数学 IA 講義ノート(No.5) 理科一類 37 組

〜はじめに〜
数学 IA の講義ノート第 5 弾です.関数項級数や重積分を扱います.関数項級数の一部である冪級数は夏学期に学習しましたが,今度はより一般的な内容を勉強することになります.なかなかとっつきにくいところかも知れませんが,一通り定義を眺めたら問題を解きながら理解していきましょう.
…ちなみに全部で 19 ページです.

第 5 章 関数項級数

§5.1 関数列と一様収束

このセクションでは,各項が関数であるような列,すなわち関数列を扱います.関数列$\{f_n(x)\}$に対し,点xを固定するとき数列$\{f_n(x)\}$が収束するならば,関数列$\{f_n(x)\}$は点xで収束するといい,そうでなければ点xで発散するといいます.
関数列が収束する点xでの極限値

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$$

は再びxの関数とみなすことができますから,これを極限関数と呼びます.
たとえば次の関数列を考えてみましょう:

$$f_n(x) = \frac{1-x^n}{1-x}.$$

このとき,$f_n(x)$は区間$(-1,1)$上の任意の点で収束し,極限関数は

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1-x^n}{1-x} = \frac{1}{1-x}$$

となります.このように,関数列$\{f_n(x)\}$がある区間Iの任意の点で収束するとき,$\{f_n(x)\}$はIで各点収束するといいます.きちんと定義しておきましょう:

<u>定義(各点収束)</u> 区間I上の関数列$\{f_n(x)\}$が$f(x)$にI上各点収束するとは,

$$^\forall\varepsilon > 0\, ^\forall x \in I\, ^\exists N \in \mathbb{N}\, ^\forall n \geq N \quad , \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

となることをいう.

もちろん

$$^\forall x \in I \quad , \quad \lim_{n\to\infty} |f_n(x) - f(x)| = 0$$

としても同じことです.

これと似た,しかし異なる重要な概念で,一様収束というものがあります:

<u>**定義(一様収束)**</u> 区間I上の関数列$\{f_n(x)\}$が$f(x)$にI上一様収束するとは,

$$^\forall \varepsilon > 0 \, ^\exists N \in \mathbb{N} \, ^\forall x \in I \, ^\forall n \geq N \quad , \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

となることをいう.

各点収束の定義と見比べると,緑色部分の全称記号と存在記号の順番が逆になっているのが分かります.これが大きな違いを生むのです.そもそも一様収束の「一様」とは何かというと,

I上の任意の点xに対してNが共通に選べる

ということです.関数列が各点収束しているからといって,必ずしも一様収束するとは限りません.

ちなみに,一様収束の定義は

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)| = 0$$

と同値です.

関数列

$$f_n(x) = \frac{1 - x^n}{1 - x}$$

は上に述べたとおり区間$(-1,1)$で各点収束しますが,一様収束しません.実際

$$\sup_{x\in(-1,1)} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in(-1,1)} \frac{x^n}{1 - x} \to \infty \ (n \to \infty)$$

となります.

一様収束が重要なのは,次の定理が成り立つからです:

定理 5.1.1(極限関数の連続性) 区間I上の連続関数列$\{f_n(x)\}$が$f(x)$にI上一様収束するならば,$f(x)$はI上の連続関数である.

定理 5.1.2(積分と極限の順序交換可能) 閉区間$[a,b]$上の連続関数列$\{f_n(x)\}$が$f(x)$に$[a,b]$上一様収束するならば,関数列$\left\{\int_a^x f_n(t)dt\right\}$は$\int_a^x f(t)dt$に$[a,b]$上一様収束する:

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^x f_n(t)dt = \int_a^x \left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right) dt.$$

定理 5.1.3(微分と極限の順序交換可能) 閉区間$[a,b]$上のC^1−関数列$\{f_n(x)\}$が$f(x)$に$[a,b]$上収束するとする.もし関数列$\{f_n{}'(x)\}$が$g(x)$に$[a,b]$上一様収束するならば,$\{f_n(x)\}$も$f(x)$に$[a,b]$上一様収束し,$f(x)$はC^1−関数となり,$f'(x) = g(x)$となる:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{df_n(x)}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right).$$

なお,一様収束より少し弱い広義一様収束という概念も存在します.広義一様収束性も,定理5.1.1~5.1.3 と同様の結果を保証します:

定義(広義一様収束) 区間I上の関数列$\{f_n(x)\}$が$f(x)$にI上広義一様収束するとは,Iに含まれる任意の閉区間で$\{f_n(x)\}$が$f(x)$に一様収束することである.

