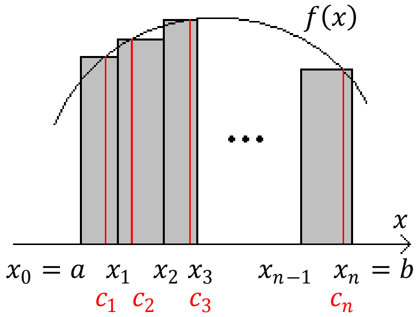
を作ります.これは右図における灰色の長方形の面積の和に等しいので,分割を十分細かくとればSに近づくと考えられます.そこで,極限

$$\lim_{\delta\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\delta_i$$

が存在するとき,その値をもって上述の図形の面積と定義します.すなわち,定積分の定義より

$$\boxed{S=\int_a^b f(x)dx}$$

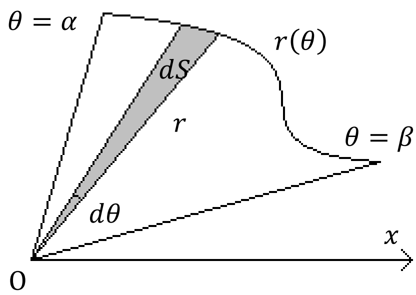
となるわけです.



曲線の方程式が極座標表示されている場合には,少し工夫が必要です.曲線$r=r(\theta)$と 2 直線$\theta=\alpha, \theta=\beta$で囲まれた部分の面積を考えます.右図で微小扇形の面積dSは

$$dS=\frac{1}{2}r^2 d\theta$$

と書けますから



$$S=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}r^2d\theta$$

となります.

Ex4.3.1 サイクロイド$x(t)=a(t-\sin t)\,,y(t)=a(1-\cos t)\ (a>0)$の 1 つの弧と$x$軸とで囲まれる図形の面積を求めよ.

Ex4.3.2 レムニスケート$(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)\ (a>0)$で囲まれる 2 つの珠の面積の和を求めよ.

次に,曲線の長さについて.本当は曲線の長さをきちんと定義しなければなりませんが,ここでは感覚的な理解にとどめておくことにします.
パラメータ表示$x=x(t),y=y(t)\ (a\le t\le b)$によって定められる曲線の長さ$s$を考えます.$x$が$\Delta x$だけ,$y$が$\Delta y$だけ増加したとき,曲線長の増分は

$$\Delta s\approx\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$$

と書けます.一方で

$$\Delta x\approx x'(t)\Delta t\,,\Delta y\approx y'(t)\Delta t$$

が成り立ちますから

$$\Delta s\approx\sqrt{(x'(t)\Delta t)^2+(y'(t)\Delta t)^2}=\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}\Delta t$$

$$\therefore s=\int_a^b\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}dt.$$

特に,曲線が$y=f(x)\ (a\le x\le b)$と表示されている場合には$x=t,y=f(t)\ (a\le t\le b)$と考えて

$$s=\int_a^b\sqrt{1+f'(t)^2}dt,$$

となりますから,積分変数を書き換えて

$$s=\int_a^b\sqrt{1+f'(x)^2}dx$$

が成り立ちます.
また,極方程式で$r=r(\theta)$と与えられる曲線については

$$\frac{dx}{d\theta}=\frac{d}{d\theta}(r(\theta)\cos\theta)=\frac{dr(\theta)}{d\theta}\cos\theta-r(\theta)\sin\theta,$$

$$\frac{dy}{d\theta}=\frac{d}{d\theta}(r(\theta)\sin\theta)=\frac{dr(\theta)}{d\theta}\sin\theta+r(\theta)\cos\theta$$

ですから

$$\int_\alpha^\beta \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\,d\theta=\int_\alpha^\beta \sqrt{\left(\frac{dr(\theta)}{d\theta}\cos\theta-r(\theta)\sin\theta\right)^2+\left(\frac{dr(\theta)}{d\theta}\sin\theta+r(\theta)\cos\theta\right)^2}\,d\theta$$

$$=\int_\alpha^\beta \sqrt{r^2+\left(\frac{dr(\theta)}{d\theta}\right)^2}\,d\theta$$

$$\therefore s=\int_\alpha^\beta \sqrt{r^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\,d\theta.$$

Ex4.3.3 カテナリー$y=a\cosh\frac{x}{a}$ $(a>0)$上の 2 点$(0,a),(x,y)$の間の曲線の長さを求めよ.

Ex4.3.4 アステロイド$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ $(a>0)$の全長を求めよ.

Ex4.3.5 曲線$r=e^\theta$上の 2 点$(1,0),(r,\theta)$の間の曲線の長さを求めよ.

体積も積分で計算できるのでした.平面$x=t$における断面積が$S(t)$となるような立体の,2 平面$x=a,x=b$の間の体積を考えます.xをΔxだけ増やしたときの体積の増分は,底面積$S(x)$,高さΔxの柱体の体積で近似できますから

$$\Delta V=S(x)\Delta x$$

$$\therefore V\approx\int_a^b S(x)dx$$

となります.

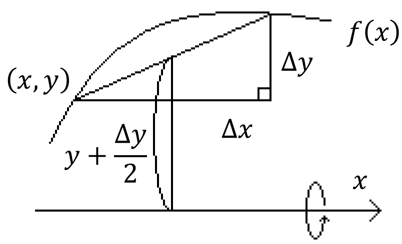
特に,曲線$y=f(x)$ $(a\le x\le b)$をx軸の周りに 1 回転させてできる立体は,平面$x=t$における断面が半径$f(t)$の円ですから,その体積は

$$V=\pi\int_a^b f(x)^2dx$$

と書けます.

Ex4.3.6 サイクロイド$x(t)=a(t-\sin t)\,,y(t)=a(1-\cos t)$ $(a>0)$の 1 つの弧をx軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ.

最後に,回転体の側面積について.曲線$y=f(x)$ $(a\le x\le b)$をx軸の周りに 1 回転させてできる立体の表面積を考えます.右図のような,曲線$y=f(x)$の微小片による回転体の側面積の増分は



$$\Delta S \approx 2\pi\left(y+\frac{\Delta y}{2}\right)\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2} = 2\pi\left(y+\frac{\Delta y}{2}\right)\sqrt{1+\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}\,\Delta x \approx 2\pi y\sqrt{1+(y')^2}\Delta x$$

$$\therefore S = 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+f'(x)^2}dx.$$

Ex4.3.7 回転楕円体$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}=1\ (a,b>0)$の全表面積$S$を求めよ.

§4.4 広義積分

有界でない関数の定積分や,無限区間上の関数の定積分などを一般に広義積分とよびます.考察対象がこのような関数である以上,その値が有限確定値とならない場合は数多くあります.このセクションでは,広義積分がいつ収束するか,収束するとすればその値はどうなるかを議論します.

例として,定積分

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

を考えます.被積分関数は半開区間$[0,1)$上の連続関数で,$x\to 1-0$のとき有界ではありません.しかし,$0\le x<1$とすると

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \sin^{-1}x$$

となりますから

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{x\to 1-0}\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{x\to 1-0}\sin^{-1}x = \frac{\pi}{2}$$

とするのは自然な考え方です.そこで,半開区間$[a,b)$で連続だが有界でない関数$f(x)$に対し

$$\lim_{x\to b-0}\int_a^x f(x)dx$$

が存在するならば,広義積分

$$\int_a^b f(x)dx$$

は収束するといい,この極限値を広義積分の値とします.極限値が存在しないとき,この広義積分は発散するといいます.

この定義は半開区間$(a,b]$上の関数についても同様です.すなわち,極限

$$\lim_{x\to a+0}\int_x^b f(x)dx$$

が存在するとき広義積分は収束するといい,この極限値をその値とします.
開区間(a,b)上の関数については,$a<c<b$となるcをとり,半開区間$(a,c]$及び$[c,b)$上の広義積分

$$\int_a^c f(x)dx\ ,\int_c^b f(x)dx$$

が共に収束するとき広義積分は収束するといい,これらの和をその値とします.

Ex4.4.1 次の広義積分の収束,発散をαの値の範囲に関して分類せよ:

$$\int_0^1 x^\alpha\, dx\ (\alpha<0).$$

次に,無限区間上の連続関数についての広義積分を定義します.
$[a,+\infty)$で連続な関数$f(x)$に対し

$$\lim_{x\to+\infty}\int_a^x f(x)dx$$

が存在するならば,広義積分

$$\int_a^\infty f(x)dx$$

は収束するといい,この極限値を広義積分の値とします.極限値が存在しないとき,この広義積分は発散するといいます.
広義積分

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx\ ,\int_{-\infty}^\infty f(x)dx$$

についても,定義は同様です.

Ex4.4.2 次の広義積分の収束,発散をβの値の範囲に関して分類せよ:

$$\int_1^\infty x^\beta\, dx.$$

広義積分の収束判定については,級数の場合にも用いたような比較による方法があります.
定理の形で述べておきましょう:

定理 4.4.1 $[a,b)$上の連続関数$f(x)$に対し,

$$|f(x)|\le F(x)\ (a\le x<b)\,,\int_a^b F(x)dx<+\infty \quad\Rightarrow\quad \int_a^b f(x)dx\ \text{が存在.}$$

定理 4.4.2　$[a,+\infty)$上の連続関数$f(x)$に対し,

$$|f(x)| \leq F(x)\ (a \leq x < +\infty),\int_a^{\infty} F(x)dx < +\infty \quad \Rightarrow \quad \int_a^{\infty} f(x)dx \text{ が存在.}$$

比較に用いる関数(定理における$F(x)$)としては,収束,発散が容易に判定できる冪乗関数()が便利です.Ex4.4.1 及び Ex4.4.2 の結果はしっかり覚えておきましょう.

Ex4.4.3　次の広義積分の収束,発散を判定し,収束する場合にはその値を求めよ(番号が赤い問題は,少し難しいです).

(1) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{\frac{x}{1-x}}dx$　　(2) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\log x}{\sqrt{x}}dx$

(3) $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x-1}{x^3}dx$　　(4) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2\sin^{-1}x}{\sqrt{1-x^2}}dx$

(5) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{dx}{x(1+x^2)}$　　(6) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$

(7) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{1+x^2}dx$　　(8) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$

(9) $\displaystyle\int_0^{e^{\pi}} \sin\log x\, dx$　　(10) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\sin x\, dx$

$\int_a^b |f(x)|dx$が収束するとき,広義積分$\int_a^b f(x)dx$は絶対収束するといいます.これに関して,次の定理があります.級数の場合と似ていますね:

定理 4.4.3　絶対収束する広義積分は収束する.

一般に,この定理の逆は成り立ちません(Ex4.4.4).

