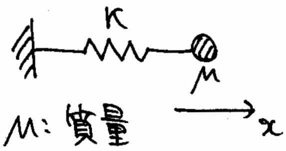
振動・波動論

パソコンを使うと、図や行列がうまく描けないので、手書きでいきます。勘弁してください。振・波は、そんなに難しくないと思うので、解法やその意味を理解すれば結構いけます。頑張りましょう。

第1章　まずは単振動の基本から。



μ: 質量
k: バネ定数

← このとき、運動方程式 $ma=F$ は、

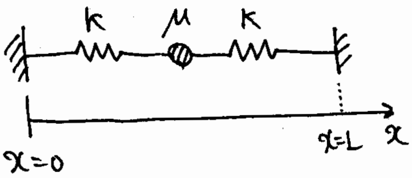
$$\underbrace{\mu\frac{d^2x}{dt^2}}_{\text{位置の2階微分＝加速度}} = -k\underbrace{x}_{\text{バネの伸び}} = -\frac{dU}{dx}\quad \Big(\underbrace{U}_{\text{ポテンシャル・エネルギー}}=\frac{1}{2}kx^2\Big)$$

少し変形して、$\boxed{\dfrac{d^2x}{dt^2}=-\omega^2x}$ $\left(\underbrace{\omega^2}_{\text{角速度}}=\dfrac{k}{\mu}\right)$

あと、$\omega=\dfrac{2\pi}{\underbrace{T}_{\text{周期}}}$、$\underbrace{f=\nu}_{\text{振動数}}=\dfrac{1}{T}=\dfrac{\omega}{2\pi}$ も覚えておきましょう。

例を1つ2つ。

例1



同じ2つのバネ（バネ定数：k、自然長：l）につながれた質点（質量：μ）の運動を考えます。

左側のバネの伸びは　$x-l$
右　〃　$(L-x)-l$　となるのは解りますね。

xは質点の位置を表しているのです。

すると、運動方程式は

$$\mu\frac{d^2x}{dt^2}=-k(x-l)+k(L-x-l)$$ と書けます。

（左側のバネは、自然長より長くなると、元に戻ろうとする力が左向き、つまりxの方向から見れば負の方向に働くので、−（マイナス）が付くのです。）

$$=-2k\left(x-\frac{L}{2}\right)$$

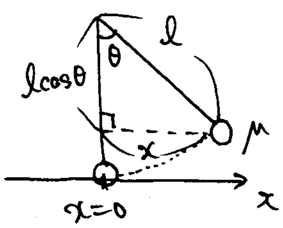
この式から、この質点は、$x=\frac{L}{2}$を中心に、$\omega^2=\frac{2k}{\mu}$で単振動する事が解ります。

ポテンシャル・エネルギー $U=\frac{1}{2}k(x-l)^2+\frac{1}{2}k(L-x-l)^2$ と書けます。

上式で見たように、$\mu\dfrac{d^2x}{dt^2}=-\dfrac{dU}{dx}$ となるけれど、

確かに、$\dfrac{dU}{dx}=2k\left(x-\dfrac{L}{2}\right)$、となります。

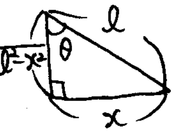
例2. 次は振り子です。



これは、2次元に動くので、直接運動方程式を立てるのは難しくポテンシャル・エネルギーから運動方程式を求めます。

位置エネルギーは（安定点、$x=0$を基準として）

$$U=\mu g(l-l\cos\theta)$$

$\left(\cos\theta=\dfrac{\sqrt{l^2-x^2}}{l} \right.$  $\left. \text{だから} \right)$

$$=\mu g\left(l-\sqrt{l^2-x^2}\right)$$

ここで、微小振動である。振れはlに比べて小さい。$l\gg x$を使って近似します。

$$\sqrt{l^2-x^2}=l\sqrt{1-\frac{x^2}{l^2}}\simeq l\cdot\left(1-\frac{1}{2}\frac{x^2}{l^2}\right)\left(\sqrt{1+\alpha}\doteqdot 1+\frac{1}{2}\alpha\right)$$

すると、$U=\mu g\left(l-l\left(1-\frac{1}{2}\times\frac{x^2}{l^2}\right)\right)$

$$=\frac{\mu g}{2l}x^2$$ となります。

すると、運動方程式は、$\mu\dfrac{d^2x}{dt^2}=-\dfrac{dU}{dx}=-\dfrac{\mu g}{l}x$ となります。

めでたく、単振動の式になりました。$\omega^2=\dfrac{g}{l}$ ですよ。

授業ではこのあと、

減衰振動・強制振動をやりましたが、いったん飛ばします。

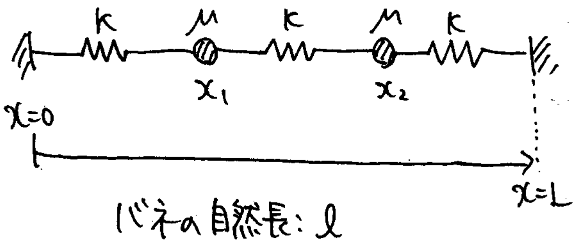
第2章

に行きます。ここが1つの山です。

"連成振動"、"基準振動" という言葉が出てきます。意味解りますか？

多くの質点がつながった振動では、複雑な振動をします。しかし、これは単振動の組合せから成ります。この単振動を"基準振動"、組み合わさったものを"連成振動"と言います。例えて言うなら、ピアノの上手い人は、両手で弾きますね。右手、左手は、それぞれの旋律を弾きますが、全体としては美しいメロディになるわけです。この右手、左手、それぞれの旋律が"基準振動"、全体の美しいメロディ、ハーモニーが"連成振動"に対応します。

さっそく例を見て、具体的なイメージを湧かせましょう。



バネでつながった2質点の運動を考えます。

運方は、

$$\begin{cases} \mu\dfrac{d^2x_1}{dt^2}=-k(x_1-l)+k(x_2-x_1-l) & \text{—①} \\ \mu\dfrac{d^2x_2}{dt^2}=-k(x_2-x_1-l)+k(L-x_2-l) & \text{—②} \end{cases}$$

となります。

これだと何が都合が悪いのか？— 左辺は x_1 しか含まれていないのに、右辺は x_1 と x_2 が含まれており、解けないのです。だから、これから変数分離の形に持っていきます。

$$\begin{cases} x_+ \equiv x_1 + x_2 \\ x_- \equiv x_2 - x_1 \end{cases}$$
とおくと、

①+②：$\mu \dfrac{d^2x_+}{dt^2} = -k(x_+ - L)$ — ①'

②−①：$\mu \dfrac{d^2x_-}{dt^2} = -3k\left(x_- - \dfrac{L}{3}\right)$ — ②'

これは解けます。①'は、$x_+ = L$ を中心として $\omega_+^2 = \dfrac{k}{\mu}$ の単振動だから、

$$x_+ = L + A_+\cos(\omega_+ t + \theta_+) \quad \text{— ①''}$$

同様にして、→ $$x_- = \frac{L}{3} + A_-\cos(\omega_- t + \theta_-) \quad \text{— ②''}$$