関数列

$$f_n(x) = \frac{1-x^n}{1-x}$$

は,一様収束こそしませんでしたが,広義一様収束しています.余力のある人は確かめてみてください.

Ex5.1.1 次の関数列の一様収束性を調べよ.

(1) $f_n(x) = x^n \ (0 \leq x \leq 1)$

(2) $f_n(x) = x^n \ \left(0 \leq x \leq \frac{1}{2}\right)$

(3) $f_n(x) = nx(1-x)^n \ (0 \leq x \leq 1)$

(4) $f_n(x) = \dfrac{nx}{nx+1} \ (x > 0)$

(5) $f_n(x) = \dfrac{1}{(1+x^2)^n}$

(6) $f_n(x) = \dfrac{x^n}{(1+x^2)^n}$

(7) $f_n(x) = \dfrac{nx}{1+n^2x^2}$

(8) $f_n(x) = e^{-n^2x}$

(9) $f_n(x) = \sqrt{n}xe^{-nx^2}$

(10) $f_n(x) = \dfrac{\sin nx}{n}$

(11) $f_n(x) = e^{-n\sin x}$

(12) $f_n(x) = \sin\sqrt{|x+(n\pi)^2|}$

(13) $f_n(x) = \log\left(1+\frac{x}{n}\right) \ (x \geq 0)$

(14) $f_n(x) = \dfrac{[nx]}{n}$ ($[\cdot]$は Gauss 記号)

(15) $f_1(x) = \sin x$, $f_{n+1}(x) = \sin f_n(x)$

§5.2 関数項級数と一様収束

各項が関数であるような級数を関数項級数と呼びます.関数項級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

が点xで収束するとは,第n部分和

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$$

の列$\{S_n(x)\}$が点xで収束することです.このとき

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x) = S(x)$$

をその和と呼び,

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = S(x)$$

と書きます.点xで$\{S_n(x)\}$が収束しないとき,関数項級数$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$は点$x$で発散するといいます.

各点収束や一様収束,広義一様収束の定義は,それぞれ第n部分和の列が各点収束,一様収束,広義一様収束することです.

たとえば,関数項級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1}$$

の第n部分和は

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x) = \sum_{k=1}^{n} x^{k-1} = \frac{1-x^n}{1-x}$$

となって§5.1 で説明した例と一致しますから,区間$(-1,1)$で各点収束し,一様収束せず,広義一様収束します.

定理 5.1.1~5.1.3 より,次の定理が成り立ちます:

定理 5.2.1(関数項級数の和の連続性) 各$f_n(x)$が区間I上連続である関数項級数$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$が$I$上一様収束するならば,和$S(x)$は連続である.

定理 5.2.2(項別積分可能) 各$f_n(x)$が閉区間$[a,b]$上連続である関数項級数$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$が$[a,b]$上一様収束するならば

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_c^x f_n(t)dt = \int_c^x \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)\right) dt \ \ (c \in [a,b]).$$

定理 5.2.3(項別微分可能) 各$f_n(x)$が閉区間$[a,b]$上C^1 –級である関数項級数$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$が$[a,b]$上収束するとし,和を$S(x)$とする.さらに$\sum_{n=1}^{\infty} f_n{}'(x)$が$[a,b]$上一様収束するとし,和を$T(x)$とする.このとき$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$も$[a,b]$上一様収束し,和$S(x)$は$C^1$ –級となり,$S'(x) = T(x)$となる:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{df_n(x)}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right).$$

関数項級数$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$が区間$I$上一様収束することは,第$n$部分和$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$が収束することですから,次と同値です:

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in I}\left|\sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x)\right| = 0.$$

関数項級数の一様収束性を判定するために,次の定理がしばしば用いられます:

定理 5.2.4(Weierstrass のM −判定法) 正項級数$\sum_{n=1}^{\infty} M_n$が収束するとする.各$f_n(x)$が区間I上で常に

$$|f_n(x)| \leq M_n$$

を満たすならば,関数項級数$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$は$I$上一様絶対収束する.

実際

$$\sup_{x\in I}\sum_{k=n+1}^{\infty}|f_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} M_k \to 0\ (n\to\infty)$$

ですから,明らかですね.

関数項級数の特別な場合として,冪級数(各項がxの冪であるような級数)があります.夏学期に学習済ですが,軽く復習しておきましょう.

