基礎統計（09. 安藤）　過去問解答

問題1

(1) みかけ上の相関

(2) ${}_{13}C_5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^8 = \frac{1287}{8192}$

(3)(4) 出目の数 X について $E(X) = \frac{7}{2}$ ，$V(X) = \frac{1}{6}\sum_{k=1}^{6} k^2 - \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{35}{12}$

ゆえに，

$E(3X-1) = 3 \cdot E(X) - 1 = \frac{19}{2}$ ，$V(3X-1) = 3^2 \cdot V(X) = \frac{105}{4}$

(5) 母数　(6) 推定量（or 統計量）　(7) 標本分布

(8) 第二種の誤り　(9) 第一種の誤り

(10) 勝つか否かは $1/2$ とする。

求める確率は，3セット目まで 2-1 で行って，2セットとった方が 4セット目をとる確率であり，

$$p = \underbrace{{}_3C_2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)}_{\text{3セット目まで 2-1}} \cdot \underbrace{\frac{1}{2}}_{\text{4セット目をとる}} \times \underbrace{2}_{\text{2人のどちらでもよい}} = \frac{3}{8}$$

問題2

(1)

	Y \ X	-2	1	$h(y)$
$f(x,y)$	-1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$
	2	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
	3	$\frac{1}{6}$	0	$\frac{1}{6}$
	$g(x)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1

(2) $E(X) = (-2) \times \frac{1}{2} + 1 \times \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$

$E(Y) = (-1) \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{3} + 3 \times \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$

(3) $V(X) = \underbrace{\left\{(-2)^2 \times \frac{1}{2} + 1^2 \times \frac{1}{2}\right\}}_{E(X^2)} - \underbrace{\left(-\frac{1}{2}\right)^2}_{\{E(X)\}^2} = \frac{9}{4}$

$V(Y) = \left\{(-1)^2 \times \frac{1}{2} + 2^2 \times \frac{1}{3} + 3^2 \times \frac{1}{3}\right\} - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{31}{18}$

(4) $E(XY) = 2 \times \frac{1}{3} + (-6) \times \frac{1}{6} + (-1) \times \frac{1}{6} + 2 \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$

(5) $r = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{V(X)} \cdot \sqrt{V(Y)}} = \frac{E(XY) - E(X) \cdot E(Y)}{\sqrt{V(X)} \cdot \sqrt{V(Y)}} = \frac{\frac{1}{6} - \left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{2}{3}\right)}{\sqrt{\frac{9}{4}} \cdot \sqrt{\frac{31}{18}}} = \frac{\sqrt{18}}{3\sqrt{31}}$

電卓で $\sqrt{}$ をはずした方がいいと思います。

問題3

(3-1)

・B工程までの工程にかかる平均所要時間よりも短い時間ですむC工程の割合

B工程までの工程にかかる平均所要時間 $\mu_{AB} = 20+30 = 50$分

であり、C工程にかかる時間 t_C は $N(46, 8^2)$ の正規分布に従う。($\mu_C = 46$, $\sigma_C^2 = 8^2$ とおく)

$\therefore$ $Z = \dfrac{t_C - \mu_C}{\sigma}$ は $N(0,1)$ に従う。

このとき、$t_C \geqq \mu_{AB}$ すなわち $Z \geqq \dfrac{\mu_{AB} - \mu_C}{\sigma} = \dfrac{50-46}{8} = 0.5$ なる区間の割合を求めればよい。

これは、正規分布の付表より、$\underline{0.30854}$

・C工程の平均所要時間よりも長く時間がかかるB工程までの割合

C工程の平均所要時間 $\mu_C = 46$ 分

であり、A工程にかかる時間 $t_A \sim N(\mu_A, \sigma_A^2)$

B工程にかかる時間 $t_B \sim N(\mu_B, \sigma_B^2)$

$\mu_A = 20$, $\sigma_A^2 = 3^2$, $\mu_B = 30$, $\sigma_B^2 = 4^2$

※ $t_A \sim N(20, 3)$ で「t_A は $N(20, 3)$ に従う」というイミ。

正規分布の再生性(教P195下のほう参考)より、

$$t_{AB} = t_A + t_B \sim N(\underbrace{\mu_A + \mu_B}_{=50}, \underbrace{\sigma_A^2 + \sigma_B^2}_{=25})$$