（$A_\pm$, $\theta_\pm$ は初期条件によって変わってくる任意定数）

これを元に戻します。

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{2}(x_+ - x_-) = \dfrac{L}{3} + \dfrac{A_+}{2}\cos(\omega_+ t + \theta_+) - \dfrac{A_-}{2}\cos(\omega_- t + \theta_-) \\ x_2 = \dfrac{1}{2}(x_+ + x_-) = \dfrac{2}{3}L + \dfrac{A_+}{2}\cos(\omega_+ t + \theta_+) + \dfrac{A_-}{2}\cos(\omega_- t + \theta_-) \end{cases}$$ //

この後にまだ問題は続きます。

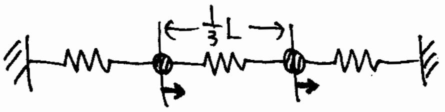
問：それぞれの基準振動がどのような運動を表しているのか説明せよ。

このような問題がおそらく出てくるでしょう。基準振動はどれですか？ ①''と②''です。
ある基準振動の運動を調べたい時には、それ以外の基準振動を安定点に固定する。
これが決まり事です。後にも出てきますが、ここでしっかり1度覚えておいて下さい。

x_+ の運動を調べたい時は x_- を安定点に固定する。つまり②''において、$x_- = \frac{L}{3}$ とする、つまり A_- を0にすればよいのです。すると、$x_- = x_2 - x_1 = \frac{L}{3}$（定数）です。

これから何が解るか？ x_2 と x_1 の距離がずっと一緒というわけです。

図にすると、



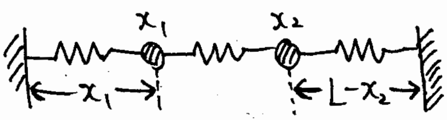
つまり、x_1 と x_2 が同位相で運動する。これが答えです。

では、x_- の運動は？…… x_+ を安定点に固定するのです。

つまり、$x_+ = x_1 + x_2 = L$

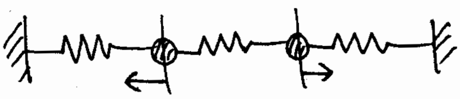
少し解りにくいので変形すると、$x_1 = L - x_2$ となります。

図にします。



端、この2つのバネの長さが常に等しいということになります。

したがって、



つまり、x_1 と x_2 が逆位相で運動する。これがもう1つの答えです。

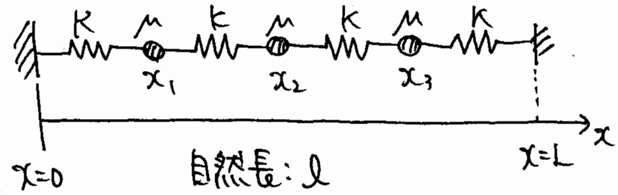
ちなみに、$\omega_+ = \sqrt{\dfrac{k}{\mu}} < \sqrt{\dfrac{3k}{\mu}} = \omega_-$ ということも触れておくべきでしょう。

＜行列で表す連成振動＞

ここからは行列を用いて基準振動を求めます。対角化など厳密なところは数学なので省くので、やり方を覚えてしまいましょう。問題にも多分誘導が付くので、それにうまくのっかれば大丈夫です。

では例を見ながら解き方を説明します。

例3　3質点の運動



3つの質点それぞれに運動方程式を立て、そこから基準振動を求めて…　というのは大変です。そこで、ポテンシャル・エネルギーについての式1式から行列を使って簡単に基準振動を求めます。

ポテンシャル・エネルギー U は、

$$U=\frac{K}{2}\{(x_1-l)^2+(x_2-x_1-l)^2+(x_3-x_2-l)^2+(L-x_3-l)^2\}$$

安定点は $x_1=\frac{L}{4}$, $x_2=\frac{L}{2}$, $x_3=\frac{3L}{4}$ となります。これは一目瞭然ですね。
もし、解らなければ $\frac{\partial U}{\partial x_i}=0$ $(i=1,2,3)$ を行えば x_i の安定点が求まりますが、普通に見て解ります。

ここで、安定点からのずれの変数を $u_1\equiv x_1-\frac{L}{4}$, $u_2\equiv x_2-\frac{L}{2}$, $u_3\equiv x_3-\frac{3L}{4}$ とおくと、

$$U=\frac{K}{2}(2u_1^2+2u_2^2+2u_3^2-2u_1u_2-2u_2u_3)+\underbrace{\text{定数項}}_{\text{ムシ!}}$$

$$=\frac{K}{2}(u_1,u_2,u_3)\underbrace{\begin{pmatrix}2&-1&0\\-1&2&-1\\0&-1&2\end{pmatrix}}_{K\ \text{対称行列}}\begin{pmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{pmatrix}+\ 〃$$

この行列は、

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc}1&2&3\end{array}\\ \begin{array}{c}1\\2\\3\end{array} & \begin{pmatrix}い&ろ&は\\に&ほ&へ\\と&ち&り\end{pmatrix}\end{array}$$

(1,1)の い は $u_1\cdot u_1=u_1^2$ の係数 $=2$
(2,2)の ほ は $u_2\cdot u_2=u_2^2$　〃　$=2$
(3,3)の り は $u_3\cdot u_3=u_3^2$　〃　$=2$

(1,2),(2,1)の に, ろ は u_1u_2 の係数
(2,3),(3,2)の ち, へ は u_2u_3　〃
(1,3),(3,1)の と, は は u_1u_3　〃

対称行列にするために均等に数字を入れます。

ここでは、u_1u_2, u_2u_3 の係数である -2 を分割して、-1ずつ入れるのです。

では練習です。「$3u_1^2+3u_2^2+3u_3^2-4u_1u_2-4u_2u_3-4u_3u_1$」← 適当 を行列で表すと……

この要領で

$$(u_1,u_2,u_3)\begin{pmatrix}3&-2&-2\\-2&3&-2\\-2&-2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{pmatrix}$$

になります。

次に $K=\begin{pmatrix}2&-1&0\\-1&2&-1\\0&-1&2\end{pmatrix}$ の固有値を求めます。

これは $|K-\lambda I|=0$ の方程式の解になります。

$$|K-\lambda I|=\begin{vmatrix}2-\lambda&-1&0\\-1&2-\lambda&-1\\0&-1&2-\lambda\end{vmatrix}=(2-\lambda)^3-2(2-\lambda)=0$$

$$(2-\lambda)(2-4\lambda+\lambda^2)=0$$

この解である $\lambda=2,\ 2\pm\sqrt{2}$ が固有値になります。

$$K\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}\iff(K-\lambda I)\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=0 \text{ より } \underbrace{\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}}_{\text{固有ベクトル}} \text{を求めます。}$$

$\lambda=2$のとき. $\begin{pmatrix}0&-1&0\\-1&0&-1\\0&-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=0\Rightarrow\begin{pmatrix}b=0\\a+c=0\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\0\\-1/\sqrt{2}\end{pmatrix}$

$\lambda=2\pm\sqrt{2}$のとき. 同様にして. $\begin{pmatrix}1/2\\\mp1/\sqrt{2}\\1/2\end{pmatrix}$ となります。

規格化してある. $\underbrace{a^2+b^2+c^2=1}$

この3つの固有ベクトルを並べた行列を $\underset{\text{オー}}{O}=\begin{pmatrix}1/\sqrt{2}&1/2&1/2\\0&-1/\sqrt{2}&1/\sqrt{2}\\-1/\sqrt{2}&1/2&1/2\end{pmatrix}$ とすると.