冪級数には,それに対応した収束半径(Rとする)というものがあり,開区間$(-R,R)$を収束円と呼ぶのでした(収束円の内部の点xでは冪級数が収束,外部では発散します).収束円の内部では,何回でも項別微分,項別積分が可能です.一般の関数項級数と比べると随分ラクですね.
…その意味で,冪級数の収束半径を求めることは重要です.手助けとなる定理を紹介しておきましょう:

定理 5.2.5

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|.$$

ただし,右辺の極限が存在するか∞となるとき.

多くの冪級数についてはこれで収束半径が求まります(少なくともこの講義の試験では問題ありません).一般の冪級数に適用できるのが次の定理です:

定理 5.2.6(Cauchy-Hadamard の公式)

$$R = \left(\limsup_{n\to\infty}|a_n|^{\frac{1}{n}}\right)^{-1}.$$

Ex5.2.1 次の関数項級数の一様収束性を調べよ.

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}x^n \ (|x|\leq 1)$

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}xe^{-nx} \ (0\leq x\leq 1)$

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{x^2+n^2}$

(4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x}{n(1+nx^2)}$

(5) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}x(1-x)^n \ (0\leq x\leq 1)$

(6) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x}{n}-\sin\frac{x}{n}\right) \ (|x|\leq 1)$

Ex5.2.2 次の無限和を求めよ.

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^n}$

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)\left(\sqrt{3}\right)^{2n-1}}$

Ex5.2.3 次の冪級数の収束半径を求めよ.

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)x^n$

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n^2}x^{2n}$

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n^2}$

(4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{(n!)^2}$

§5.3 Taylor 展開

これもほとんど夏学期にやりました.確認しておくことといったら,計算して得られたTaylor 級数がどんな範囲で元の関数に収束しているかということくらいでしょう.漸近展開の計算例については,講義ノート No.2 を参照して下さい.

Ex5.3.1 $x\in\mathbb{R}$のとき,級数

$$S_N(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)!}x^{2n+1}.$$

は$\sin x$に各点収束することを示せ.

第 6 章 多変数関数

§6.1 偏微分

試験範囲なのでセクションだけ立てておきました.夏学期にやったことなので割愛させてください.講義ノート No.3 を参照.

§6.2 重積分

久しぶりに新しい内容です.加えて質,量ともにかなり重い分野でしょう.しかし,幸か不幸か試験ではごく初歩的な問題しか出題されないので,ここでは基本的な計算規則を紹介するにとどめることとさせていただきます m(_ _)m

さて,まずは 2 重積分を定義します.関数

$$f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

が考察の対象です.領域Dを微小領域D_i $(i = 1,2,\cdots N)$に分割し,代表点(x_i, y_i)を選んで作った和(Riemann 和)

$$\sum_{i=1}^{N} f(x_i, y_i)|D_i|$$

を考えます(ただし,$|D_i|$はD_iの面積).分割を十分細かくするときの Riemann 和の極限が,fのDにおける 2 重積分です:

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{N} f(x_i, y_i)|D_i|.$$

証明は省略しますが,fがDで連続ならば,この極限は領域Dの分割の仕方,及び代表点の選び方に無関係な一定の値となります.

なお,この定義から想像できる通り,

(1) $\iint_D dxdy$は領域の面積を表し,

(2) $z = f(x,y) \geq 0$とすると,$\iint_D f(x,y)dxdy$はDを底面,曲面$z = f(x,y)$ $\big((x,y) \in D\big)$を上面とする立体の体積を表します.

実際に 2 重積分を計算するときには,次の定理を用います:

定理 6.2.1(Fubini の定理) $D = \{(x,y) | a \leq x \leq b, p(x) \leq y \leq q(x)\}$とする(ただし$p, q$は区間$[a,b]$で$C^1$級).このとき,$f$が$D$で連続ならば

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b \left(\int_{p(x)}^{q(x)} f(x,y)dy \right) dx$$

が成り立つ.

この式の右辺を反復積分と呼びます.これとまったく同様に,次の定理も成り立ちます:

定理 6.2.1′(Fubini の定理) $D=\{(x,y)|a\le y\le b\,,p(y)\le x\le q(y)\}$とする(ただし$p,q$は区間$[a,b]$で$C^1$級).このとき,$f$が$D$で連続ならば

$$\iint_D f(x,y)dxdy=\int_a^b\left(\int_{p(y)}^{q(y)}f(x,y)dx\right)dy$$

が成り立つ.