Ex4.4.4　次の広義積分が収束すること,及び絶対収束しないことを示せ:

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x}dx.$$

Ex4.4.5　$x > 0$とする.次の広義積分は絶対収束することを示せ:

$$\int_0^{\infty} e^{-t}t^{x-1}dt.$$

付録 A 逆三角関数と双曲線関数・逆双曲線関数

§A.1 逆三角関数

三角関数の逆関数を考えるわけですが,三角関数は周期関数ですから,そのままでは逆関数を定義できません.そこで三角関数の定義域を制限し,単調な関数にしてからその逆関数を考えます.具体的には

$$y=\sin x\ \left(-\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{\pi}{2}\right)\text{の逆関数を}y=\sin^{-1}x\,(=\arcsin x),$$

$$y=\cos x\ (0\le x\le\pi)\text{の逆関数を}y=\cos^{-1}x\,(=\arccos x),$$

$$y=\tan x\ \left(-\frac{\pi}{2}< x<\frac{\pi}{2}\right)\text{の逆関数を}y=\tan^{-1}x\,(=\arctan x)$$

と定義します.同様に$\cot^{-1},\sec^{-1},\csc^{-1}$も定義できます.定義域の制限の仕方は他にも考えられますが,特に断りがなければこのように決めておきます.$\sin^{-1}x\neq(\sin x)^{-1}$に注意しましょう.逆三角関数の定義域,値域は次の表のようになります:

	定義域	値域
$y=\sin^{-1}x$	$[-1,1]$	$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$
$y=\cos^{-1}x$	$[-1,1]$	$[0,\pi]$
$y=\tan^{-1}x$	$(-\infty,\infty)$	$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$

ただし,$y=\sin^{-1}x$で$x=\sin y$を満たす全ての$y\in\mathbb{R}$を対応させる無限多価関数を意味する場合もあり,そのときは上で定義した関数は頭文字を大文字($\mathrm{Sin}^{-1}x$,$\mathrm{Arcsin}\,x$など)にして区別し,逆三角関数の主値とよびます.この講義ノートでは,特に断りがなければ頭文字が小文字でも主値を表すものとします.

さて,逆三角関数の導関数を求めましょう.$y=\sin^{-1}x$のとき$x=\sin y$ですから

$$\frac{dx}{dy}=\cos y=\sqrt{1-\sin^2 y}=\sqrt{1-x^2}\ \left(\because -\frac{\pi}{2}\le y\le\frac{\pi}{2}\text{より }\cos y\ge 0\right)$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ (-1<x<1).$$

同様に,$y=\cos^{-1}x$のとき

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ (-1<x<1),$$

$y=\tan^{-1}x$のとき

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{1+x^2}\ (-\infty<x<\infty)$$

となります.

以下n階導関数を計算することにより,次の Maclaurin 展開を得ます:

$$\sin^{-1} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n+1)(2n)!!} x^{2n+1},$$

$$\cos^{-1} x = \frac{\pi}{2} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n+1)(2n)!!} x^{2n+1},$$

$$\tan^{-1} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}.$$

最後に,不定積分を求めておきましょう.部分積分法を用います.

$$\int \sin^{-1} x\,dx = \int (x)' \sin^{-1} x\,dx = x\sin^{-1} x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = x\sin^{-1} x + \sqrt{1-x^2} + C.$$

同様にして

$$\int \cos^{-1} x\,dx = x\cos^{-1} x - \sqrt{1-x^2} + C,$$

$$\int \tan^{-1} x\,dx = x\tan^{-1} x - \frac{1}{2}\log(1+x^2) + C.$$

§A.2 双曲線関数・逆双曲線関数

双曲線関数は次のように定義されます:

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2},\ \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2},\ \tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

$$\left(\coth x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}},\ \mathrm{sech}\, x = \frac{2}{e^x + e^{-x}},\ \mathrm{csch}\, x = \frac{2}{e^x - e^{-x}}\right)$$

これらが双曲線関数とよばれるのは,点$(\cosh t, \sinh t)$が双曲線$x^2 - y^2 = 1$上にあるからです.

簡単な計算で,三角関数に類似した関係式が成り立つことが分かります:

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x},$$

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1,$$

$$\sinh(x+y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y,$$

$$\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y,$$

$$\tanh(x+y) = \frac{\tanh x + \tanh y}{1 + \tanh x \tanh y}.$$

次に,双曲線関数の導関数です:

$$\frac{d\sinh x}{dx}=\cosh x\ ,\frac{d\cosh x}{dx}=\sinh x\ ,\frac{d\tanh x}{dx}=\frac{1}{\cosh^2 x}.$$

実にシンプルですね.このことから,$\sinh x$, $\cosh x$の Maclaurin 展開は

$$\sinh x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\ ,\cosh x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

となります.不定積分も簡単で,それぞれ

$$\int\sinh x\,dx=\cosh x+C\ ,\int\cosh x\,dx=\sinh x+C\ ,\int\tanh x\,dx=\log(\cosh x)+C$$

です.

それに比して$\tanh x$の Maclaurin 展開は少し難しく,次のように書けます:

$$\tanh x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{B_{2n}4^n(4^n-1)}{(2n)!}x^{2n-1}.$$

ここで,B_nは Bernoulli 数とよばれ,次の漸化式を満たします:

$$B_0=1\ ,B_n=-\frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n+1}{i}B_i\ \ (n\geq 1).$$

さて,逆双曲線関数を考えましょう.$\cosh^{-1}x$については,2 価関数のまま扱ってしまう場合が多いです.わざわざ「逆双曲線関数」などといいましたが,実はすでに知っている関数の合成で表すことができます.実際

$$x=\sinh y\ \ \Leftrightarrow\ \ x=\frac{e^y-e^{-y}}{2}\ \ \Leftrightarrow\ \ e^{2y}-2xe^y-1=0$$

$$\Leftrightarrow\ \ e^y=x+\sqrt{x^2+1}\ (\because e^y>0)\ \ \Leftrightarrow\ \ y=\log\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$$

ですから,

$$\sinh^{-1}x=\log\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$$

と書けます.同様に

$$\cosh^{-1}x=\log\left(x\pm\sqrt{x^2-1}\right),$$

$$\tanh^{-1}x=\frac{1}{2}\log\frac{1+x}{1-x}.$$

逆双曲線関数の定義域,値域は次の表のようになります:

	定義域	値域
$y=\sinh^{-1}x$	$(-\infty,\infty)$	$(-\infty,\infty)$
$y=\cosh^{-1}x$	$[1,\infty)$	$(-\infty,\infty)$
$y=\tanh^{-1}x$	$(-1,1)$	$(-\infty,\infty)$

導関数を計算します.

$$\frac{d\sinh^{-1}x}{dx}=\frac{d}{dx}\left(\log\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\right)=\frac{1+\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}}=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}.$$

同様にして

$$\frac{d\cosh^{-1}x}{dx}=\pm\frac{1}{\sqrt{x^2-1}},$$

$$\frac{d\tanh^{-1}x}{dx}=\frac{1}{1-x^2}.$$

Maclaurin 展開は

$$\sinh^{-1}x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n-1)!!}{(2n+1)(2n)!!}x^{2n+1},$$

$$\tanh^{-1}x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

$\cosh^{-1}x$の定義域は$[1,\infty)$なので,Maclaurin 展開はできません.

最後に,不定積分は

$$\int\sinh^{-1}x\,dx=\int(x)'\sinh^{-1}x\,dx=x\sinh^{-1}x-\int\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx=x\sinh^{-1}x-\sqrt{x^2+1}+C$$

$$=x\log\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)-\sqrt{x^2+1}+C.$$

同様にして

$$\int\cosh^{-1}x\,dx=x\cosh^{-1}x\mp\sqrt{x^2-1}+C=x\log\left(x\pm\sqrt{x^2-1}\right)\mp\sqrt{x^2+1}+C,$$

$$\int\tanh^{-1}x\,dx=\ x\tanh^{-1}x+\frac{1}{2}\log(1-x^2)+C=\frac{x}{2}\log\frac{1+x}{1-x}+\frac{1}{2}\log(1-x^2)+C.$$

付録 B 可積分の条件
ここでの話は,今までの講義ノートにおける **Column** 的な位置付けですから,読み飛ばしていただいて構いません.

§B.1 零集合
§4.2 において,連続関数ならば可積分,すなわち関数が連続であることは可積分であることの十分条件であるという事実を紹介しました.また,不連続点が有限個ある場合にも可積分であることが分かっています.それでは,可積分であることはどの程度の不連続性まで許容してくれるのでしょうか?
…実は,それに関する必要十分条件が知られています.このセクションでは,その条件を記述するために必要な零集合という概念を定義し,具体例をいくつか紹介します.

定義(零集合) 実数の集合Bが零集合であるとは,任意の$\varepsilon > 0$に対して閉区間の列$\{I_n\}_{n\in\mathbb{N}}$が存在して

$$B \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \ , \sum_{n=1}^{\infty} |I_n| \leq \ \varepsilon$$

とできることをいう.ただし,$|I|$は区間Iの長さを表す.

たとえば,有限個の実数からなる集合$\{a_n\}_{n=1}^{N}$は零集合です.なぜならば,

$$I_n = \left[a_n - \frac{\varepsilon}{2N}, a_n + \frac{\varepsilon}{2N}\right]$$

とおくと$\{a_n\}_{n=1}^{N} \subset \bigcup_{n=1}^{N} I_n$であって,かつ

$$\sum_{n=1}^{N} |I_n| = \sum_{n=1}^{N} \frac{\varepsilon}{N} = \varepsilon$$

となるからです.
また,無限個の実数からなる集合$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$も零集合です.今度は閉区間の列として

$$I_n = \left[a_n - \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}, a_n + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}\right]$$

を考えると$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$であって,かつ

$$\sum_{n=1}^{\infty} |I_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^n} = \varepsilon$$

となるからです.

一方で,無限個の実数からなる集合$\{a_\gamma\}_{\gamma\in\mathbb{R}}$は一般に零集合ではありません.上の例との違いは,添え字が自然数の集合から実数の集合に変わったことです.このことを理解するために,可算無限と非可算無限という概念が必要になります.

可算無限とは,「自然数の集合との間に 1 対 1 対応をつけることができる」ということです.従って,可算無限個の要素からなる集合は,その要素に番号をつけて並べることができます.自然数の集合自身はもちろん可算集合です.整数の集合については,たとえば

$$0,1,-1,2,-2,3,-3,4,\cdots$$

のような数列を作れば,過不足なくすべての整数が現れますから可算集合です.有理数の集合についても,自然数の集合との間に 1 対 1 対応が存在することが知られています(平面上の格子点を考えてみて下さい).

それに対して,自然数の集合との間に 1 対 1 対応が存在しないことを非可算無限といいます.実数全体の集合が非可算無限個の要素からなることを示しましょう.写像

$$\begin{array}{cccc} f: & \mathbb{R} & \to & (0,1) \\ & x & \mapsto & \dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{\pi}\tan^{-1} x \end{array}$$

は全単射ですから,集合$\mathbb{R}' = \{x \in \mathbb{R} | 0 < x < 1\}$が非可算無限個の要素からなることが分かれば十分です.$\mathbb{R}'$が可算無限個の要素からなるとすると,全ての要素を一列に並べて書くことができます.各要素を小数で表示して

$$\begin{aligned} r_1 &= 0.a_1^{(1)}a_1^{(2)}a_1^{(3)}a_1^{(4)}\cdots, \\ r_2 &= 0.a_2^{(1)}a_2^{(2)}a_2^{(3)}a_2^{(4)}\cdots, \\ r_3 &= 0.a_3^{(1)}a_3^{(2)}a_3^{(3)}a_3^{(4)}\cdots, \\ &\vdots \end{aligned}$$

と書きましょう(つまり,$a_m^{(n)}$はr_mの小数第n位).これに対し,たとえば

$$r^{(n)} = \begin{cases} 1 & \left(a_n^{(n)} \neq 1\right) \\ 2 & \left(a_n^{(n)} = 1\right) \end{cases}$$

として

$$r = 0.r^{(1)}r^{(2)}r^{(3)}r^{(4)}\cdots$$

をつくると,$r \in \mathbb{R}'$ですが$r \notin \{r_n\}_{n\in\mathbb{N}}$です.これは$\mathbb{R}' = \{r_n\}_{n\in\mathbb{N}}$に矛盾します.