もとの座標 (u_1,u_2,u_3) と基準座標 $(\tilde{u}_1,\tilde{u}_2,\tilde{u}_3)$ との関係は.

$\begin{pmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{pmatrix}=\underset{\text{オー}}{O}\begin{pmatrix}\tilde{u}_1\\\tilde{u}_2\\\tilde{u}_3\end{pmatrix}$ という関係があります。 $\left((u_1,u_2,u_3)=(\tilde{u}_1,\tilde{u}_2,\tilde{u}_3)\,{}^tO\right)$

となるのはいいですね。

もう1つ. $\underset{\text{オー}}{O}$ は必ず直交行列. ${}^tO\cdot O=1$ という関係もあります。

元の U に代入します.

$$U=\frac{k}{2}(u_1,u_2,u_3)\,K\begin{pmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{pmatrix}=\frac{k}{2}(\tilde{u}_1,\tilde{u}_2,\tilde{u}_3)\,\underbrace{{}^tOKO}_{\text{対角行列}}\begin{pmatrix}\tilde{u}_1\\\tilde{u}_2\\\tilde{u}_3\end{pmatrix}$$

${}^tOKO$ は対角行列になり. その成分は λ になります。

つまり. ${}^tOKO=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2+\sqrt{2}&0\\0&0&2-\sqrt{2}\end{pmatrix}$ となるのです。

だから. $U=\frac{k}{2}(\tilde{u}_1,\tilde{u}_2,\tilde{u}_3)\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2+\sqrt{2}&0\\0&0&2-\sqrt{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\tilde{u}_1\\\tilde{u}_2\\\tilde{u}_3\end{pmatrix}$

$$= \frac{k}{2}\left(2\tilde{u}_1^2 + (2+\sqrt{2})\tilde{u}_2^2 + (2-\sqrt{2})\tilde{u}_3^2\right)$$

これを微分して、運動方程式にすると、　　　　　　基準振動

$$\mu\frac{d^2\tilde{u}_1}{dt^2} = -\frac{\partial U}{\partial \tilde{u}_1} = -2k\tilde{u}_1 \longrightarrow \quad \tilde{u}_1 \text{の角振動数} \quad \tilde{\omega}_1 = \sqrt{\frac{2k}{\mu}}$$

$$\mu\frac{d^2\tilde{u}_2}{dt^2} = -\frac{\partial U}{\partial \tilde{u}_2} = -(2+\sqrt{2})k\tilde{u}_2 \longrightarrow \quad \tilde{u}_2 \quad \text{〃} \quad \tilde{\omega}_2 = \sqrt{\frac{(2+\sqrt{2})k}{\mu}}$$

$$\mu\frac{d^2\tilde{u}_3}{dt^2} = -\frac{\partial U}{\partial \tilde{u}_3} = -(2-\sqrt{2})k\tilde{u}_3 \longrightarrow \quad \tilde{u}_3 \quad \text{〃} \quad \tilde{\omega}_3 = \sqrt{\frac{(2-\sqrt{2})k}{\mu}}$$

です。

では、各基準振動がどのような運動をするかを見てみましょう。

これは、前ページの $\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = O\begin{pmatrix} \tilde{u}_1 \\ \tilde{u}_2 \\ \tilde{u}_3 \end{pmatrix}$ の関係に戻ります。

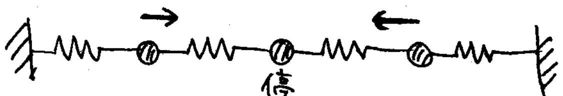
$\tilde{u}_1$ (で表される) 運動を見たい時は、前と同様にして、$\tilde{u}_2 = \tilde{u}_3 = 0$ とします。

すると、

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/2 & 1/2 \\ 0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \tilde{u}_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}\tilde{u}_1 = \underbrace{\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}}_{\text{さっきの固有ベクトル}} \overbrace{A_1}^{\text{任意定数}}\cos(\tilde{\omega}_1 t + \overbrace{\theta_1}^{})$$

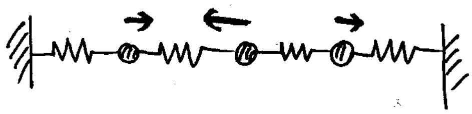
よって、
$$\begin{cases} u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}A_1\cos(\omega_1 t + \theta_1) \\ u_2 = 0 \\ u_3 = -\frac{1}{\sqrt{2}}A_1\cos(\omega_1 t + \theta_1) \end{cases}$$

図で示すと、

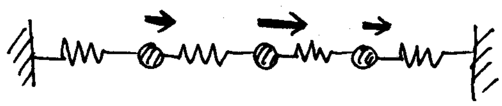


これが1つの基準振動の動きになります。

$\tilde{u}_2$ は、$\tilde{u}_1 = \tilde{u}_3 = 0$ として、
$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/\sqrt{2} \\ 1/2 \end{pmatrix}\tilde{u}_2$$



$\tilde{u}_3$ は $\tilde{u}_1 = \tilde{u}_2 = 0$ として、
$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/\sqrt{2} \\ 1/2 \end{pmatrix}\tilde{u}_3$$



このような基準振動の組み合わせから成っていることが解ります。

次ページで整理しましょう。

整理

① $U=\frac{k}{2}(u_1,u_2,u_3)K\begin{pmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{pmatrix}$ （K：対称行列）という形にする。

② $|K-\lambda I|=0$ を解いて、固有値 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ を求める。

③ $K\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=\lambda_i\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} \Longleftrightarrow (K-\lambda_i I)\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=0 \quad (a^2+b^2+c^2=1)$

より、固有ベクトル $\begin{pmatrix}a_1\\b_1\\c_1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}a_2\\b_2\\c_2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}a_3\\b_3\\c_3\end{pmatrix}$ を求める。（規格化は場合による。）できない時もある。

詳しく言うと aとbとcの比を求める。これは例4で出てきます。

操作として必要なのはこれだけです。

あとは、
$$\begin{pmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\\c_1&c_2&c_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\tilde{u}_1\\\tilde{u}_2\\\tilde{u}_3\end{pmatrix}$$
の関係があること。 ← 基準座標

これを使うと、$U=\frac{k}{2}(\tilde{u}_1,\tilde{u}_2,\tilde{u}_3)\begin{pmatrix}\lambda_1&0&0\\0&\lambda_2&0\\0&0&\lambda_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\tilde{u}_1\\\tilde{u}_2\\\tilde{u}_3\end{pmatrix}$ となることを押さえてください。

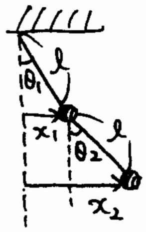
そして、物理的意味として、

$\tilde{u}_i$（で表される）基準振動は、角振動数が $\omega_i=\sqrt{\frac{\lambda_i k}{\mu}}$

そして、実際の動きを表すのが固有ベクトル $\begin{pmatrix}a_i\\b_i\\c_i\end{pmatrix}$ となっていることも理解して下さい。