一般には,定義域はこのような形ではありません.それでもいくつかの場合には,変数変換によって反復積分に帰着できます.たとえば,円の内部$\{(x,y)|x^2+y^2<1\}$は,極座標変換$x=r\cos\theta\ ,y=r\sin\theta$によって,長方形の内部$\{(r,\theta)|0\le\theta<2\pi\,,0\le r\le 1\}$に移されます.

変数変換の公式を記述するための準備をします.C^1-写像

$$\begin{array}{rccc}\Phi: & D\subset\mathbb{R}^2 & \longrightarrow & E\subset\mathbb{R}^2\\ & (u,v) & \longmapsto & (x,y)\end{array}$$

を考えます.写像Φのヤコビアンとは,行列式

$$J_\Phi=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v}\\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}$$

のことです.

定理 6.2.2(変数変換) $\Phi:D\to E$が全単射で,Dで$J_\Phi\ne 0$とする.このとき,fがEで連続ならば

$$\iint_E f(x,y)dxdy=\iint_D f\big(x(u,v),y(u,v)\big)|J_\Phi|dudv.$$

Ex6.2.1 次の 2 重積分を計算せよ.

(1) $\displaystyle\iint_D(x^2-y^2)dxdy\quad,\ D=\{(x,y)|-1\le x\le 1\,,1\le y\le 2\}$

(2) $\displaystyle\iint_D(x^2+y^2)dxdy\quad,\ D=\{(x,y)|x\le y\le 4x-x^2\}$

(3) $\displaystyle\iint_D ydxdy\quad,\ D=\left\{(x,y)\middle|\sqrt{x}+\sqrt{y}\le 1\right\}$

(4) $\displaystyle\iint_D\sqrt{x}dxdy\quad,\ D=\{(x,y)|x^2+y^2\le x\}$

(5) $\displaystyle\iint_D\frac{x}{y}dxdy\quad,\ D=\{(x,y)|0\le x\le 1\,,x+1\le y\le x+2\}$

(6) $\displaystyle\iint_D \sin\frac{\pi y}{\sqrt{x}}dxdy$, $D=\{(x,y)|1\leq x\leq 2\,,y^2\leq x\}$

(7) $\displaystyle\iint_D x^2dxdy$, $D=\{(x,y)||x+y|\leq 1\,,|x-y|\leq 1\}$

(8) $\displaystyle\iint_D \log(x^2+y^2)\,dxdy$, $D=\{(x,y)|1\leq x^2+y^2\leq 9\}$

(9) $\displaystyle\iint_D e^{-(x^2+y^2)}dxdy$, $D=\{(x,y)|x^2+y^2\leq R^2\}$ (Rは正の定数)

(10) $\displaystyle\iint_D \frac{x^2}{x^2+4y^2}dxdy$, $D=\left\{(x,y)\middle|1\leq\frac{x^2}{4}+y^2\leq 4\right\}$

一般に,n重積分も同様に定義,計算されますが,ここでは扱わないことにします.

付録 A 問題の解答

(Ex5.1.1)

(1) $f_n(x) = x^n$は,区間$[0,1]$において$^\forall n$で連続だが,極限関数は

$$f(x) = \begin{cases} 0 \ (0 \leq x < 1) \\ 1 \ (x = 1) \end{cases}$$

となり,不連続である.従って,定理 5.1.1 の対偶より$\{f_n(x)\}$は一様収束しない.

(2)

$$\sup_{x \in [0,\frac{1}{2}]} |f_n(x)| = \left(\frac{1}{2}\right)^n \to 0 \ (n \to \infty).$$

よって$\{f_n(x)\}$は0に一様収束する.

(3) 極限関数は定数関数0であるが

$$f_n{}'(x) = n(1-x)^n - n^2 x(1-x)^{n-1} = n(1-x)^{n-1}(1-(n+1)x)$$

$$\therefore \sup_{x \in [0,1]} |f_n(x)| = f_n\left(\frac{1}{n+1}\right) = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \to \frac{1}{e} \ (n \to \infty).$$

よって$\{f_n(x)\}$は一様収束しない.

(4) 極限関数は定数関数1であるが

$$\sup_{x>0} |f_n(x) - 1| = \sup_{x>0} \left| -\frac{1}{nx+1} \right| = 1.$$

よって$\{f_n(x)\}$は一様収束しない.

(5) $f_n(x) = \frac{1}{(1+x^2)^n}$は,実数全体において$^\forall n$で連続だが,極限関数は

$$f(x) = \begin{cases} 0 \ (x \neq 0) \\ 1 \ (x = 0) \end{cases}$$

となり,不連続である.従って,定理 5.1.1 の対偶より$\{f_n(x)\}$は一様収束しない.