さて,零集合の話に戻りましょう.可算無限の定義より,可算無限個の要素からなる集合は零集合となります.それでは非可算無限個の要素からなる集合は全て零集合でないかというと,そうではありません.その例として,Cantor 集合というものがあります.長さ 1 の線分に対し,「線分を 3 等分し,得られた 3 つの線分の内真ん中のものを取り除く」という操作を帰納的に繰り返して得られる集合です.Cantor 集合は,実数全体の集合との間に 1 対 1 対応が存在するのにもかかわらず,零集合となっています.

§B.2 可積分の条件

さて,零集合を定義したので,関数が可積分であることの特徴付けとなる次の定理を記述することができます:

定理 B.2.1 有限閉区間Iで定義された有界な関数fが可積分であることの必要十分条件は,fの不連続点の集合が零集合となることである.

たとえば,閉区間[0,1]で定義された,次の関数を考えます:

$$f(x) = \begin{cases} 0\ (x = 0) \\ \dfrac{1}{n}\left(\dfrac{1}{n+1} \leq x < \dfrac{1}{n}\right). \end{cases}$$

この関数の不連続点は$x = \frac{1}{n}\ (n = 1,2,\cdots)$ですから,その集合は零集合となり,従って可積分です.

一方,閉区間[0,1]で定義された関数

$$g(x) = \begin{cases} 1\ (x\text{: 有理数}) \\ 0\ (x\text{: 無理数}) \end{cases}$$

は,[0,1]上の全ての点で不連続(これは自明なことではありませんが,証明は省略します.キーワードは「稠密性」です)なので,可積分ではありません.

付録 C 問題の解答

(Exr.1)

(1) 第N部分和をS_Nとおくと,

$$S_N=\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^2+2}<\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^2}<\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}<\infty.$$

よって数列$\{S_N\}_{N=1}^{\infty}$は,上に有界な単調増加数列だから収束する.

★次のように評価しても構いません:

$$S_N=\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^2+2}<\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^2}<1+\sum_{n=2}^{N}\frac{1}{n(n-1)}=2-\frac{1}{N}<2.$$

ちなみに,収束値は$\frac{-1+\sqrt{2}\pi\coth\left(\sqrt{2}\pi\right)}{4}$です.

(2) 第N部分和をS_Nとおくと,

$$S_N=\sum_{n=1}^{N}\frac{n^2}{n^3+2n-2}>\sum_{n=1}^{N}\frac{n^2}{n^3}=\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}\to\infty\ (N\to\infty).$$

よって数列$\{S_N\}_{N=1}^{\infty}$は発散する.

(3) 第N部分和をS_Nとおくと,

$$S_N=\sum_{n=1}^{N}\frac{\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n}}{n}=\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n\left((n+1)^{\frac{2}{3}}+n^{\frac{1}{3}}(n+1)^{\frac{1}{3}}+n^{\frac{2}{3}}\right)}<\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^{\frac{5}{3}}}<\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{5}{3}}}<\infty.$$

よって数列$\{S_N\}_{N=1}^{\infty}$は,上に有界な単調増加数列だから収束する.

(4) 第N部分和をS_Nとおくと,

$$S_N=\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{\log(n+1)}>\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}\to\infty\ (N\to\infty).$$

よって数列$\{S_N\}_{N=1}^{\infty}$は発散する.

(5) 第N部分和をS_Nとおくと,

$$S_N=\sum_{n=1}^{N}\frac{\log(n+1)}{(n+1)^3}<\sum_{n=1}^{N}\frac{n}{(n+1)^3}<\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{(n+1)^2}<\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^2}<\infty.$$

よって数列$\{S_N\}_{N=1}^{\infty}$は,上に有界な単調増加数列だから収束する.

★収束値は$-\zeta'(3)$です.ζ関数は,$z>1$に対して$\zeta(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^z}$と定義され,解析接続という操作によって 1 以外の全ての複素数に拡張されたものです.

(6) 第N部分和をS_Nとおくと,

$$S_N=\sum_{n=1}^{N}\frac{n^2}{n!}=\sum_{n=1}^{N}\frac{n}{(n-1)!}=\sum_{n=1}^{N}\frac{(n-1)+1}{(n-1)!}=\sum_{n=2}^{N}\frac{1}{(n-2)!}+\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{(n-1)!}<2e.$$

よって数列$\{S_N\}_{N=1}^{\infty}$は,上に有界な単調増加数列だから収束する.

★収束値は$2e$です.

(7) 第N部分和をS_Nとおくと,

$$S_N=\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}\log\left(1+\frac{1}{n}\right)=\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}\int_1^{1+\frac{1}{n}}\frac{dx}{x}<\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^2}<\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}<\infty.$$

よって数列$\{S_N\}_{N=1}^{\infty}$は,上に有界な単調増加数列だから収束する.

(8) $a_n=n\sin\frac{1}{n}$とおくと

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}n\sin\frac{1}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}=1\neq 0.$$

よって与えられた級数は発散する.

(9) $a_n=\frac{1}{\sqrt{n}}$とおくと,$a_n>0$で

$$\lim_{n\to\infty}a_n=0.$$

与えられた級数は

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}=-\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$$

であるから,(定理 r.6 により)収束する.

★収束値は$(\sqrt{2}-1)\zeta\left(\frac{1}{2}\right)$です.

(10) $a_n=\frac{n!}{(2n+1)!!}$とおくと

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{(n+1)!}{(2n+3)!!}\cdot\frac{(2n+1)!!}{n!}=\frac{n+1}{2n+3}\to\frac{1}{2}<1\ (n\to\infty).$$

よって D'Alembert の判定法(定理 r.2)より,与えられた級数は収束する.

★収束値は$\frac{\pi-2}{2}$です.

(11)　$a_n=\frac{n^3}{3^n}$とおくと

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{(n+1)^3}{3^{n+1}}\cdot\frac{3^n}{n^3}=\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{n}\right)^3\to\frac{1}{3}<1\ (n\to\infty).$$

よって D'Alembert の判定法(定理 r.2)より,与えられた級数は収束する.

★収束値は$\frac{33}{8}$です.

(12)　$a_n=\frac{(n-1)!}{n^{n+1}}$とおくと

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{n!}{(n+1)^{n+2}}\cdot\frac{n^{n+1}}{(n-1)!}=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n-2}\to\frac{1}{e}<1\ (n\to\infty).$$

よって D'Alembert の判定法(定理 r.2)より,与えられた級数は収束する.

(13)　$a_n=\frac{\left(n-\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{3}{2}\right)\cdots\frac{1}{2}}{n!}$とおくと

$$\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}-1\right)n=\left(\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{1}{2}\right)\cdots\frac{1}{2}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{\left(n-\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{3}{2}\right)\cdots\frac{1}{2}}-1\right)n=\left(\frac{n+\frac{1}{2}}{n+1}-1\right)n=\frac{-\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{n}}$$

$$\to-\frac{1}{2}>-1\ (n\to\infty).$$

よって Raabe の判定法(定理 r.4)より,与えられた級数は発散する.

(14)　$a_n=\frac{1}{n!}\binom{2n}{n}$とおくと

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{(2n+2)!}{\left((n+1)!\right)^3}\cdot\frac{(n!)^3}{(2n)!}=\frac{2(2n+1)}{(n+1)^3}\to 0<1\ (n\to\infty).$$

よって D'Alembert の判定法(定理 r.2)より,与えられた級数は収束する.

(15)　第N部分和をS_Nとおくと,一般に$\sin x<x\ ({}^\forall x>0)$を考え,

$$S_N=\sum_{n=1}^{N}\sin\left(\sin\frac{1}{n^2}\right)<\sum_{n=1}^{N}\sin\frac{1}{n^2}<\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^2}<\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}<\infty.$$

よって数列$\{S_N\}_{N=1}^{\infty}$は,上に有界な単調増加数列だから収束する.

(Ex4.1.1)

積分定数をCとする．

(1) $\sqrt{x}=t$とおくと，

$$dt=\frac{dx}{2\sqrt{x}}=\frac{dx}{2t}\qquad \therefore dx=2tdt.$$

よって

$$I=\int e^{\sqrt{x}}dx=\int e^t\cdot 2tdt=2te^t-\int 2e^t dt=2te^t-2e^t+C=2\left(\sqrt{x}-1\right)e^{\sqrt{x}}+C.$$

(2)

$$\frac{1}{(x+1)^2(x+2)}=\frac{a}{x+1}+\frac{b}{(x+1)^2}+\frac{c}{x+2}$$

となるa,b,cを求めると

$$a=-1\,,b=c=1.$$

$$\therefore I=\int\frac{dx}{(x+1)^2(x+2)}=\int\left(-\frac{1}{x+1}+\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{1}{x+2}\right)dx$$

$$=-\log|x+1|-\frac{1}{x+1}+\log|x+2|+C=\log\left|\frac{x+2}{x+1}\right|-\frac{1}{x+1}+C.$$

(3) $x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$より，

$$\frac{1}{(x-1)(x^2+x+1)}=\frac{a}{x-1}+\frac{bx+c}{x^2+x+1}$$

となるa,b,cを求めると

$$a=\frac{1}{3}\,,b=-\frac{1}{3}\,,c=-\frac{2}{3}.$$

$$\therefore I=\int\frac{dx}{x^3-1}=\int\frac{dx}{(x-1)(x^2+x+1)}=\frac{1}{3}\int\left(\frac{1}{x-1}-\frac{x+2}{x^2+x+1}\right)dx$$

$$=\frac{1}{3}\log|x-1|-\frac{1}{3}\int\frac{x+2}{x^2+x+1}dx=\frac{1}{3}\log|x-1|-\frac{1}{3}\int\frac{\left(x+\frac{1}{2}\right)+\frac{3}{2}}{x^2+x+1}dx$$

$$=\frac{1}{3}\log|x-1|-\frac{1}{6}\int\frac{(x^2+x+1)'}{x^2+x+1}dx-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}$$

$$=\frac{1}{3}\log|x-1|-\frac{1}{6}\log(x^2+x+1)-\frac{1}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C.$$

(4) $x^4+1=\left(x^2+\sqrt{2}x+1\right)\left(x^2-\sqrt{2}x+1\right)$より，

$$\frac{1}{\left(x^2+\sqrt{2}x+1\right)\left(x^2-\sqrt{2}x+1\right)}=\frac{ax+b}{x^2+\sqrt{2}x+1}+\frac{cx+d}{x^2-\sqrt{2}x+1}$$