最後に例をもう1つやって、確実に。

例4 これは過去問集にある問題です。二重振り子 問 通りにやっていきましょう。



(1) ポテンシャル・エネルギーを x_1,x_2 を使って表せ。

解：左図のように θ_1,θ_2 とおき、質点の質量を（2つとも）μ とおく。
すると、ポテンシャル・エネルギー U は、

$$U=\mu g l(1-\cos\theta_1)+\mu g l\{(1-\cos\theta_1)+(1-\cos\theta_2)\} \quad —①$$

（考え方は 2ページと全く一緒です。下の質点は、上の質点の振れによっても上昇していることに注意！）

ここで
$$\cos\theta_1=\frac{\sqrt{l^2-x_1^2}}{l}=\sqrt{1-\frac{x_1^2}{l^2}}\simeq 1-\frac{1}{2}\cdot\frac{x_1^2}{l^2}$$
$$\cos\theta_2=\frac{\sqrt{l^2-(x_2-x_1)^2}}{l}=\sqrt{1-\frac{(x_2-x_1)^2}{l^2}}\simeq 1-\frac{1}{2}\cdot\frac{(x_2-x_1)^2}{l^2}$$

$$\therefore ①=\mu g l\left\{1-\left(1-\frac{1}{2}\cdot\frac{x_1^2}{l^2}\right)\right\}+\mu g l\left\{1-\left(1-\frac{1}{2}\cdot\frac{x_1^2}{l^2}\right)+1-\left(1-\frac{1}{2}\cdot\frac{(x_2-x_1)^2}{l^2}\right)\right\}$$
$$=\mu g l\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{x_1^2}{l^2}+\mu g l\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{x_1^2}{l^2}+\mu g l\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{(x_2-x_1)^2}{l^2}$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{\mu g}{l}\{2x_1^2+(x_2-x_1)^2\} \quad \cdots（答）$$

(2) 運動方程式を $\frac{d^2}{dt^2}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = -\frac{g}{l}K\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$ と書いたとき、行列 K を求めよ。

解: $\mu\frac{d^2}{dt^2}x_1 = -\frac{\partial U}{\partial x_1} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{\mu g}{l}\{4x_1+2(x_2-x_1)\cdot(-1)\} = -\frac{\mu g}{l}(3x_1-x_2)$

両辺を μ で割って、 $\frac{d^2}{dt^2}x_1 = -\frac{g}{l}(3x_1-x_2)$

同様にして、

$$\mu\frac{d^2}{dt^2}x_2 = -\frac{\partial U}{\partial x_2} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{g}{l}\{2(x_2-x_1)\} = -\frac{g}{l}(-x_1+x_2)$$

$$\frac{d^2}{dt^2}x_2 = -\frac{g}{l}(-x_1+x_2)$$

$$\therefore \frac{d^2}{dt^2}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = -\frac{g}{l}\begin{pmatrix}3 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} \qquad \therefore K = \begin{pmatrix}3 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix} \cdots(答)$$

(3) 行列 K の固有ベクトルを求めよ。

解: 固有値は $|K-\lambda I| = \begin{pmatrix}3-\lambda & -1\\ -1 & 1-\lambda\end{pmatrix} = (3-\lambda)(1-\lambda)-1 = \lambda^2-4\lambda+2=0$ より、

$\lambda = 2\pm\sqrt{2}$

固有ベクトルを $\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ とすると、

$K\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ だから。 $\left((K-\lambda I)\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} = 0 \text{ だから}\right)$

$\lambda = 2+\sqrt{2}$ のとき、 $\begin{pmatrix}1-\sqrt{2} & -1\\ -1 & -1-\sqrt{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases}(1-\sqrt{2})a-b=0\\ -a+(-1-\sqrt{2})b=0\end{cases}$ —— $*$

ここでは、a, b を解くことができません。

だから、$*$ の連立方程式からは a, b の比を求めて下さい。そのあと a または b を 1 とおきます。

$\frac{b}{a} = 1-\sqrt{2}$ ∴ $a=1$ とおくと、$b = 1-\sqrt{2}$ (規格化 $a^2+b^2=1$ は無理です)

$\lambda = 2-\sqrt{2}$ のとき、 $\begin{pmatrix}1+\sqrt{2} & -1\\ -1 & -(1+\sqrt{2})\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases}(1+\sqrt{2})a-b=0\\ -a+(-1+\sqrt{2})b=0\end{cases}$

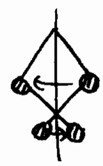
$\frac{b}{a} = 1+\sqrt{2}$ ∴ $a=1$ とおくと $b = 1+\sqrt{2}$

∴ 固有ベクトルは $\begin{pmatrix}1\\1-\sqrt{2}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1+\sqrt{2}\end{pmatrix}$ ……(答)

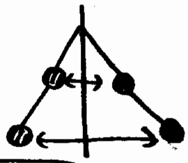
(4) 2つの基準振動の運動の振る舞いを説明せよ。

解: $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 1-\sqrt{2} & 1+\sqrt{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\tilde{x}_1\\ \tilde{x}_2\end{pmatrix}$ ($\tilde{x}_1, \tilde{x}_2$ は基準座標) だから、

$\tilde{x}_1$ (で表される) 運動は、$\tilde{x}_2 = 0$ として、 $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1-\sqrt{2}\end{pmatrix}\tilde{x}_1$ ⟶ 図で示すと、



$\tilde{x}_2$ 〃 $\tilde{x}_1 = 0$ として、 $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1+\sqrt{2}\end{pmatrix}\tilde{x}_2$ ⟶



また、$\tilde{x}_i$ で表される基準振動の角振動数を ω_i とすると、($i=1,2$)

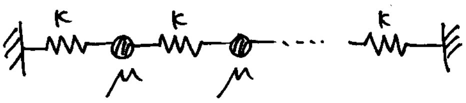
$$\omega_1 = \sqrt{\frac{(2+\sqrt{2})g}{l}} > \sqrt{\frac{(2-\sqrt{2})g}{l}} = \omega_2$$

第3章　格子運動

この章から、問題が出るとすれば「～を示せ」という問題でしょう。
ここに書いてあるものの手順をしっかり理解してください。

3-1 固定端の場合

いきなりですが、質点がN個の場合を考えます。



そして、u_i：i番目の質点の安定点からのズレ

すると、ポテンシャル・エネルギー U は　4ページの例3をもとに考えると、

$$U = 定数 + \frac{k}{2}\left(2u_1^2+2u_2^2+\cdots+2u_N^2-2u_1u_2-2u_2u_3-\cdots-2u_{N-1}u_N\right)$$

$$= 定数 + \frac{k}{2}(u_1,\cdots,u_N)\underbrace{\begin{pmatrix}2&-1&0&&\\-1&2&-1&&0\\0&-1&2&&\\&&0&\ddots&\\&&&&2\end{pmatrix}}_{K\ とおく}\begin{pmatrix}u_1\\\vdots\\u_N\end{pmatrix}$$

これを微分すると、

$\mathbf{u}=\begin{pmatrix}u_1\\\vdots\\u_N\end{pmatrix}$ として、　$\mu\frac{d^2}{dt^2}\mathbf{u}=-kK\mathbf{u}$　という運・方が立ちます。

そして、これを個々のu_nで見てみると、

$$\mu\frac{d^2}{dt^2}u_n = -k\left(-u_{n-1}+2u_n-u_{n+1}\right)\quad (n\neq 1, N) —— ☆$$