(6)

$$\left(\frac{x}{1+x^2}\right)' = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$$

$$\therefore \sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x)| = |f_n(1)| = \left(\frac{1}{2}\right)^n \to 0 \ (n \to \infty).$$

よって$\{f_n(x)\}$は0に一様収束する.

(7) 極限関数は定数関数0であるが

$$f_n{}'(x)=\frac{n(1+n^2x^2)-2n^3x^2}{(1+n^2x^2)^2}=\frac{n(1-n^2x^2)}{(1+n^2x^2)^2}$$

$$\therefore \sup_{x\in\mathbb{R}}|f_n(x)|=\left|f_n\left(\frac{1}{n}\right)\right|=\frac{1}{2}.$$

よって$\{f_n(x)\}$は一様収束しない.

(8) $f_n(x)=e^{-n^2x}$は,実数全体において$^\forall n$で連続だが,極限関数は

$$f(x)=\begin{cases}0\ (x\neq 0)\\ 1\ (x=0)\end{cases}$$

となり,不連続である.従って,定理 5.1.1 の対偶より$\{f_n(x)\}$は一様収束しない.

(9) 極限関数は定数関数0であるが

$$f_n{}'(x)=\sqrt{n}e^{-nx^2}-2n\sqrt{n}x^2e^{-nx^2}=\sqrt{n}e^{-nx^2}(1-2nx^2)$$

$$\therefore \sup_{x\in\mathbb{R}}|f_n(x)|=\left|f_n\left(\frac{1}{\sqrt{2n}}\right)\right|=\frac{1}{\sqrt{2e}}.$$

よって$\{f_n(x)\}$は一様収束しない.

(10)

$$f_n{}'(x)=\cos nx$$

$$\therefore \sup_{x\in\mathbb{R}}|f_n(x)|=f_n\left(\frac{\pi}{2n}\right)=\frac{1}{n}\to 0\ (n\to\infty).$$

よって$\{f_n(x)\}$は0に一様収束する.

(11) $f_n(x)=e^{-n\sin x}$は,実数全体において$^\forall n$で連続だが,極限関数は

$$f(x)=\begin{cases}1\ (x=n\pi\ ,n\in\mathbb{Z})\\ 0\ (\text{otherwise})\end{cases}$$

となり,不連続である.従って,定理 5.1.1 の対偶より$\{f_n(x)\}$は一様収束しない.

(12) xを固定してnを十分大きくとると

$$\sqrt{|x+(n\pi)^2|}-n\pi=\sqrt{x+(n\pi)^2}-n\pi=\frac{x}{\sqrt{x+(n\pi)^2}+n\pi}\to 0\ (n\to\infty)$$

$$\begin{aligned}\therefore f_n(x)=\sin\sqrt{|x+(n\pi)^2|}&=\sin\sqrt{|x+(n\pi)^2|}-\sin n\pi\\&=2\cos\frac{\sqrt{|x+(n\pi)^2|}+n\pi}{2}\sin\frac{\sqrt{|x+(n\pi)^2|}-n\pi}{2}\to 0\ (n\to\infty)\end{aligned}$$

となるが,

$$f_n\left(\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi\right)^2-(n\pi)^2\right)=\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi=1.$$

よって$\{f_n(x)\}$は一様収束しない.

(13)　極限関数は定数関数0であるが

$$\sup_{x\geq 0}|f_n(x)|=\lim_{x\to\infty}\log\left(1+\frac{x}{n}\right)=\infty.$$

よって$\{f_n(x)\}$は一様収束しない.

(14)

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}|f_n(x)-x|=\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|\frac{[nx]-nx}{n}\right|=\frac{1}{n}\to 0\ (n\to\infty).$$

よって$\{f_n(x)\}$はxに一様収束する.