となるa,b,c,dを求めると

$$a=\frac{1}{2\sqrt{2}}\ ,b=\frac{1}{2}\ ,c=-\frac{1}{2\sqrt{2}}\ ,d=\frac{1}{2}.$$

$$\therefore I=\int\frac{dx}{x^4+1}=\int\frac{dx}{\left(x^2+\sqrt{2}x+1\right)\left(x^2-\sqrt{2}x+1\right)}$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\int\left(\frac{x+\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1}-\frac{x-\sqrt{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1}\right)dx$$

$$=\frac{1}{4\sqrt{2}}\left(\int\frac{\left(x^2+\sqrt{2}x+1\right)'}{x^2+\sqrt{2}x+1}dx+\sqrt{2}\int\frac{dx}{\left(x+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\frac{1}{2}}-\int\frac{\left(x^2-\sqrt{2}x+1\right)'}{x^2-\sqrt{2}x+1}dx\right.$$

$$\left.+\sqrt{2}\int\frac{dx}{\left(x-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\frac{1}{2}}\right)$$

$$=\frac{1}{4\sqrt{2}}\left(\log\left(x^2+\sqrt{2}x+1\right)+2\tan^{-1}\left(\sqrt{2}x+1\right)-\log\left(x^2-\sqrt{2}x+1\right)\right.$$

$$\left.+2\tan^{-1}\left(\sqrt{2}x-1\right)\right)+C$$

$$=\frac{1}{4\sqrt{2}}\left(\log\frac{x^2+\sqrt{2}x+1}{x^2-\sqrt{2}x+1}+2\tan^{-1}\left(\sqrt{2}x+1\right)+2\tan^{-1}\left(\sqrt{2}x-1\right)\right)+C.$$

(5) $x^5-1=(x-1)\left(x^2+\frac{1+\sqrt{5}}{2}x+1\right)\left(x^2+\frac{1-\sqrt{5}}{2}x+1\right)$より，

$$\frac{1}{(x-1)\left(x^2+\frac{1+\sqrt{5}}{2}x+1\right)\left(x^2+\frac{1-\sqrt{5}}{2}x+1\right)}$$

$$=\frac{a}{x-1}+\frac{bx+c}{x^2+\frac{1+\sqrt{5}}{2}x+1}+\frac{dx+e}{x^2+\frac{1-\sqrt{5}}{2}x+1}$$

となるa,b,c,d,eを求めると

$$a=\frac{1}{5}\ ,b=\frac{-1-\sqrt{5}}{10}\ ,c=-\frac{2}{5}\ ,d=\frac{-1+\sqrt{5}}{10}\ ,e=-\frac{2}{5}.$$

$$\therefore I=\int\frac{dx}{x^5-1}=\int\frac{dx}{(x-1)\left(x^2+\frac{1+\sqrt{5}}{2}x+1\right)\left(x^2+\frac{1-\sqrt{5}}{2}x+1\right)}$$

$$=\int\left(\frac{\frac{1}{5}}{x-1}+\frac{\frac{-1-\sqrt{5}}{10}x-\frac{2}{5}}{x^2+\frac{1+\sqrt{5}}{2}x+1}+\frac{\frac{-1+\sqrt{5}}{10}x-\frac{2}{5}}{x^2+\frac{1-\sqrt{5}}{2}x+1}\right)dx$$

$$=\frac{1}{5}\log|x-1|+\frac{-1-\sqrt{5}}{20}\int\frac{\left(x^2+\frac{1+\sqrt{5}}{2}x+1\right)'}{x^2+\frac{1+\sqrt{5}}{2}x+1}dx$$

$$-\frac{5-\sqrt{5}}{20}\int\frac{dx}{\left(x+\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^2+\frac{5-\sqrt{5}}{8}}+\frac{-1+\sqrt{5}}{20}\int\frac{\left(x^2+\frac{1-\sqrt{5}}{2}x+1\right)'}{x^2+\frac{1-\sqrt{5}}{2}x+1}dx$$

$$-\frac{5+\sqrt{5}}{20}\int\frac{dx}{\left(x+\frac{1-\sqrt{5}}{4}\right)^2+\frac{5+\sqrt{5}}{8}}$$

$$=\frac{1}{5}\log|x-1|+\frac{-1-\sqrt{5}}{20}\log\left(x^2+\frac{1+\sqrt{5}}{2}x+1\right)$$

$$+\frac{-1+\sqrt{5}}{20}\log\left(x^2+\frac{1-\sqrt{5}}{2}x+1\right)-\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{10}\tan^{-1}\frac{4x+\left(1+\sqrt{5}\right)}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}$$

$$-\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{10}\tan^{-1}\frac{4x+\left(1-\sqrt{5}\right)}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}+C.$$

(6)

$$I=\int\frac{dx}{(x^2+1)^3}=\int\frac{(x^2+1)-x^2}{(x^2+1)^3}dx=\int\frac{dx}{(x^2+1)^2}-\int\frac{x^2}{(x^2+1)^3}dx$$

ここで

$$\int\frac{dx}{(x^2+1)^2}=\int\frac{(x^2+1)-x^2}{(x^2+1)^2}dx=\int\frac{dx}{x^2+1}-\frac{1}{2}\int x\cdot\frac{(x^2+1)'}{(x^2+1)^2}dx$$

$$=\tan^{-1}x-\frac{1}{2}\left(x\cdot\left(-\frac{1}{x^2+1}\right)-\int\left(-\frac{1}{x^2+1}\right)dx\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{x}{x^2+1}+\tan^{-1}x\right)+C,$$

$$\int\frac{x^2}{(x^2+1)^3}dx=\frac{1}{2}\int x\cdot\frac{(x^2+1)'}{(x^2+1)^3}dx=\frac{1}{2}\left(x\cdot\left(-\frac{1}{2(x^2+1)^2}\right)-\int\left(-\frac{1}{2(x^2+1)^2}\right)dx\right)$$

$$=-\frac{x}{4(x^2+1)^2}+\frac{1}{4}\int\frac{dx}{(x^2+1)^2}$$

$$\therefore I=\frac{x}{4(x^2+1)^2}+\frac{3}{4}\int\frac{dx}{(x^2+1)^2}=\frac{x}{4(x^2+1)^2}+\frac{3}{8}\left(\frac{x}{x^2+1}+\tan^{-1}x\right)+C.$$

(7)

(解 1)

$$I=\int\frac{dx}{\sin x}=\int\frac{dx}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\tan\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}}=\int\frac{\left(\tan\frac{x}{2}\right)'}{\tan\frac{x}{2}}dx=\log\left|\tan\frac{x}{2}\right|+C.$$

(解 2)

$$I=\int\frac{dx}{\sin x}=\int\frac{\sin x}{\sin^2 x}dx=\int\frac{\sin x}{1-\cos^2 x}dx=\int\frac{\sin x}{(1-\cos x)(1+\cos x)}dx$$

$$=\frac{1}{2}\int\left(\frac{\sin x}{1-\cos x}+\frac{\sin x}{1+\cos x}\right)dx=\frac{1}{2}\int\left(\frac{(1-\cos x)'}{1-\cos x}-\frac{(1+\cos x)'}{1+\cos x}\right)dx$$

$$=\frac{1}{2}(\log(1-\cos x)-\log(1+\cos x))+C=\frac{1}{2}\log\frac{1-\cos x}{1+\cos x}+C.$$

(解 3) $\tan\frac{x}{2}=t$とおくと

$$\sin x=2\tan\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}=\frac{2t}{1+t^2},$$

また

$$dt=\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}\cdot\frac{1}{2}dx=\frac{1+t^2}{2}dx\qquad\therefore dx=\frac{2}{1+t^2}dt.$$

従って

$$I=\int\frac{dx}{\sin x}=\int\frac{1+t^2}{2t}\cdot\frac{2}{1+t^2}dt=\int\frac{dt}{t}=\log|t|+C=\log\left|\tan\frac{x}{2}\right|+C.$$

★参考までに 3 通りの解法を書いてみました.(解 1)が一番エレガントだと思います.(解 2)は,「こんな方法でも解ける」という程度の話です.(解 3)は,「三角関数の有理式の積分の定石」を使いました.

(8)

(解 1)

$$I=\int\frac{dx}{\sinh x}=\int\frac{dx}{2\sinh\frac{x}{2}\cosh\frac{x}{2}}=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\tanh\frac{x}{2}\cosh^2\frac{x}{2}}=\int\frac{\left(\tanh\frac{x}{2}\right)'}{\tanh\frac{x}{2}}dx=\log\left|\tanh\frac{x}{2}\right|+C.$$

(解 2)

$$I=\int\frac{dx}{\sinh x}=\int\frac{\sinh x}{\sinh^2 x}dx=\int\frac{\sinh x}{\cosh^2 x-1}dx=\int\frac{\sinh x}{(\cosh x-1)(\cosh x-1)}dx$$

$$=\frac{1}{2}\int\left(\frac{\sinh x}{\cosh x-1}-\frac{\sinh x}{\cosh x+1}\right)dx=\frac{1}{2}\int\left(\frac{(\cosh x-1)'}{\cosh x-1}-\frac{(\cosh x+1)'}{\cosh x+1}\right)dx$$

$$=\frac{1}{2}(\log(\cosh x-1)-\log(\cosh x+1))+C=\frac{1}{2}\log\frac{\cosh x-1}{\cosh x+1}+C.$$

(解 3) $\tanh\frac{x}{2}=t$とおくと

$$\sinh x=2\tanh\frac{x}{2}\cosh^2\frac{x}{2}=\frac{2t}{1-t^2}.$$

また

$$dt=\frac{1}{\cosh^2\frac{x}{2}}\cdot\frac{1}{2}dx=\frac{1-t^2}{2}dx\qquad\therefore dx=\frac{2}{1-t^2}dt.$$

従って

$$I=\int\frac{dx}{\sinh x}=\int\frac{1-t^2}{2t}\cdot\frac{2}{1-t^2}dt=\int\frac{dt}{t}=\log|t|+C=\log\left|\tanh\frac{x}{2}\right|+C.$$

★(7)と対応して 3 通りの解法を書きました.双曲線関数の扱いに慣れましょう.