解りますか？　　具体的に見てみると、

$$\mu\frac{d^2}{dt^2}\begin{pmatrix}u_1\\u_2\\\vdots\\u_N\end{pmatrix} = -k\begin{pmatrix}2&-1&0&\cdots&\cdots&0\\-1&2&-1&0&\cdots&0\\0&-1&2&\ddots&&\\&&0&&\ddots&\\&&&&-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_1\\u_2\\u_3\\\vdots\\u_N\end{pmatrix}$$

$$= -k\begin{pmatrix}2u_1-u_2\\-u_1+2u_2-u_3\\\vdots\\-u_{N-1}+2u_N\end{pmatrix}$$

となっているので確かになっています。

また、$n=1, N$の場合は、

$$\begin{cases}\mu\frac{d^2}{dt^2}u_1 = -k(2u_1-u_2) = -k(\underset{\sim\sim}{-u_0}+2u_1-u_2)\\ \mu\frac{d^2}{dt^2}u_N = -k(-u_{N-1}+2u_N) = -k(-u_{N-1}+2u_N\underset{\sim\sim}{-u_{N+1}})\end{cases}$$

↑

$n=1, N$の場合に対しても☆の式が成り立つように、
u_0, u_{N-1}というものを導入します。ただし、$u_0=u_{N+1}=0$です。

すると、全てのnについて、☆は成り立ちます。　これは固定端というところからも納得できます。

ここで、m番目（m：自然数）の基準振動は、

基準 振動数（nによらない）

$$u_n \propto \sin\left(\frac{\pi m n}{N+1}\right)\sin(\omega_m t+\theta_0) \quad ①$$

となります。天下りですが、これは覚える必要ないです。次からの、証明を理解して下さい。
前ページの☆を立てられるようにすることの方が重要です。過去問では、どちらも問題文に示されていますが。

$\boxed{\text{証明}}$ ①が正しいことを証明します。それには、①を☆に代入します。

すると、☆の左辺 $= \mu \dfrac{d^2}{dt^2}\sin\left(\dfrac{\pi m n}{N+1}\right)\sin(\omega_m t+\theta_0)$

$$= \sin\left(\frac{\pi m n}{N+1}\right)\mu\cdot\frac{d^2}{dt^2}\sin(\omega_m t+\theta_0)$$

$$= \sin\left(\frac{\pi m n}{N+1}\right)\cdot\mu\cdot(-\omega_m^2)\cdot\cancel{\sin(\omega_m t+\theta_0)}$$

☆の右辺 $= -k\left\{-\sin\dfrac{\pi m(n-1)}{N+1} + 2\sin\dfrac{\pi m n}{N+1} - \sin\dfrac{\pi m(n+1)}{N+1}\right\}\cancel{\sin(\omega_m t+\theta_0)}$

よって、少し整理して、 $\dfrac{\mu\omega_m^2}{k}\sin\dfrac{\pi m n}{N+1} = -\sin\dfrac{\pi m(n-1)}{N+1} + 2\sin\dfrac{\pi m n}{N+1} - \sin\dfrac{\pi m(n+1)}{N+1}$ ―②

が成り立つことを示せばよい。さらに、

②の右辺 $= 2\sin\dfrac{\pi m n}{N+1} - \left(\sin\dfrac{\pi m(n-1)}{N+1} + \sin\dfrac{\pi m(n+1)}{N+1}\right)$

$$\boxed{\sin A+\sin B = 2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}}$$

$$= 2\sin\frac{\pi m n}{N+1} - 2\sin\frac{\pi m n}{N+1}\cos\frac{\pi m}{N+1}$$

$$= 2\sin\frac{\pi m n}{N+1}\left(1-\cos\frac{\pi m}{N+1}\right)$$

$$\boxed{1-\cos\alpha = 2\sin^2\frac{\alpha}{2}}$$

$$= 2\sin\frac{\pi m n}{N+1}\times 2\sin^2\frac{\pi m}{2(N+1)}$$

$$= 4\sin^2\frac{\pi m}{2(N+1)}\sin\frac{\pi m n}{N+1}$$

②の左辺 $= \dfrac{\mu\omega_m^2}{k}\times\sin\dfrac{\pi m n}{N+1}$

$\therefore\ 4\sin^2\dfrac{\pi m}{2(N+1)} = \dfrac{\mu\omega_m^2}{k}$

つまり、$\omega_m = \dfrac{4k}{\mu}\sin^2\dfrac{\pi m}{2(N+1)}$ のときに
②の等号が成り立つ。

よって、①は☆を満たす。→ u_n が正しいことが証明されました。■

ごちゃごちゃになってきました。
整理しましょう。

$$u_n \propto \sin\left(\frac{\pi m n}{N+1}\right)\sin(\omega_m t+\theta_0)$$

これは、n番目の質点のm番目の基準振動を表す式です。
前の例で言うなら、N人がピアノで1つの曲を弾いているとき、n番目の人が弾いているピアノの、m番目の手で弾いている旋律です。（余計混乱するかも）

このUnの性質について。

$$\sum_{n=1}^{N}\sin\left(\frac{\pi mn}{N+1}\right)\sin\left(\frac{\pi m'n}{N+1}\right)=\begin{cases}\dfrac{N+1}{2} & (m=m')\\ 0 & (m\neq m')\end{cases}$$ → レポート問題、レポプリ参照

ここでは、$m=m'$のときに $\frac{N+1}{2}$ となることを示します。

左辺の各項 $= \sin^2\frac{\pi mn}{N+1}$

($\frac{\pi}{N+1}\equiv A$ とおいて、指数関数になおします。 $\sin\theta=\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$ だから)

$$=\left(\frac{e^{iAmn}-e^{-iAmn}}{2i}\right)^2=\frac{2-e^{2iAmn}-e^{-2iAmn}}{4}$$

ここで、和をとります。 $\sum_{n=1}^{N}e^{2iAmn}=e^{2iAm}\frac{1-e^{2iAm}}{1-e^{2iAm}}$ ← 等比級数の和の公式
初項: e^{2iAm}, 公比: e^{2iAm}

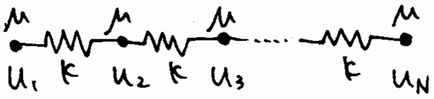
$$=\frac{e^{2iAm}-e^{2iAm(N+1)}}{1-e^{2iAm}}$$

$$=\frac{e^{2iAm}-e^{2i\frac{\pi}{\cancel{N+1}}m\cancel{(N+1)}}}{1-e^{2iAm}}=\frac{e^{2iAm}-1}{1-e^{2iAm}}=-1$$

$\sum_{n=1}^{N}e^{-2iAmn}$ も -1.