(15)　$x>0$を固定すると,

$$0<\sin x<x$$

が成り立つから,数列$\{f_n(x)\}$は単調減少で,かつ下に有界である.従って収束する.
$x=0$のとき,$^\forall n$で$f_n(0)=0$.
$x<0$を固定したとき,数列$\{f_n(x)\}$は上に有界な単調増加数列となるから収束する.
よって,$^\forall x\in\mathbb{R}$で数列$\{f_n(x)\}$は収束する.特に$x=0$のときは$\lim_{n\to\infty}f_n(0)=0$である.$x\neq 0$のときは,収束値を$\alpha$とおくと$\alpha=\sin\alpha$が成り立つから,$\alpha=0$を得る.つまり,関数列$\{f_n(x)\}$の極限関数は定数関数0である.
ここで,$0<\theta\leq\frac{\pi}{2}$のとき

$$\sup_{x\in[0,\theta]}|\sin x|=\sin\theta$$

であるから

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}|f_n(x)|=f_n\left(\frac{\pi}{2}\right)\to 0\ (n\to\infty)$$

よって$\{f_n(x)\}$は0に一様収束する.

★これだけ問題を解けば,一様収束性の判定は大丈夫だと思います.一応方針をまとめておきましょう:

(1) 与えられた関数列の極限関数を求める.

(2) 元の関数列の各項が連続なのに極限関数が不連続となったら,一様収束しない.

(3) 関数列の各項と極限関数との差の上界を求め,それが 0 に収束すれば一様収束,そうでなければ一様収束しない.

(Ex5.2.1)

(1) $^\forall|x| \leq 1$で

$$\left|\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}x^n\right| \leq \frac{1}{n^2}$$

であって,$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$は収束するから,Weierstrass の$M$ −判定法より,与えられた関数項級数は一様収束する.

(2) $x > 0$のとき,第n部分和は

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} xe^{-kx} = \sum_{k=1}^{n} x(e^{-x})^k = \frac{x(1-e^{-nx})}{1-e^{-x}}$$

となり,これは$^\forall n$で連続である.極限関数は

$$S(x) = \begin{cases} 0 \ (x=0) \\ \dfrac{x}{1-e^{-x}} \ (0 < x \leq 1) \end{cases}$$

となるが,

$$\lim_{x\to+0} S(x) = \lim_{x\to+0}\frac{x}{1-e^{-x}} = \lim_{x\to+0}\frac{x}{1-\left(1-x+O(x^2)\right)} = \lim_{x\to+0}\frac{x}{x+O(x^2)} = 1 \neq S(0)$$

であるから,$x = 0$で不連続となる.よって与えられた関数項級数は一様収束しない.

(3)

$$\left|\frac{1}{x^2+n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2}$$

であって,$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$は収束するから,Weierstrass の$M$ −判定法より,与えられた関数項級数は一様収束する.

(4)

$$\left(\frac{x}{n(1+nx^2)}\right)' = \frac{1-nx^2}{n(1+nx^2)^2}$$

であるから,$\frac{x}{n(1+nx^2)} = f_n(x)$とおくと

$$|f_n(x)| \leq f_n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \frac{1}{2n^{\frac{3}{2}}}.$$

ここで$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$は収束するから,Weierstrass の$M$ −判定法より,与えられた関数項級数は一様収束する.

(5) $0 < x \leq 1$を固定すると,第n部分和は

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} x(1-x)^k = \frac{x(1-x)(1-(1-x)^n)}{1-(1-x)} = (1-x)(1-(1-x)^n).$$

これは$x = 0$のときも成り立つ.これは$^\forall n$で連続であって,極限関数は

$$S(x) = \begin{cases} 0\ (x = 0) \\ 1 - x\ (0 < x \leq 1) \end{cases}$$

となるが,

$$\lim_{x \to +0} S(x) = \lim_{x \to +0} (1-x) = 1 \neq S(0)$$

であるから,$x = 0$で不連続となる.よって与えられた関数項級数は一様収束しない.

(6)

$$\left|\frac{x}{n} - \sin\frac{x}{n}\right| = \frac{|x|}{n} - \sin\frac{|x|}{n} \leq \frac{|x|}{n} - \left(\frac{|x|}{n} - \frac{1}{6}\left(\frac{|x|}{n}\right)^3\right) = \frac{1}{6}\left(\frac{|x|}{n}\right)^3 \leq \frac{1}{n^3}$$

であって,$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$は収束するから,Weierstrass の$M$ −判定法より,与えられた関数項級数は一様収束する.