(9)

(解 1) $x\geq 1$のとき

$$I=\int\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}dx=\int\sqrt{\frac{(x-1)(x-1)}{(x+1)(x-1)}}dx=\int\frac{x-1}{\sqrt{x^2-1}}dx=\int\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}dx-\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}.$$

ここで,右辺第 1 項は

$$\int\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}dx=\frac{1}{2}\int\frac{(x^2-1)'}{\sqrt{x^2-1}}dx=\sqrt{x^2-1}+C.$$

また,第 2 項は,$x=\cosh t\ (t>0)$とおくと

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}=\int\frac{\sinh t\,dt}{\sqrt{\cosh^2 t-1}}=\int dt=t+C=\cosh^{-1}x+C=\log\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)+C$$

$$\therefore I=\sqrt{x^2-1}-\log\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)+C.$$

一方,$x<-1$のとき

$$I=\int\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}dx=\int\sqrt{\frac{(x-1)(1-x)}{(x+1)(1-x)}}dx=\int\frac{1-x}{\sqrt{x^2-1}}dx=\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}-\int\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}dx.$$

第 1 項は,$x=-\cosh t\ (t>0)$とおくと

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}=\int\frac{\sinh t\,dt}{\sqrt{\cosh^2 t-1}}=\int dt=t+C=\cosh^{-1}(-x)+C=\log\left(-x+\sqrt{x^2-1}\right)+C$$

$$\therefore I=\log\left(-x+\sqrt{x^2-1}\right)-\sqrt{x^2-1}+C.$$

(解 2) $\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}=t$とおくと

$$\frac{x-1}{x+1}=t^2\qquad\therefore x=-\frac{t^2+1}{t^2-1}$$

であるから

$$dt=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}\cdot\frac{2}{(x+1)^2}dx=\frac{(t^2-1)^2}{4t}dx\qquad\therefore dx=\frac{4t}{(t^2-1)^2}dt.$$

従って

$$I=\int\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}dx=\int t\cdot\frac{4t}{(t^2-1)^2}dt=t\cdot\frac{-2}{t^2-1}-\int\frac{-2}{t^2-1}dt$$

$$=-\frac{2t}{t^2-1}+\int\frac{2}{(t-1)(t+1)}dt=-\frac{2t}{t^2-1}+\int\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right)dt$$

$$=-\frac{2t}{t^2-1}+\log\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+C=(x+1)\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}-\log\left|\frac{\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}+1}{\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}-1}\right|+C.$$

★被積分関数の定義域に注意して議論を進めましょう.(解 1)の結果は次のようにまとめられます:

$$I=(\operatorname{sgn}x)\sqrt{x^2-1}-\log\left(|x|+\sqrt{x^2-1}\right)+C.$$

ここでsgnは符号関数とよばれ,$x\in\mathbb{R}$に対して次のように定義されます:

$$\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1\ (x>0)\\0\ (x=0)\\-1\ (x<0)\end{cases}$$

(10)

(解 1)

$$I=\int\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}dx=\int\sqrt{\frac{(1+x)(1+x)}{(1-x)(1+x)}}dx=\int\frac{1+x}{\sqrt{1-x^2}}dx=\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}+\int\frac{-\frac{1}{2}(1-x^2)'}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

$$=\sin^{-1}x-\sqrt{1-x^2}+C.$$

(解 2) $x=\sin t\ \left(-\frac{\pi}{2}\le t\le\frac{\pi}{2}\right)$とおくと$dx=\cos t\,dt$.

$$\therefore I=\int\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}dx=\int\sqrt{\frac{1+\sin t}{1-\sin t}}\cos t\,dt=\int\frac{1+\sin t}{\sqrt{1-\sin^2 t}}\cos t\,dt=\int(1+\sin t)dt$$

$$=t-\cos t+C=\sin^{-1}x-\sqrt{1-x^2}+C.$$

(解 3) $\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}=t$とおくと

$$\frac{1+x}{1-x}=t^2\qquad\therefore x=\frac{t^2-1}{t^2+1}$$

であるから

$$dt=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\cdot\frac{2}{(1-x)^2}dx=\frac{(t^2+1)^2}{4t}dx\qquad\therefore dx=\frac{4t}{(t^2+1)^2}dt.$$

従って

$$I=\int\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}dx=\int t\cdot\frac{4t}{(t^2+1)^2}dt=\ t\cdot\frac{-2}{t^2+1}-\int\frac{-2}{t^2+1}dt=-\frac{2t}{t^2+1}+2\tan^{-1}t+C$$

$$=-\sqrt{1-x^2}-2\tan^{-1}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}+C.$$

★(解 1)と(解 2)は,本質的には同じですね.(解 3)は少し面倒です.

(11)

$$I=\int(\log x)^3dx=\int(x)'(\log x)^3dx=x(\log x)^3-\int x\cdot 3(\log x)^2\cdot\frac{1}{x}dx$$

$$=x(\log x)^3-3\int(x)'(\log x)^2dx$$

$$=x(\log x)^3-3\left(x(\log x)^2-\int x\cdot 2(\log x)\cdot\frac{1}{x}dx\right)$$

$$=x(\log x)^3-3x(\log x)^2+6\int(x)'\log x\,dx$$

$$=x(\log x)^3-3x(\log x)^2+6\left(x\log x-\int x\cdot\frac{1}{x}dx\right)$$

$$=x((\log x)^3-3(\log x)^2+6\log x-6)+C.$$

(12)

(解 1) $x=\sinh t$とおくと$dx=\cosh t\,dt$.

$$\therefore I=\int\sqrt{1+x^2}dx=\int\sqrt{1+\sinh^2 t}\cdot\cosh t\,dt=\int\cosh^2 t\,dt=\int\frac{\cosh 2t+1}{2}dt$$

$$=\frac{\sinh 2t+2t}{4}+C=\frac{\sinh t\cosh t+t}{2}+C=\frac{1}{2}\left(x\sqrt{1+x^2}+\sinh^{-1}x\right)+C$$

$$=\frac{1}{2}\left(x\sqrt{1+x^2}+\log\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\right)+C.$$

(解 2) $x+\sqrt{1+x^2}=t$とおくと$\sqrt{1+x^2}=t-x$.辺々2乗して

$$1+x^2=t^2-2tx+x^2\qquad\therefore x=\frac{t^2-1}{2t}.$$

また

$$dt=\left(1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)dx=\frac{2t^2}{t^2+1}dx\qquad\therefore dx=\frac{t^2+1}{2t^2}dt.$$

従って

$$I=\int\sqrt{1+x^2}dx=\int\frac{t^2+1}{2t}\cdot\frac{t^2+1}{2t^2}dt=\frac{1}{4}\int\left(t+\frac{1}{t^3}+\frac{2}{t}\right)dt=\frac{1}{8}\left(t^2-\frac{1}{t^2}\right)+\frac{1}{2}\log t+C$$

$$=\frac{1}{8}\left(\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)^2-\left(-x+\sqrt{1+x^2}\right)^2\right)+\frac{1}{2}\log\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)+C$$

$$=\frac{1}{2}\left(x\sqrt{1+x^2}+\log\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\right)+C.$$

★$x=\tan t$とおいても原理的に積分計算は可能ですが,計算が大変だと思います.上のいずれかの方法を用いるのがよいでしょう.

(13)

(解 1)

$$I=\int\frac{x}{\sqrt{2-x-x^2}}dx=-\frac{1}{2}\left(\int\frac{(2-x-x^2)'}{\sqrt{2-x-x^2}}dx+\int\frac{1}{\sqrt{2-x-x^2}}dx\right)$$

$$=-\sqrt{2-x-x^2}-\int\frac{dx}{\sqrt{9-(2x+1)^2}}.$$

ここで,$2x+1=3\sin t\ \left(-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}\right)$とおくと

$$2dx=3\cos t\,dt\qquad\therefore dx=\frac{3}{2}\cos t\,dt.$$

従って

$$\int \frac{dx}{\sqrt{9-(2x+1)^2}} = \int \frac{\frac{3}{2}\cos t\, dt}{3\cos t} = \frac{1}{2}\int dt = \frac{t}{2} + C = \frac{1}{2}\sin^{-1}\left(\frac{2x+1}{3}\right) + C$$

$$\therefore I = -\sqrt{2-x-x^2} - \frac{1}{2}\sin^{-1}\left(\frac{2x+1}{3}\right) + C.$$

(解 2)　$t = \sqrt{\frac{x+2}{1-x}}$とおくと

$$t^2 = \frac{x+2}{1-x} \qquad \therefore x = \frac{t^2-2}{t^2+1}.$$

また

$$dt = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1-x}{x+2}} \cdot \frac{3}{(1-x)^2} dx = \frac{(t^2+1)^2}{6t} dx \qquad \therefore dx = \frac{6t}{(t^2+1)^2} dt.$$

従って

$$I = \int \frac{x}{\sqrt{2-x-x^2}} dx = \int \frac{\frac{x}{1-x}}{\sqrt{\frac{x+2}{1-x}}} dx = \int \frac{\frac{t^2-2}{3}}{t} \cdot \frac{6t}{(t^2+1)^2} dt = 2\int \frac{t^2-2}{(t^2+1)^2} dt$$

$$= 3\int t \cdot \frac{(t^2+1)'}{(t^2+1)^2} dt - 4\int \frac{dt}{t^2+1} = \frac{-3t}{t^2+1} - \int \frac{dt}{t^2+1}$$

$$= -\frac{3t}{t^2+1} - \tan^{-1} t + C = -\sqrt{2-x-x^2} - \tan^{-1}\sqrt{\frac{x+2}{1-x}} + C.$$

(14)　$\sqrt[4]{x} = t$とおくと

$$dt = \frac{dx}{4\sqrt[4]{x^3}} = \frac{dx}{4t^3} \qquad \therefore dx = 4t^3 dt.$$

$$\therefore I = \int \frac{\sqrt[4]{x}}{1-\sqrt{x}} dx = \int \frac{t}{1-t^2} \cdot 4t^3 dt = -4\int \left(t^2 + 1 + \frac{1}{(t-1)(t+1)}\right) dt$$

$$= -\frac{4}{3}t^3 - 4t - 2\int \left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1}\right) dt = -\frac{4}{3}t^3 - 4t - 2\log\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + C$$

$$= -\frac{4}{3}\sqrt[4]{x^3} - 4\sqrt[4]{x} - 2\log\left|\frac{\sqrt[4]{x}-1}{\sqrt[4]{x}+1}\right| + C.$$

(15)　$\sqrt{e^{2x}-1} = t$とおくと

$$dt = \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^{2x}-1}} dx = \frac{t^2+1}{t} dx \qquad \therefore dx = \frac{t}{t^2+1} dt.$$

従って

$$I=\int\sqrt{e^{2x}-1}dx=\int t\cdot\frac{t}{t^2+1}dt=\int\left(1-\frac{1}{t^2+1}\right)dt=t-\tan^{-1}t+C$$
$$=\sqrt{e^{2x}-1}-\tan^{-1}\sqrt{e^{2x}-1}+C.$$

(16)　$x=\sinh t$とおくと$x=\cosh t\,dt$.

$$\therefore I=\int\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}=\int\frac{\cosh t\,dt}{\cosh t}=\int dt=t+C=\sinh^{-1}x+C=\log\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)+C.$$

(17)　$\sqrt{\tan x}=t$とおくと

$$dt=\frac{1}{2\sqrt{\tan x}}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}dx=\frac{1+t^4}{2t}dx\qquad\therefore dx=\frac{2t}{1+t^4}dt.$$

従って

$$I=\int\sqrt{\tan x}\,dx=\int t\cdot\frac{2t}{1+t^4}dt=2\int\frac{t^2}{1+t^4}dt=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\left(\frac{t}{t^2-\sqrt{2}t+1}-\frac{t}{t^2+\sqrt{2}t+1}\right)dx$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{2}\int\left(\frac{\left(t^2-\sqrt{2}t+1\right)'}{t^2-\sqrt{2}t+1}-\frac{\left(t^2+\sqrt{2}t+1\right)'}{t^2+\sqrt{2}t+1}\right)dx\right.$$
$$\left.+\frac{\sqrt{2}}{2}\int\left(\frac{1}{\left(t-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\frac{1}{2}}+\frac{1}{\left(t+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\frac{1}{2}}\right)dx\right)$$
$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\log\left(t^2-\sqrt{2}t+1\right)-\log\left(t^2+\sqrt{2}t+1\right)+2\tan^{-1}\left(\sqrt{2}t-1\right)\right.$$
$$\left.+2\tan^{-1}\left(\sqrt{2}t+1\right)\right)+C$$
$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\log\frac{\tan x-\sqrt{2\tan x}+1}{\tan x+\sqrt{2\tan x}+1}+2\tan^{-1}\left(\sqrt{2\tan x}+1\right)\right.$$
$$\left.+2\tan^{-1}\left(\sqrt{2\tan x}-1\right)\right)+C.$$