これより

$Z = \dfrac{t_{AB} - 50}{5}$ は $N(0,1)$ に従う。

このとき $t_{AB} \geqq 46 \Leftrightarrow Z \geqq -0.8$ なる区間の割合を求めればよい。

正規分布が $Z=0$ を軸に対称であるので、求める割合は $1 - \Phi(0.8)$

※ $\Phi(0.8)$ は $Z \geqq 0.8$ なる区間の割合

$\therefore$ $1 - 0.21186 = \underline{0.78814}$

(3-2) X が指数分布に従うので、$P(x) = \lambda \cdot e^{-\lambda x}$ である

$$P(x>a+b \mid x>a) = \frac{P(x>a+b \text{ かつ } x>a)}{P(x>a)} = \frac{P(x>a+b)}{P(x>a)}$$

ここで、

$$P(x>a+b) = 1 - \int_0^{a+b} \lambda e^{-\lambda x} dx = 1 - \left[-e^{-\lambda x}\right]_0^{a+b} = e^{-(a+b)\lambda}$$

$$P(x>a) = 1 - \int_0^a \lambda e^{-\lambda x} dx = \text{同様} = e^{-a\lambda}$$, 同じく $P(x>b) = e^{-b\lambda}$

よって

$$\frac{P(x>a+b)}{P(x>a)} = \frac{e^{-(a+b)\lambda}}{e^{-a\lambda}} = e^{-b\lambda} = P(x>b) \quad ■$$

問題4

まず、与えられた標本について、

標本の数 $n=15$ ， 標本平均 $\bar{x}=11.3$ ， ~~標本分散~~ $s^2=10.49$ となる。

(i) ~~母平均~~ μ の 95% 信頼区間を求めよ。

t検定を用いる。公式を用いれば、求める区間は

$$11.3 - t_{0.025(14)}\cdot\frac{10.49}{\sqrt{15}} \leqq \mu \leqq 11.3 + t_{0.025(14)}\cdot\frac{10.49}{\sqrt{15}}$$

t分布表より $t_{0.025(14)}=2.145$ これを代入し計算すると、 $5.49 \leqq \mu \leqq 17.1$ //

(ii) 母分散 σ^2 の 90% 信頼区間を求めよ。

χ^2検定を用いる。公式を用いてもよいが、覚えていないとしても、χ^2分布の式を知っていれば下のように解ける。

~~母分散~~ σ^2 とすると、

$$\frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{(n-1)}$$

であるから、求める区間は、

$$\chi^2_{0.95(14)} \leqq \frac{14\times 10.49}{\sigma^2} \leqq \chi^2_{0.05(14)}$$

$$\therefore \frac{14\times 10.49}{\chi^2_{0.05(14)}} \leqq \sigma^2 \leqq \frac{14\times 10.49}{\chi^2_{0.95(14)}}$$

χ^2分布表より、 $\chi^2_{0.05(14)}=31.31935$ ， $\chi^2_{0.95(14)}=6.57063$ これを代入して計算すると、 $4.69 \leqq \sigma^2 \leqq 22.35$

問題5

(5-1) 帰無仮説 $H_0: \mu=170.9$ として、対立仮説を $H_1: \mu\neq 170.9$ とする。両側検定を実施する。 ← 片側でもいいと思います。どっちでもいいはず。

有意水準5%の棄却域は（標準偏差を全国と同じと仮定したので Z により検定）

$$|Z| > Z_{0.025} = 1.96 \quad \cdots ①$$

である。一方、H_0 を用いて得られる Z の値は

$$Z = \frac{174.8-170.9}{6\ /\sqrt{10}} = 2.055\cdots$$

これは ① をみたす。つまり、H_0 は棄却され、この大学の男子学生の平均身長は全国平均と等しいとはいえない

(5-2) この場合は t検定。棄却域は

$$|t| > t_{0.025(9)} = 2.262 \quad \cdots ①'$$

H_0 を用いて得られる t の値は

$$t = \frac{174.8-170.9}{6\ /\sqrt{10}} = 2.055$$

これは ①' をみたさない。つまり、H_0 は棄却されず、この大学の男子学生の平均身長が全国平均と異なるとはいえない //