以上より、(左辺全体) $=\sum_{n=1}^{N}\frac{2-e^{2iAmn}-e^{-2iAmn}}{4}=\frac{2N+1+1}{4}=\frac{N+1}{2}$ ■

上では、固定端の場合を見てきましたが、次からは自由端です。ほぼ一緒です。



運動方程式は一緒。

$$\mu\frac{d^2}{dt^2}u_n=-k(-u_{n-1}+2u_n-u_{n+1})$$

境界条件として、 $\begin{cases}u_0=u_1\\ u_{N+1}=u_N\end{cases}$ を導入します。

そして、同じように、 $u_n\propto\cos\left\{\frac{\pi m}{N}\left(n-\frac{1}{2}\right)\right\}\sin(\omega_m t+\theta_0)$ として、正しいことを示す。

証明　運動方程式に代入

$$\Rightarrow \frac{\mu\omega_m^2}{k}\cancel{\cos\left\{\frac{\pi m}{N}\left(n-\frac{1}{2}\right)\right\}}=-\cos\left\{\frac{\pi m}{N}\left(n-\frac{3}{2}\right)\right\}+2\cos\left\{\frac{\pi m}{N}\left(n-\frac{1}{2}\right)\right\}-\cos\left\{\frac{\pi m}{N}\left(n+\frac{1}{2}\right)\right\}$$

$$\Rightarrow -2\cos\frac{\pi m}{N}\cos\left\{\frac{\pi m}{N}\left(n-\frac{1}{2}\right)\right\}$$

$$=2\cos\left\{\frac{\pi m}{N}\left(n-\frac{1}{2}\right)\right\}\left(1-\cos\frac{\pi m}{N}\right)\searrow 2\sin^2\frac{\pi m}{2N}$$

$$=4\cancel{\cos\left\{\frac{\pi m}{N}\left(n-\frac{1}{2}\right)\right\}}\sin^2\frac{\pi m}{2N}$$

よって、 $\omega_m^2=\frac{4k}{\mu}\sin^2\frac{\pi m}{2N}$

のとき、成り立つから、解として正しい。

次は進行波です。境界がなく、質点が無限につながっている場合です。
一般的に"波"という感じの運動です。これも、上でやった事と同じ事をします。

格子の場合　$-\infty < n < \infty$　（n：整数）として、

$u_n(t) \propto \sin(kn - \omega t)$　というように予測します。

運動方程式　$\mu \frac{d^2}{dt^2} u_n = -K(-u_{n-1} + 2u_n - u_{n+1})$　に代入。

$(\text{左辺}) = -\mu\omega^2 \sin(kn - \omega t)$ ―― ㋐

$(\text{右辺}) = -K\{-\sin\{k(n-1) - \omega t\} + 2\sin(kn - \omega t) - \sin\{k(n+1) - \omega t\}\}$

$= -K\{-2\cos k \sin(kn - \omega t) + 2\sin(kn - \omega t)\}$

$= -K \cdot 2\sin(kn - \omega t)(1 - \cos k)$ ―― ㋑

KとkがS紛らわしいので注意！

㋐と㋑を比較して、

$\omega^2 = \frac{2K}{\mu}(1 - \cos k) = \frac{2K}{\mu} \cdot 2\sin^2\frac{k}{2} = \frac{4K}{\mu}\sin^2\frac{k}{2}$　のとき成立する

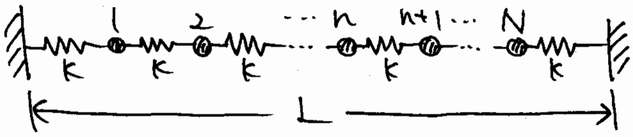
紹介が遅れましたが、

kは「波数」と言って、長さ2πの中に入る波の数です。よって、$k = \frac{2\pi}{\lambda}$ という関係が、ありますす。過去問にも出てきているので整理しておきましょう。

- ν（振動数）$= \frac{v}{\lambda}$
- k（波数）$= \frac{2\pi}{\lambda}$
- ω（角振動数）$= 2\pi\nu$
- v（速度）$= \frac{\omega}{k}$

第4章　波動方程式　　ここも「〜を示せ」という問題が中心です。

今までは質点を考えてきましたが、ここからは連続体を考えます。
つまり、・・・・



を考えますが $\left(\begin{array}{l} N\to\infty \\ L=一定 \\ 全質量：一定（質量密度 \rho） \end{array}\right.$

として極限をとります。

すると、格子間隔：$\Delta x = \dfrac{L}{N+1} \longrightarrow 0$

質量：$\mu = \rho\cdot\Delta x \longrightarrow 0$

↑ 1個あたりの質量

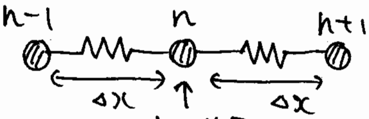
また、
力 $= k\times$のび
$= k\cdot\Delta x = 一定 = \tilde{k}$（定数）
とおきます。

今までは、
時刻 t の n 番目の格子の運動として、$u_n(t)$ を考えてきましたが、これからは、位置 x，時刻 t での運動を考えるので、$u(x,t)$ と2変数関数となり、偏微分が出現します。

すると、今までの運・方：$\mu\dfrac{d^2}{dt^2}u_n = -k(-u_{n-1}+2u_n-u_{n+1})$

$$\Downarrow$$

$$\rho\Delta x\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\frac{\tilde{k}}{\Delta x}\{-u(x-\Delta x)+2u(x)-u(x+\Delta x)\}$$



この位置を x とする。

$n-1$ 番目の質点の位置：$x-\Delta x$
$n+1$　〃　$x+\Delta x$

少し変形すると、

$$\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\frac{\tilde{k}}{\Delta x}\left\{\underbrace{\frac{u(x)-u(x-\Delta x)}{\Delta x}}_{\downarrow\ \frac{\partial u(x-\frac{1}{2}\Delta x)}{\partial x}} - \underbrace{\frac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x}}_{\downarrow\ \frac{\partial u(x+\frac{1}{2}\Delta x)}{\partial x}}\right\}$$

$\Delta x\to 0$ とすると、

$$\longrightarrow \tilde{k}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$　2階微分になります！

$$\therefore\ \rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \tilde{k}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - v^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0}$$　ただし、$v^2 = \dfrac{\tilde{k}}{\rho}$

これが一次元の波動方程式です。

もう1度. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - v^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$ — ①

一般解は. $u(x,t) = f_+(x-vt) + f_-(x+vt)$ 　　f_+, f_-は任意の一変数関数.

証明

①の左辺 $= \left(\dfrac{\partial}{\partial t} + v\dfrac{\partial}{\partial x}\right)\left(\dfrac{\partial}{\partial t} - v\dfrac{\partial}{\partial x}\right) u$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial t} + v\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} - v\frac{\partial}{\partial x}\right) f_+(x-vt)$$

$$+ \left(\frac{\partial}{\partial t} + v\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} - v\frac{\partial}{\partial x}\right) f_-(x-vt) \quad \text{— ②}$$

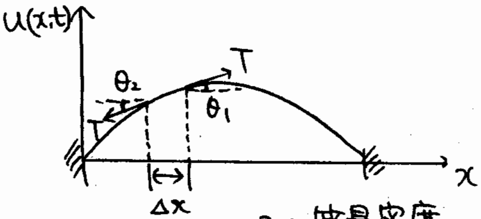
ここで.

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + v\frac{\partial}{\partial x}\right) f_+(x-vt) = -vf_+' + vf_+' = 0$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - v\frac{\partial}{\partial x}\right) f_-(x+vt) = vf_-' - vf_-' = 0$$

よって. ②$=0$となり. 確かに. 波動方程式を満たす ▨

弦の振動・弾性体の振動



λ: 質量密度

T: 張力(一定)

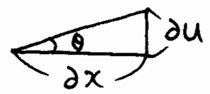
左図のような弦を考えると.

Δx部分に働く上下方向の力は.