(18)

$$J=\int e^x\sin x\,dx=e^x\sin x-\int e^x\cos x\,dx=e^x\sin x-\left(e^x\cos x-\int e^x(-\sin x)dx\right)$$
$$=e^x(\sin x-\cos x)-\int e^x\sin x\,dx=e^x(\sin x-\cos x)-J$$

$$\therefore J=\frac{1}{2}e^x(\sin x-\cos x)+C.$$

同様にして

$$K=\int e^x\cos x\,dx=\frac{1}{2}e^x(\sin x+\cos x)+C$$

$$\therefore I=\int xe^x\sin x\,dx=x\cdot\frac{1}{2}e^x(\sin x-\cos x)-\frac{1}{2}\int e^x(\sin x-\cos x)dx$$

$$=\frac{1}{2}xe^x(\sin x-\cos x)-\frac{1}{2}(J-K)=\frac{1}{2}xe^x(\sin x-\cos x)+\frac{1}{4}e^x\cos x+C.$$

(19) $\tan\frac{x}{2}=t$とおくと

$$dt=\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}\cdot\frac{1}{2}dx=\frac{1+t^2}{2}dx\qquad\therefore dx=\frac{2}{1+t^2}dt.$$

従って

$$\int\frac{dx}{(1+\cos x)^2}=\int\frac{dx}{\left(2\cos^2\frac{x}{2}\right)^2}=\int\frac{(1+t^2)^2}{4(1+t^2)}dt=\frac{1}{4}\left(t+\frac{t^3}{3}\right)+C=\frac{1}{4}\left(\tan\frac{x}{2}+\frac{1}{3}\tan^3\frac{x}{2}\right)+C$$

$$\therefore I=\int\frac{x}{(1+\cos x)^2}dx=\frac{x}{4}\left(\tan\frac{x}{2}+\frac{1}{3}\tan^3\frac{x}{2}\right)-\frac{1}{4}\int\left(\tan\frac{x}{2}+\frac{1}{3}\tan^3\frac{x}{2}\right)dx.$$

$\cos\frac{x}{2}=u$とおくと$dt=-\frac{1}{2}\sin\frac{u}{2}du$であるから

$$I=\frac{x}{4}\left(\tan\frac{x}{2}+\frac{1}{3}\tan^3\frac{x}{2}\right)-\frac{1}{4}\int\left(\frac{1}{\cos\frac{x}{2}}+\frac{1}{3}\frac{1-\cos^2\frac{x}{2}}{\cos^3\frac{x}{2}}\right)\sin\frac{x}{2}dx$$

$$=\frac{x}{4}\left(\tan\frac{x}{2}+\frac{1}{3}\tan^3\frac{x}{2}\right)+\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{u}+\frac{1}{3}\frac{1-u^2}{u^3}\right)du$$

$$=\frac{x}{4}\left(\tan\frac{x}{2}+\frac{1}{3}\tan^3\frac{x}{2}\right)+\frac{1}{3}\left(\log|u|-\frac{1}{u^2}\right)+C$$

$$=\frac{x}{4}\left(\tan\frac{x}{2}+\frac{1}{3}\tan^3\frac{x}{2}\right)+\frac{1}{3}\left(\log\left|\cos\frac{x}{2}\right|-\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}\right)+C.$$

(20) $x^3-3x+1=\left(x-2\cos\frac{2}{9}\pi\right)\left(x-2\cos\frac{8}{9}\pi\right)\left(x-2\cos\frac{14}{9}\pi\right)$より,

$$\frac{1}{x^3-3x+1}=\frac{a}{x-2\cos\frac{2}{9}\pi}+\frac{b}{x-2\cos\frac{8}{9}\pi}+\frac{c}{x-2\cos\frac{14}{9}\pi}$$

となるa,b,cを求めると

$$a=-\frac{2\sqrt{3}}{9}\sin\frac{11}{9}\pi\ ,b=-\frac{2\sqrt{3}}{9}\sin\frac{17}{9}\pi\ ,c=-\frac{2\sqrt{3}}{9}\sin\frac{5}{9}\pi.$$

$$\therefore I=\int\frac{dx}{x^3-3x+1}=-\frac{2\sqrt{3}}{9}\int\left(\frac{\sin\frac{11}{9}\pi}{x-2\cos\frac{2}{9}\pi}+\frac{\sin\frac{17}{9}\pi}{x-2\cos\frac{8}{9}\pi}+\frac{\sin\frac{5}{9}\pi}{x-2\cos\frac{14}{9}\pi}\right)dx$$

$$=-\frac{2\sqrt{3}}{9}\left(\left(\sin\frac{11}{9}\pi\right)\log\left|x-2\cos\frac{2}{9}\pi\right|+\left(\sin\frac{17}{9}\pi\right)\log\left|x-2\cos\frac{8}{9}\pi\right|\right.$$

$$\left.+\left(\sin\frac{5}{9}\pi\right)\log\left|x-2\cos\frac{14}{9}\pi\right|\right)+C.$$

(Ex4.2.1)

(1) $t=\sqrt{x}$とおくと

x	$0\to1$
t	$0\to1$

$$dt=\frac{dx}{2\sqrt{x}}=\frac{dx}{2t}\qquad\therefore dx=2tdt.$$

従って

$$I=\int_0^1\sqrt{x+\sqrt{x}}dx=\int_0^1\sqrt{t^2+t}\cdot 2tdt=\int_0^1(t^2+t)^{\frac{1}{2}}\cdot((t^2+t)'-1)dt$$

$$=\int_0^1(t^2+t)^{\frac{1}{2}}(t^2+t)'dt-\int_0^1\sqrt{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}}dt.$$

ここで

$$\int_0^1(t^2+t)^{\frac{1}{2}}(t^2+t)'dt=\left[\frac{2}{3}(t^2+t)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1=\frac{4\sqrt{2}}{3}.$$

また$t+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\cosh u\ \ (u>0)$とおくと

t	$0\to1$
u	$0\to\cosh^{-1}3$

$$dt=\frac{1}{2}\sinh u\,du$$

$$\therefore\int_0^1\sqrt{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}}dt=\int_0^{\cosh^{-1}3}\sqrt{\left(\frac{1}{2}\sinh u\right)^2}\cdot\frac{1}{2}\sinh u\,du=\frac{1}{4}\int_0^{\cosh^{-1}3}\sinh^2u\,du$$

$$=\frac{1}{4}\int_0^{\cosh^{-1}3}\frac{\cosh 2u-1}{2}du=\frac{1}{8}\left[\frac{\sinh 2u}{2}-u\right]_0^{\cosh^{-1}3}$$

$$=\frac{1}{8}[\sinh u\cosh u-u]_0^{\cosh^{-1}3}=\frac{1}{8}\left(\sqrt{8}\cdot 3-\cosh^{-1}3\right)=\frac{3\sqrt{2}}{4}-\frac{1}{8}\log\left(3+\sqrt{8}\right)$$

$$=\frac{3\sqrt{2}}{4}-\frac{1}{4}\log\left(1+\sqrt{2}\right).$$

以上より

$$I=\frac{4\sqrt{2}}{3}-\left(\frac{3\sqrt{2}}{4}-\frac{1}{4}\log\left(1+\sqrt{2}\right)\right)=\frac{7\sqrt{2}}{12}+\frac{1}{4}\log\left(1+\sqrt{2}\right).$$

(2)

$$I=\int_{-1}^{1}|e^x-1|dx=\int_{-1}^{0}(1-e^x)dx+\int_{0}^{1}(e^x-1)dx=[x-e^x]_{-1}^{0}+[e^x-x]_0^1=\frac{1}{e}+(e-2)$$

$$=e+\frac{1}{e}-2.$$

(3)

$$I=\int_0^1 e^{x+e^x}dx=\int_0^1 e^x e^{e^x}dx=\left[e^{e^x}\right]_0^1=e^e-e.$$

(4) $x=2\sin t$とおくと

x	$0\to 2$
t	$0\to\frac{\pi}{2}$

$$dx=2\cos t\,dt$$

$$\therefore I=\int_0^2 x^2\sqrt{4-x^2}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}4\sin^2 t\cdot 2\cos t\cdot 2\cos t\,dt$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}2\sin^2 2t\,dt=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos 4t)dt$$

$$=2\left[t-\frac{\sin 4t}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\pi.$$

(5) $x^2=\sin t$とおくと

x	$0\to 1$
t	$0\to\frac{\pi}{2}$

$$2xdx=\cos t\,dt$$

$$\therefore I=\int_0^1 x\sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}}dx=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\frac{1-\sin t}{1+\sin t}}\cos t\,dt$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\frac{(1-\sin t)(1-\sin t)}{(1+\sin t)(1-\sin t)}}\cos t\,dt$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin t)dt=\frac{1}{2}[t+\cos t]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi-2}{4}.$$

(6) 被積分関数を$f(x)$とおくと

$$f(-x)=\frac{\pi^{-x}-1}{\pi^{-x}+1}\log(\cos(-x))=\frac{1-\pi^x}{1+\pi^x}\log(\cos x)=-f(x)$$

$$\therefore I = \int_{-1}^{1} f(x)dx = 0.$$

(7) $\tan\frac{x}{2} = t$とおくと

$$dt = \frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}\cdot\frac{1}{2}dx = \frac{1+t^2}{2}dx \qquad \therefore dx = \frac{2}{1+t^2}dt.$$

x	$0 \to \frac{\pi}{2}$
t	$0 \to 1$

従って

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2+\cos x} = \int_0^1 \frac{\frac{2}{1+t^2}dt}{2+\frac{1-t^2}{1+t^2}} = 2\int_0^1 \frac{dt}{t^2+3} = 2\left[\frac{1}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\frac{t}{\sqrt{3}}\right]_0^1 = \frac{2\sqrt{3}\pi}{9}.$$

(8)

$$I = \int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{3+\sin^2 x}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x\sin x}{3+\sin^2 x}dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{x\sin x}{3+\sin^2 x}dx.$$

右辺第 2 項で$x = \pi - t$とおけば

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{(\pi-t)\sin(\pi-t)}{3+\sin^2(\pi-t)}(-dt) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\pi-t)\sin t}{3+\sin^2 t}dt = \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t}{3+\sin^2 t}dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{t\sin t}{3+\sin^2 t}dt$$

$$\therefore I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x\sin x}{3+\sin^2 x}dx + \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t}{3+\sin^2 t}dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{t\sin t}{3+\sin^2 t}dt = \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t}{3+\sin^2 t}dt$$

$$= \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t}{4-\cos^2 t}dt.$$

$\cos t = u$とおくと

$$-\sin t\, dt = du$$

$$\therefore I = \pi\int_1^0 \frac{-du}{4-u^2} = \frac{\pi}{4}\int_0^1 \left(\frac{1}{2+u}+\frac{1}{2-u}\right)du = \frac{\pi}{4}\left[\log\frac{2+u}{2-u}\right]_0^1 = \frac{\pi}{4}\log 3.$$

t	$0 \to \frac{\pi}{2}$
u	$1 \to 0$

(9) $x = \tan t$とおくと

$$dx = \frac{dt}{\cos^2 t} = (1+x^2)dt \qquad \therefore dt = \frac{dx}{1+x^2}.$$

x	$0 \to 1$
t	$0 \to \frac{\pi}{2}$

従って

$$I = \int_0^1 \frac{\log(1+x)}{1+x^2}dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \log(1+\tan t)\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \log\frac{\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-t\right)}{\cos t}dt$$

$$= \log\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} dt + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \log\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}-t\right)\right)dt - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \log(\cos t)\,dt.$$