(Ex5.2.2)

(1) 冪級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$$

の収束半径は 1 であるから,$|x| < 1$のとき,その和を$f(x)$とおくと

$$\int_0^x f(t)dt = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_0^x nt^{n-1}dt\right) = \sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{x}{1-x}$$

$$\therefore f(x) = \left(\frac{x}{1-x}\right)' = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

よって,求める和は

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^n} = \frac{1}{3} f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{3}{4}.$$

(2) 冪級数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n-1}$$

の収束半径は 1 であるから,$|x| < 1$のとき,その和を$f(x)$とおくと

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n-1}\right)' = \sum_{n=1}^{\infty}(-x^2)^{n-1} = \frac{1}{1+x^2}.$$

$f(0) = 0$より,求める和は

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}}f'(x)dx=\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}}\frac{dx}{1+x^2}=[\tan^{-1}x]_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}}=\frac{\pi}{6}.$$

(Ex5.2.3)

(1) $a_n=n+1$とすると

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n+2}=1.$$

よって収束半径は 1 である.

(2) $a_n=\frac{3^n}{n^2}$とすると

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{3^n}{n^2}\cdot\frac{(n+1)^2}{3^{n+1}}=\frac{1}{3}.$$

よって収束半径は$\frac{1}{\sqrt{3}}$である.

(3) $n^2=k$とすると,与えられた冪級数は

$$\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{k}x^k.$$

ここで,$a_k=\sqrt{k}$とすると

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|=\lim_{k\to\infty}\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{k+1}}=1.$$

よって収束半径は 1 である.

(4) $a_n=\frac{1}{(n!)^2}$とすると

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(n+1)!}{n!}\right)^2=\lim_{n\to\infty}(n+1)^2=\infty.$$

よって収束半径は∞である.

(Ex5.3.1)

Taylor の定理より

$$\sin x=\sum_{n=0}^{N}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}+\frac{(-1)^n\cos\xi}{(2N+3)!}x^{2N+3}\ \left(\xi:0\text{ と }x\text{の間の数}\right)$$

が成り立つ.ここで$x\in\mathbb{R}$を固定すると,剰余項は

$$\left|\frac{(-1)^n \cos\xi}{(2N+3)!}x^{2N+3}\right| \le \frac{|x|^{2N+3}}{(2N+3)!} \to 0\ (N\to\infty).$$

よって級数

$$\sum_{n=0}^{N}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}$$

は,$\sin x$に各点収束する.

(Ex6.2.1)

(1)

(解 1)

$$\iint_D (x^2-y^2)dxdy = \int_{-1}^{1}\left(\int_{1}^{2}(x^2-y^2)dy\right)dx = \int_{-1}^{1}\left(x^2-\frac{7}{3}\right)dy = -4.$$

(解 2)

$$\iint_D (x^2-y^2)dxdy = \int_{1}^{2}\left(\int_{-1}^{1}(x^2-y^2)dx\right)dy = \int_{1}^{2}\left(\frac{2}{3}-2y^2\right)dy = -4.$$

(2) $x \le 4x-x^2 \iff 0 \le x \le 3$より

$$\iint_D (x^2+y^2)dxdy = \int_0^3\left(\int_x^{4x-x^2}(x^2+y^2)dy\right)dx$$

$$= \int_0^3\left(\left(x^2(3x-x^2)+\frac{(4x-x^2)^3-x^3}{3}\right)\right)dx$$

$$= \int_0^3\left(24x^3-17x^4+4x^5-\frac{x^6}{3}\right)dx = \frac{1458}{35}.$$

(3)

(解 1) $D=\left\{(x,y)\middle|0\le x\le 1, 0\le y\le \left(1-\sqrt{x}\right)^2\right\}$より

$$\iint_D ydxdy = \int_0^1\left(\int_0^{\left(1-\sqrt{x}\right)^2}ydy\right)dx = \int_0^1\frac{\left(1-\sqrt{x}\right)^4}{2}dx = \frac{1}{2}\int_0^1\left(1-4x^{\frac{1}{2}}+6x-4x^{\frac{3}{2}}+x^2\right)dx$$

$$= \frac{1}{30}.$$

(解 2) $D=\left\{(x,y)\middle|0\le y\le 1, 0\le x\le \left(1-\sqrt{y}\right)^2\right\}$より

$$\iint_D ydxdy = \int_0^1\left(\int_0^{(1-\sqrt{y})^2}ydx\right)dy = \int_0^1 y\left(1-\sqrt{y}\right)^2dy = \int_0^1\left(y-2y^{\frac{3}{2}}+y^2\right)dy = \frac{1}{30}.$$

(4) $D=\{(x,y)\big|0\le x\le 1\,,-\sqrt{x-x^2}\le y\le\sqrt{x-x^2}\}$より

$$\iint_D \sqrt{x}dxdy=\int_0^1\left(2\int_0^{\sqrt{x-x^2}}\sqrt{x}dy\right)dx=2\int_0^1\sqrt{x}\sqrt{x-x^2}dx=2\int_0^1 x\sqrt{1-x}dx$$

$$=2\int_0^1\left((1-x)^{\frac{1}{2}}-(1-x)^{\frac{3}{2}}\right)dx=\frac{8}{15}.$$