$T\sin\theta_1 - T\sin\theta_2$ — (∗) となります。

ここで. $|\theta| \ll 1$とすると.

$\sin\theta \simeq \tan\theta = \dfrac{\partial u}{\partial x}$



(∂xだけ変化したときのuの変化∂u)

であるので.

$$(*) = T(\sin\theta_1 - \sin\theta_2)$$

$$= T\left(\frac{\partial u}{\partial x}(x+\Delta x) - \frac{\partial u}{\partial x}(x)\right)$$

$$= T\cdot\Delta x\cdot\frac{\frac{\partial u}{\partial x}(x+\Delta x) - \frac{\partial u}{\partial x}(x)}{\Delta x} \fallingdotseq T\Delta x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

これを運動方程式に代入すると.

$$\underbrace{(\lambda\Delta x)}_{\text{Δxの部分の質量 m}}\underbrace{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}}_{\text{加速度 a}} = \underbrace{T\Delta x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}_{\text{力 F}}$$

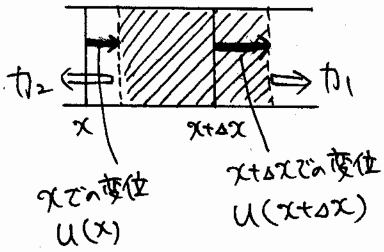
となります。

これを変形すると. $v^2 = \dfrac{T}{\lambda}$として. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - v^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$ となります。

これは. 波動方程式の形です。

もう1つ。弾性体の場合です。

ヤング率Eについては、$\dfrac{F}{S} = E\cdot$伸縮率$= E\cdot\dfrac{\Delta L}{L}$　ということだけ覚えてください。



xにおける伸縮率は、$\dfrac{\partial u}{\partial x}$ となります。

← uの変化率で表されるから。

また、上の式から

$$F = ES\cdot\text{伸縮率} = ES\frac{\partial u}{\partial x}$$ となるので、

運動方程式は、

ρ：質量密度

$$(\rho \underbrace{S\Delta x}_{\text{考えている体積}})\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 力_1 - 力_2$$

$$= ES\left(\frac{\partial u}{\partial x}(x+\Delta x) - \frac{\partial u}{\partial x}(x)\right)$$

$$= ES\Delta x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$ となります。

さっきと同様に、$v^2 = \dfrac{E}{\rho}$ とすると、$\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - v^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$ となり、

これも波動方程式に一致します。

第5章 基準振動とフーリエ展開

フーリエ展開というのは、任意の関数が sin や cos の和で表されるということです。

つまり、

$$U(x)=\underbrace{\sum_{m=1}^{\infty} U_m \sin\left(\frac{\pi m}{L}x\right)}_{\text{sine 展開}}=\underbrace{\frac{U_0}{2}+\sum_{m=1}^{\infty} U_m \cos\left(\frac{\pi m}{L}x\right)}_{\text{cosine 展開}}$$

となります。

ここで U_m というのは係数で、

sine 展開のとき … $U_m=\frac{2}{L}\int_0^L \sin\left(\frac{\pi m}{L}x\right)U(x)\,dx$

cosine 〃 … $U_m=\frac{2}{L}\int_0^L \cos\left(\frac{\pi m}{L}x\right)U(x)\,dx$ となります。

この U_m の求め方が過去問に出ているので、一応やっておきましょう。

sine 展開の場合がほとんどなので、sine 展開の場合でやります。

$$U(x)=\sum_{m=1}^{\infty} U_m \sin\left(\frac{\pi m}{L}x\right)$$

両辺に $\sin\left(\frac{\pi m'}{L}x\right)$ をかけると、

$$U(x)\sin\left(\frac{\pi m'}{L}x\right)=\left\{\sum_{m=1}^{\infty} U_m \sin\left(\frac{\pi m}{L}x\right)\right\}\times\sin\left(\frac{\pi m'}{L}x\right)$$

x で積分 $(0\to L)$ すると、

$$\int_0^L U(x)\sin\left(\frac{\pi m'}{L}x\right)dx=U_m\int_0^L\sum_{m=1}^{\infty}\sin\left(\frac{\pi m}{L}x\right)\times\sin\left(\frac{\pi m'}{L}x\right)dx \quad —①$$

$$\left(\begin{aligned}
&\text{ここで、}\int_0^L \sin\left(\frac{\pi m}{L}x\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi m'}{L}x\right)dx\\
&=\int_0^L\left\{-\frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi(m+m')}{L}x\right)+\frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi(m-m')}{L}x\right)\right\}dx\\
&=\begin{cases}0 & (m=m')\\ 1 & (m\neq m')\end{cases}\quad\text{だから}
\end{aligned}\right)$$

$① = U_m\cdot\frac{L}{2}$ 　よって m' を m とおいて、

$$\therefore\ U_m=\frac{2}{L}\int_0^L \sin\left(\frac{\pi m}{L}x\right)U(x)\,dx$$

具体的な例で見てみましょう。

例1　$u(x)=1$ を sine展開で表すと．

$$v_m=\frac{2}{L}\int_0^L \sin\left(\frac{\pi m}{L}x\right)\cdot \underbrace{u(x)}_{=1}dx=\frac{2}{L}\int_0^L \sin\left(\frac{\pi m}{L}x\right)dx$$

$$=\frac{2}{L}\left[-\frac{L}{\pi m}\cos\left(\frac{\pi m}{L}x\right)\right]_0^L=\frac{2}{L}\left\{-\frac{L}{\pi m}\cos\pi m+\frac{L}{\pi m}\cos 0\right\}$$

$$=\frac{2}{L}\left(-\frac{L}{\pi m}\cos\pi m+\frac{L}{\pi m}\right)=\begin{cases}\dfrac{4}{\pi m} & (m:\text{奇数})\\ 0 & (m:\text{偶数})\end{cases}$$

よって．$$u(x)=\sum_{m=1}^{\infty}v_m\sin\left(\frac{\pi m}{L}x\right)$$

$$=\frac{4}{\pi}\left\{\sin\left(\frac{\pi}{L}x\right)+\frac{1}{3}\sin\left(\frac{3\pi}{L}x\right)+\frac{1}{5}\sin\left(\frac{5\pi}{L}x\right)+\cdots\right\}$$ //

例2　$u(x)=x$

sine展開　$$v_m=\frac{2}{L}\int_0^L\sin\left(\frac{\pi m}{L}x\right)\cdot x\,dx=\cdots=\frac{2L}{\pi m}(-1)^{m+1}$$

$$\therefore u(x)=x=\frac{2L}{\pi}\left\{\sin\left(\frac{\pi}{L}x\right)-\frac{1}{2}\sin\left(\frac{2\pi}{L}x\right)+\frac{1}{3}\sin\left(\frac{3\pi}{L}x\right)+\cdots\right\}$$ //

cosine展開

$$v_0=\frac{2}{L}\int_0^L u(x)dx=\frac{2}{L}\int_0^L x\,dx=\frac{2}{L}\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^L=L$$