右辺第 2 項で$\frac{\pi}{4} - t = u$とおくと

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{0} \log(\cos u)\,(-du) = \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \log(\cos u)\,du$$

$$\therefore I = \log\sqrt{2}\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} dt + \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \log(\cos u)\,du - \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \log(\cos t)\,dt = \log\sqrt{2}\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} dt = \frac{\pi}{8}\log 2.$$

(10)

$$I = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\tan^{\sqrt{2}} x} = \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{1+\tan^{\sqrt{2}} x} + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\tan^{\sqrt{2}} x}.$$

右辺第 2 項で$x = \frac{\pi}{2} - t$とおけば

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{0} \frac{-dt}{1+\tan^{\sqrt{2}}\left(\frac{\pi}{2}-t\right)} = \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{1+\frac{1}{\tan^{\sqrt{2}} x}} = \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan^{\sqrt{2}} x}{1+\tan^{\sqrt{2}} x}dx$$

$$\therefore I = \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{1+\tan^{\sqrt{2}} x} + \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan^{\sqrt{2}} x}{1+\tan^{\sqrt{2}} x}dx = \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1+\tan^{\sqrt{2}} x}{1+\tan^{\sqrt{2}} x}dx = \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} dt = \frac{\pi}{4}.$$

(Ex4.3.1)

求める面積をSとすると

$$S = \int_{0}^{2\pi a} y dx = \int_{0}^{2\pi} y\frac{dx}{dt}dt = \int_{0}^{2\pi} a(1-\cos t)\cdot a(1-\cos t)dt = a^2\int_{0}^{2\pi}(1-\cos t)^2 dt$$

$$= a^2\int_{0}^{2\pi}(1+\cos^2 t)dt = a^2\int_{0}^{2\pi}\left(1+\frac{1+\cos 2t}{2}\right)dt = \frac{3}{2}a^2\int_{0}^{2\pi}dt = 3\pi a^2.$$

(Ex4.3.2)

方程式$(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2)$の極座標表示は

$$r^4 = a^2r^2(\cos^2\theta - \sin^2\theta) \qquad \therefore r^2 = a^2\cos 2\theta \left(-\frac{\pi}{4} \le \theta \le \frac{\pi}{4}\right).$$

対称性より,求める面積をSとすると

$$S = 4\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} r^2 d\theta = 4\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} a^2\cos 2\theta\, d\theta = 4a^2\left[\frac{\sin 2\theta}{2}\right]_{0}^{\frac{\pi}{4}} = 2a^2.$$

(Ex4.3.3)

求める曲線長をsとすると

$$s = \int_{0}^{x}\sqrt{1+(y')^2}dx = \int_{0}^{x}\sqrt{1+\left(\sinh\frac{x}{a}\right)^2}dx = \int_{0}^{x}\cosh\frac{x}{a}dx = \left[a\sinh\frac{x}{a}\right]_{0}^{x} = a\sinh\frac{x}{a}.$$

(Ex4.3.4)

方程式$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$は,$x=a\cos^3 t\ ,y=a\sin^3 t$と媒介変数表示される.その全長を$s$とすると,対称性より

$$s=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{(-3a\cos^2 t\sin t)^2+(3a\sin^2 t\cos t)^2}dt=12a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos t\sin t\,dt=6a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2t\,dt$$

$$=6a\left[-\frac{\cos 2t}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=6a.$$

(Ex4.3.5)

求める曲線長をsとすると

$$s=\int_0^{\theta}\sqrt{r^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\,d\theta=\int_0^{\theta}\sqrt{(e^{\theta})^2+(e^{\theta})^2}d\theta=\sqrt{2}\int_0^{\theta}e^{\theta}\,d\theta=\sqrt{2}\left[e^{\theta}\right]_0^{\theta}=\sqrt{2}\left(e^{\theta}-1\right).$$

(Ex4.3.6)

求める体積をVとすると

$$V=\pi\int_0^{2\pi a}y^2dx=\pi\int_0^{2\pi}\big(a(1-\cos t)\big)^2\cdot a(1-\cos t)dt=\pi a^3\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^3dt$$

$$=\pi a^3\int_0^{2\pi}(1+3\cos^2 t)dt=\pi a^3\int_0^{2\pi}\left(1+3\cdot\frac{1+\cos 2t}{2}\right)dt=\frac{5}{2}\pi a^3\int_0^{2\pi}dt$$

$$=5\pi^2a^3.$$

(Ex4.3.7)

曲線$y=a\sqrt{1-\frac{z^2}{b^2}}$ $\left(-b\le z\le b\right)$を$z$軸のまわりに 1 回転させて得られたものが題意の図形である.求める表面積をSとすると,対称性より

$$S=2\times 2\pi\int_0^b a\sqrt{1-\frac{z^2}{b^2}}\sqrt{1+\left(\frac{a}{2\sqrt{1-\frac{z^2}{b^2}}}\cdot\left(-\frac{2z}{b^2}\right)\right)^2}\,dz=4\pi a\int_0^b\sqrt{1-\frac{z^2}{b^2}+\frac{a^2z^2}{b^4}}dz$$

$$=4\pi ab\int_0^1\sqrt{1-\left(1-\frac{a^2}{b^2}\right)t^2}dt\ \ (z=bt).$$

(i) $a<b$のとき

$1-\frac{a^2}{b^2}=k^2\ (k>0)$とおき,$kt=\sin\theta$とおくと

$$S = 4\pi ab\int_0^{\sin^{-1}k} \cos\theta\cdot\frac{1}{k}\cos\theta\,d\theta = \frac{4\pi ab}{k}\int_0^{\sin^{-1}k}\cos^2\theta\,d\theta = \frac{4\pi ab}{k}[\sin\theta\cos\theta+\theta]_0^{\sin^{-1}k}$$

$$= \frac{4\pi ab}{k}\left(k\sqrt{1-k^2}+\sin^{-1}k\right) = 4\pi ab\left(\sqrt{1-k^2}+\frac{1}{k}\cos^{-1}\sqrt{1-k^2}\right)$$

$$= 4\pi ab\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{\sqrt{b^2-a^2}}\cos^{-1}\frac{a}{b}\right).$$

(ii) $a=b$のとき

$$S = 4\pi a^2\int_0^1 tdt = 4\pi a^2.$$

(iii) $a>b$のとき

$\frac{a^2}{b^2}-1=k^2\ (k>0)$とおき,$kt=\sinh\theta$とおくと

$$S = 4\pi ab\int_0^{\sinh^{-1}k}\cosh\theta\cdot\frac{1}{k}\cosh\theta\,d\theta = \frac{4\pi ab}{k}\int_0^{\sinh^{-1}k}\cosh^2\theta\,d\theta$$

$$= \frac{4\pi ab}{k}[\sinh\theta\cosh\theta+\theta]_0^{\sinh^{-1}k} = \frac{4\pi ab}{k}\left(k\sqrt{k^2+1}+\sinh^{-1}k\right)$$

$$= 4\pi ab\left(\sqrt{k^2+1}+\frac{1}{k}\cosh^{-1}\sqrt{k^2+1}\right) = 4\pi ab\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{\sqrt{a^2-b^2}}\cosh^{-1}\frac{a}{b}\right)$$

$$= 4\pi ab\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{\sqrt{a^2-b^2}}\log\frac{a+\sqrt{a^2-b^2}}{b}\right).$$

(Ex4.4.1)

$0<\varepsilon\le 1$とすると,$\alpha\neq -1$のとき

$$\int_\varepsilon^1 x^\alpha dx = \left[\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right]_\varepsilon^1 = \frac{1-\varepsilon^{\alpha+1}}{\alpha+1}.$$

$\alpha=-1$のとき

$$\int_\varepsilon^1 x^{-1}dx = [\log x]_\varepsilon^1 = -\log\varepsilon.$$

よって,$\alpha\le -1$のときは

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\int_\varepsilon^1 x^\alpha dx = +\infty$$

となり発散.$-1<\alpha<0$のときは

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\int_\varepsilon^1 x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1}$$

で収束.

(Ex4.4.2)

$R \geq 1$とすると,$\beta \neq -1$のとき

$$\int_1^R x^\beta\, dx = \left[\frac{x^{\beta+1}}{\beta+1}\right]_1^R = \frac{R^{\beta+1}-1}{\beta+1}.$$

$\beta = -1$のとき

$$\int_1^R x^{-1} dx = [\log x]_1^R = \log R.$$

よって,$\beta \geq -1$のときは

$$\lim_{R\to\infty}\int_1^R x^\beta\, dx = +\infty$$

となり発散.$\beta < -1$のときは

$$\lim_{R\to\infty}\int_1^R x^\beta\, dx = \frac{1}{\beta+1}$$

で収束.

(Ex4.4.3)

(1) $\sqrt{\frac{x}{1-x}} = t$とおくと

$$\frac{x}{1-x} = t^2 \qquad \therefore x = \frac{t^2}{t^2+1}$$

であるから

$$dt = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1-x}{x}} \cdot \frac{1}{(1-x)^2}\, dx = \frac{(t^2+1)^2}{2t}\, dx.$$

従って

$$\int \sqrt{\frac{x}{1-x}}\, dx = \int t \cdot \frac{2t}{(t^2+1)^2}\, dt = -\frac{t}{t^2+1} + \int \frac{dt}{t^2+1} = -\frac{t}{t^2+1} + \tan^{-1} t + C$$

$$= -\sqrt{x(1-x)} + \tan^{-1}\sqrt{\frac{x}{1-x}} + C$$

$$\therefore \int_0^1 \sqrt{\frac{x}{1-x}}\, dx = \lim_{\varepsilon\to+0}\int_0^{1-\varepsilon}\sqrt{\frac{x}{1-x}}\, dx = \lim_{\varepsilon\to+0}\left[-\sqrt{x(1-x)} + \tan^{-1}\sqrt{\frac{x}{1-x}}\right]_0^{1-\varepsilon}$$

$$= \lim_{\varepsilon\to+0}\left(-\sqrt{\varepsilon(1-\varepsilon)} + \tan^{-1}\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

(2) $\sqrt{x} = t$とおくと

$$\frac{dx}{2\sqrt{x}} = dt$$

$$\therefore \int_0^1 \frac{\log x}{\sqrt{x}} dx = \lim_{\varepsilon \to +0} \int_\varepsilon^1 \frac{\log x}{\sqrt{x}} dx = \lim_{\varepsilon \to +0} \int_{\sqrt{\varepsilon}}^1 \log t^2 \cdot 2dt = \lim_{\varepsilon \to +0} 4 \int_{\sqrt{\varepsilon}}^1 \log t \, dt$$
$$= \lim_{\varepsilon \to +0} 4[t \log t - t]_{\sqrt{\varepsilon}}^1 = \lim_{\varepsilon \to +0} 4\left(-1 - \sqrt{\varepsilon} \log \sqrt{\varepsilon} + \sqrt{\varepsilon}\right) = -4.$$

(3) $x > 0$のとき

$$\frac{e^x - 1}{x^3} > \frac{(1+x) - 1}{x^3} = \frac{1}{x^2}.$$

ここで

$$\lim_{\varepsilon \to +0} \int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x^2} = \lim_{\varepsilon \to +0} \left[-\frac{1}{x}\right]_\varepsilon^1 = \lim_{\varepsilon \to +0} \left(\frac{1}{\varepsilon} - 1\right) = +\infty$$

であるから,題意の広義積分は発散する.