(5)

$$\iint_D \frac{x}{y}dxdy=\int_0^1 x\left(\int_{x+1}^{x+2}\frac{dy}{y}\right)dx=\int_0^1 x(\log(x+2)-\log(x+1))dx$$

$$=\left[\frac{1}{2}(x+(x^2-4)\log(x+2)-(x^2-1)\log(x+1))\right]_0^1=\frac{1}{2}-\frac{3}{2}\log 3+2\log 2.$$

(6) $D=\{(x,y)\big|1\le x\le 2\,,-\sqrt{x}\le y\le\sqrt{x}\}$より

$$\iint_D \sin\frac{\pi y}{\sqrt{x}}dxdy=\int_1^2\left(\int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}}\sin\frac{\pi y}{\sqrt{x}}dy\right)dx=0\ \left(\because\sin\frac{\pi y}{\sqrt{x}}\text{は},y\text{に関して奇関数}\right).$$

(7) 変換

$$x+y=u\,,x-y=v\quad\Leftrightarrow\quad x=\frac{u+v}{2}\,,y=\frac{u-v}{2}$$

を考えると,ヤコビアンは

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{vmatrix}=-\frac{1}{2}$$

$$\therefore\ \iint_D x^2dxdy=\iint_{|u|\le 1\,,|v|\le 1}\left(\frac{u+v}{2}\right)^2\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|dudv=\frac{1}{8}\int_{-1}^1\left(\int_{-1}^1(u+v)^2du\right)dv$$

$$=\frac{1}{8}\int_{-1}^1\left(\frac{(v+1)^3}{3}-\frac{(v-1)^3}{3}\right)dv=\frac{1}{12}\int_{-1}^1(3v^2+1)dv=\frac{1}{3}.$$

(8) 極座標変換

$$x=r\cos\theta\ \,,y=r\sin\theta$$

を考えると,ヤコビアンは

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial\theta}\\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial\theta}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\cos\theta & -r\sin\theta\\ \sin\theta & r\cos\theta\end{vmatrix}=r$$

$$\therefore \iint_D \log(x^2+y^2)\,dxdy = \iint_{1\le r\le 3\,,0\le\theta<2\pi} \log r^2 \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}\right| drd\theta = 2\int_1^3 \left(\int_0^{2\pi} r\log r\,d\theta\right) dr$$

$$= 4\pi\int_1^3 r\log r\,dr = 4\pi\left[\frac{r^2}{4}(2\log r-1)\right]_1^3 = 2\pi(9\log 3-4).$$

(9) 極座標変換により,

$$\iint_D e^{-(x^2+y^2)}dxdy = \iint_{0\le r\le R\,,0\le\theta<2\pi} e^{-r^2}\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}\right| drd\theta = \int_0^R\left(\int_0^{2\pi} re^{-r^2}d\theta\right)dr$$

$$= 2\pi\int_0^R re^{-r^2}dr = \pi\left(1-e^{-R^2}\right).$$

(10)　変換

$$x = 2r\cos\theta\ ,y = r\sin\theta$$

を考えると,ヤコビアンは

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial\theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial\theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2\cos\theta & -2r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = 2r$$

$$\therefore \iint_D \frac{x^2}{x^2+4y^2}dxdy = \iint_{1\le r\le 2\,,0\le\theta<2\pi} \cos^2\theta\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}\right| drd\theta = \int_1^2 r\left(\int_0^{2\pi}(1+\cos 2\theta)d\theta\right)dr$$

$$= 2\pi\int_1^2 rdr = 3\pi.$$

〜あとがき〜

これで冬学期の試験範囲は終了です.お疲れ様でした.

全体的に手を抜いてしまった感は否めませんね….でも試験問題を解く分には問題ないはずです.多分(^^;

講義では(扱えたはずなのに)扱えなかった範囲については自習するしかなさそうですね.試験が終わったら少しずつ勉強することをおすすめします.

間違いなどありましたら連絡ください.その他質問も,できる限り答えます.

2010 年 2 月 4 日　　髙橋　一史

更新履歴

この講義ノートの更新履歴です.主に間違いの訂正をしてゆきます.
訂正箇所は,本文では青く染めてあります.

2010.2.4　　　本講義ノート公開!