(4) $x = \sin t$とおくと

$$dx = \cos t \, dt = \sqrt{1 - x^2} dt$$

従って

$$\int \frac{x^2 \sin^{-1} x}{\sqrt{1 - x^2}} dx = \int t \sin^2 t \, dt = \int t \cdot \frac{1 - \cos 2t}{2} dt = \frac{t^2}{4} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} t \sin 2t - \frac{1}{2} \int \sin 2t \, dt\right)$$

$$= \frac{1}{8}(2t^2 - 2t \sin 2t - \cos 2t) + C = \frac{1}{8}(2t^2 - 4t \sin t \cos t - 1 + 2\sin^2 t) + C$$

$$= \frac{1}{8}\left(2(\sin^{-1} x)^2 - 4x\sqrt{1 - x^2} \sin^{-1} x + 2x^2 - 1\right) + C.$$

$$\therefore \int_0^1 \frac{x^2 \sin^{-1} x}{\sqrt{1 - x^2}} dx = \lim_{\varepsilon \to +0} \int_0^{1-\varepsilon} \frac{x^2 \sin^{-1} x}{\sqrt{1 - x^2}} dx$$

$$= \lim_{\varepsilon \to +0} \frac{1}{8}\left[2(\sin^{-1} x)^2 - 4x\sqrt{1 - x^2} \sin^{-1} x + 2x^2 - 1\right]_0^{1-\varepsilon} = \frac{1}{8}\left(2\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 + 1 + 1\right)$$

$$= \frac{\pi^2 + 4}{16}.$$

(5)

$$\frac{1}{x(1 + x^2)} = \frac{a}{x} + \frac{bx + c}{1 + x^2}$$

となるa, b, cを求めると

$$a = 1\,, b = -1\,, c = 0.$$

$$\therefore \int_1^\infty \frac{dx}{x(1+x^2)} = \lim_{R\to\infty}\int_1^R \frac{dx}{x(1+x^2)} = \lim_{R\to\infty}\int_1^R \left(\frac{1}{x}-\frac{x}{1+x^2}\right)dx = \lim_{R\to\infty}\left[\log x - \frac{1}{2}\log(1+x^2)\right]_1^R$$

$$= \lim_{R\to\infty}\left(\log R - \frac{1}{2}\log(1+R^2)+\frac{1}{2}\log 2\right) = \lim_{R\to\infty}\left(\log\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{R^2}}}+\frac{1}{2}\log 2\right)$$

$$= \frac{1}{2}\log 2.$$

(6)

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{R_1,R_2\to\infty}\int_{-R_1}^{R_2}\frac{dx}{1+x^2} = \lim_{R_1,R_2\to\infty}[\tan^{-1}x]_{-R_1}^{R_2} = \lim_{R_1,R_2\to\infty}(\tan^{-1}R_1+\tan^{-1}R_2)$$

$$= \frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2} = \pi.$$

(7)

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{x}{1+x^2}dx = \lim_{R_1,R_2\to\infty}\int_{-R_1}^{R_2}\frac{x}{1+x^2}dx = \lim_{R_1,R_2\to\infty}\left[\frac{1}{2}\log(1+x^2)\right]_{-R_1}^{R_2} = \lim_{R_1,R_2\to\infty}\left(\frac{1}{2}\log\frac{1+{R_2}^2}{1+{R_1}^2}\right)$$

この極限は不定であるから,題意の広義積分は存在しない.

(8) $\sqrt{x^2-1}=t$とおくと,$x>0$のとき

$$dt = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}dx = \sqrt{t^2+1}\cdot\frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}.$$

従って

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \int\frac{1}{\sqrt{t^2+1}}\cdot\frac{dt}{\sqrt{t^2+1}} = \int\frac{dt}{t^2+1} = \tan^{-1}t + C = \tan^{-1}\sqrt{x^2-1}+C$$

$$\therefore \int_1^\infty \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \lim_{R\to\infty}\int_1^R\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \lim_{R\to\infty}\left[\tan^{-1}\sqrt{x^2-1}\right]_1^R = \lim_{R\to\infty}\tan^{-1}\sqrt{R^2-1} = \frac{\pi}{2}.$$

(9) $\log x = t$とおくと

$$dt = \frac{dx}{x} = \frac{dx}{e^t}$$

$$\therefore \int_0^{e^\pi}\sin\log x\,dx = \lim_{\varepsilon\to+0}\int_\varepsilon^{e^\pi}\sin\log x\,dx = \lim_{\varepsilon\to+0}\int_{\log\varepsilon}^\pi e^t\sin t\,dt = \lim_{\varepsilon\to+0}\left[\frac{1}{2}e^t(\sin t-\cos t)\right]_{\log\varepsilon}^\pi$$

$$= \lim_{\varepsilon\to+0}\frac{1}{2}\big(e^\pi - \varepsilon(\sin\log\varepsilon-\cos\log\varepsilon)\big) = \frac{e^\pi}{2}.$$

(10)　$0 < x < \frac{\pi}{2}$のとき

$$\lim_{x \to +0} \sqrt{x} \log \sin x = \lim_{x \to +0} \left(\sqrt{x} \log \frac{\sin x}{x} + \sqrt{x} \log x \right) = 0$$

$$\therefore |\log \sin x| \leq \frac{M}{\sqrt{x}} \ ({}^{\exists}M > 0).$$

ここで

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{M}{\sqrt{x}} dx < +\infty$$

であるから,題意の広義積分は収束する.その値をIとする.

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin x \, dx$$

において,$x = \pi - t$とすると

$$I = \int_\pi^{\frac{\pi}{2}} \log \sin(\pi - t) \, (-dt) = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \log \sin t \, dt$$

$$\therefore \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin x \, dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \log \sin t \, dt = \int_0^{\pi} \log \sin x \, dx = 2I.$$

一方,$x = \frac{\pi}{2} - u$とおくと

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin x \, dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \log \sin \left(\frac{\pi}{2} - u \right) (-du) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \cos u \, du$$

が成り立つことにも注意する.

さて,広義積分

$$2I = \int_0^{\pi} \log \sin x \, dx$$

において,$x = 2v$とすると

$$2I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin 2v \cdot 2dv = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(2 \sin v \cos v) \, dx$$

$$= \pi \log 2 + 2 \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin v \, dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \cos v \, dx \right) = \pi \log 2 + 4I$$

$$\therefore I = \frac{\pi}{2} \log 2.$$

(Ex4.4.4)

$\frac{\sin x}{x} \to 1 \ (x \to +0)$であるから,$x = 0$において$\frac{\sin x}{x} = 1$と定義して被積分関数を$[0, \infty)$上の連続関数とみなし,改めて広義積分

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx$$

を考えてよい.ここで

$$\int_1^\infty \frac{\sin x}{x}dx = \lim_{R\to\infty}\int_1^R \frac{\sin x}{x}dx = \lim_{R\to\infty}\left(\left[-\frac{\cos x}{x}\right]_1^R - \int_1^R \frac{\cos x}{x^2}dx\right) = 1 - \lim_{R\to\infty}\int_1^R \frac{\cos x}{x^2}dx$$

となるが,$\left|\frac{\cos x}{x^2}\right| \leq \frac{1}{x^2}$であって

$$\lim_{R\to\infty}\int_1^R \frac{dx}{x^2} = \lim_{R\to\infty}\left[-\frac{1}{x}\right]_1^R = 1$$

が成り立つから,広義積分

$$\int_1^\infty \frac{\cos x}{x^2}dx$$

は収束する.従って題意の広義積分は収束する.

一方,$k = 0,1,2,\cdots$について

$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\left|\frac{\sin x}{x}\right|dx = \int_0^\pi \frac{\sin(k\pi + t)}{k\pi + t}dt > \frac{1}{(k+1)\pi}\int_0^\pi \sin t\,dt = \frac{2}{(k+1)\pi}$$

であるから

$$\int_0^{n\pi}\left|\frac{\sin x}{x}\right|dx = \sum_{k=1}^{n-1}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\left|\frac{\sin x}{x}\right|dx > \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k+1} \to +\infty\ (n\to\infty).$$

従って

$$\int_0^\infty \left|\frac{\sin x}{x}\right|dx$$

は発散する.すなわち題意の広義積分は絶対収束しない.　　(Q.E.D.)

★広義積分

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx$$

は Dirichlet 積分と呼ばれています.その収束値は$\frac{\pi}{2}$となることが知られていますが,証明には複素関数論の知識などを必要とし,容易ではありません.

(Ex4.4.5)

被積分関数を$f(t)$とおくと

$$t^2 f(t) = e^{-t}t^{x+1} \to 0\ (t\to+\infty)$$

$$\therefore f(t) \leq \frac{M}{t^2}\ ({}^\exists M > 0).$$

ここで

あとがき

$$\int_1^\infty \frac{M}{t^2}dt = M < +\infty$$

であるから,広義積分

$$\int_1^\infty e^{-t}t^{x-1}dt$$

は収束する.
一方,$0 < x < 1$のとき

$$\int_0^1 e^{-t}t^{x-1}dt$$

は広義積分となるが,

$$t^{1-x}f(t) = e^{-t} \to 1\ (t \to +0)$$

$$\therefore f(t) \le \frac{M'}{t^{x-1}}\ ({}^{\exists}M' > 0)$$

であって

$$\int_0^1 \frac{M'}{t^{x-1}}dt = \frac{M'}{2-x} < +\infty$$

が成り立つから,やはり収束する.
以上より,題意の広義積分は収束する (Q.E.D.)

★広義積分

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}dt$$

はガンマ関数と呼ばれ,次の関係式を満たします:

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x).$$

更に$\Gamma(1) = 1$(確かめてみて下さい)ですから,$x = 1,2,\cdots$に対して

$$\Gamma(x) = (x-1)!$$

が成り立ちます.その意味で,ガンマ関数は「階乗の拡張」と考えることができます.
その他の特殊値としては,次が有名です:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

重積分により証明できます(講義ノート No.5).

～あとがき～
あまり丁寧に説明できなかったので,練習問題にほとんど押しつけてしまいました(^_^;)
間違いなどあったら髙橋までお願いします.質問もできる範囲で答えます.

2009 年 12 月 13 日　　髙橋　一史

更新履歴

この講義ノートの更新履歴です.主に間違いの訂正をしてゆきます.
訂正箇所は,本文では青く染めてあります.

2009.12.13　本講義ノート公開!
2010.1.27　$p.12$ 逆三角関数の Maclaurin 展開を訂正.全くの出鱈目でした(^^;)