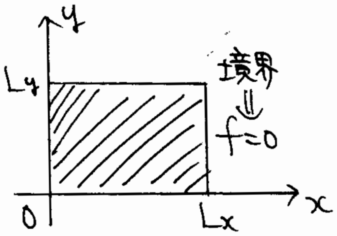
$$v_m=\frac{2}{L}\int_0^L\cos\left(\frac{\pi m}{L}x\right)x\,dx=\cdots=\frac{2L}{\pi^2m^2}\left\{(-1)^m-1\right\}=\begin{cases}0 & (m:\text{偶数})\\ -\dfrac{4L}{\pi^2m^2} & (m:\text{奇数})\end{cases}$$

$$\therefore u(x)=x=\frac{L}{2}-\frac{4L}{\pi^2}\left\{\cos\left(\frac{\pi}{L}x\right)+\frac{1}{9}\cos\left(\frac{3\pi}{L}x\right)+\cdots\right\}$$ //

という感じです。レポートの問題が解けるようにしておいて下さい。

～膜の振動～

授業で取り上げたので触れておきます。円形波は難しく，教官もこんがらがっていたので，長方形の場合しか出ないでしょう。



二次元の波動方程式は，

$$\left(\sigma\frac{\partial^2}{\partial t^2}-T\frac{\partial^2}{\partial x^2}-T\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)u(x,y,t)=0$$ となります。

σ：質量密度　T：張力

基準振動を $u(x,y,t)\propto\sin\omega t\times f(x,y)$ として，
これを上の式に代入すると，

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)f(x,y)=-k^2f(x,y)$$

ただし，$k^2\equiv\dfrac{\sigma\omega^2}{T}$

ここで $f(x,y)=X(x)\cdot Y(y)$ と変数分離できるとします。

これを上の式に代入すると、

$$Y\frac{d^2X}{dx^2}+X\frac{d^2Y}{dy^2}=-k^2X\cdot Y$$

両辺を $X\cdot Y$ で割ると、

$$\underbrace{\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2}}+\underbrace{\frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2}}=-k^2=(\text{定数})$$

どちらも定数でなくてはいけない。

$$\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2}=-k_x^2\\ \frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2}=-k_y^2\end{array}\right\}\text{定数}\quad\text{とすると、}\quad\left\{\begin{array}{l}\frac{d^2X}{dx^2}=-k_x^2X\\ \frac{d^2Y}{dy^2}=-k_y^2Y\end{array}\right.\quad(\text{ただし}\ k_x^2+k_y^2=k^2)$$

境界条件として、

$$\left\{\begin{array}{l}X(0)=X(L_x)=0\\ Y(0)=Y(L_y)=0\end{array}\right.$$

$$X(x)\propto\sin\left(\underbrace{\frac{\pi m_x}{L_x}}_{=k_x}x\right)\quad m_x=1,2,3,\cdots$$

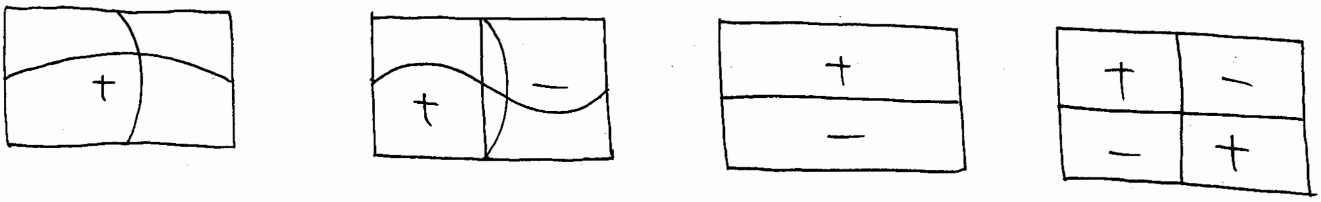
$$Y(x)\propto\sin\left(\underbrace{\frac{\pi m_y}{L_y}}_{=k_y}y\right)\quad m_y=1,2,3,\cdots$$

となります。

また、

$$\omega_{m_x,m_y}=\frac{T}{\sigma}k^2=\frac{T}{\sigma}\left\{\left(\frac{\pi}{L_x}\right)^2m_x^2+\left(\frac{\pi}{L_y}\right)^2m_y^2\right\}$$

$m_x=m_y=1$ $m_x=2,\ m_y=1$ $m_x=1,\ m_y=2$ $m_x=m_y=2$



というように、様々な基準振動があります。

これは難しいですね。問題に出ても誘導がきちんとされると思います。
多分出ません。次の電磁波の方を勉強しましょう。

第6章. 電磁波

真空中における Maxwell の方程式は.

$$\begin{cases} \nabla\cdot\mathbb{E} = \nabla\cdot\mathbb{B} = 0 \\ \nabla\times\mathbb{E} = -\dfrac{\partial\mathbb{B}}{\partial t} \\ \nabla\times\mathbb{B} = \varepsilon_0\mu_0\dfrac{\partial\mathbb{E}}{\partial t} \end{cases}$$

これらから電場に対する波動方程式を導きます。

$$\nabla\times(\nabla\times\mathbb{E}) = -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\times\mathbb{B}) = -\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\mathbb{E}}{\partial t^2} \quad \text{——①}$$

また. $\mathbb{a}\times(\mathbb{b}\times\mathbb{c}) = \mathbb{b}(\mathbb{a}\cdot\mathbb{c}) - (\mathbb{a}\cdot\mathbb{b})\mathbb{c}$ という公式を使うと.

$$(①の左辺) = \nabla\times(\nabla\times\mathbb{E}) = \nabla(\underbrace{\nabla\cdot\mathbb{E}}_{=0}) - (\nabla\cdot\nabla)\mathbb{E}$$

ここで. $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$, $\nabla\cdot\nabla = \frac{\partial}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial z^2}$ より.

$$-\left(\frac{\partial}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial z^2}\right)\mathbb{E} = -\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\mathbb{E}}{\partial t^2}$$

変形して.

$$\underline{\frac{\partial^2\mathbb{E}}{\partial t^2} - \frac{1}{\varepsilon_0\mu_0}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\mathbb{E} = 0}$$

これが. 波動方程式 (3次元) になります。

この導出は. 過去問にも出ているので. 確認しておいて下さい。

次は. 電磁波が横波であることを示します。

x方向に進む波を. $\mathbb{E} = \mathbb{E}_0 \sin(kx-\omega t)$ とすると. $\mathbb{E} = \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix}$, $\mathbb{E}_0 = \begin{pmatrix} E_{x0} \\ E_{y0} \\ E_{z0} \end{pmatrix}$ 定ベクトル

$$\nabla\cdot\mathbb{E} = 0 \rightarrow \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)\begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix}$$

$$= \frac{\partial E_x}{\partial x} + \underbrace{\frac{\partial E_y}{\partial y}}_{=0} + \underbrace{\frac{\partial E_z}{\partial z}}_{=0} = 0 \qquad \therefore \frac{\partial E_x}{\partial x} = 0$$

つまり. $\frac{d}{dx}\frac{\partial}{\partial x} E_x \sin(kx-\omega t)$

$$= k\cdot E_x \cos(kx-\omega t) = 0$$

$$\therefore \underline{E_x = 0}$$

これは. 波の進行方向と波自身の方向. つまり電場の方向が直角であることを表します。

∴ 横波になります。磁場も全く同じです。

縦波というのは. →→→→←←←←← というようなものです。

この場合は. 進行方向と波自身の方向が同じです。

磁場と電場も直角になることを示します。マクスウェル方程式より

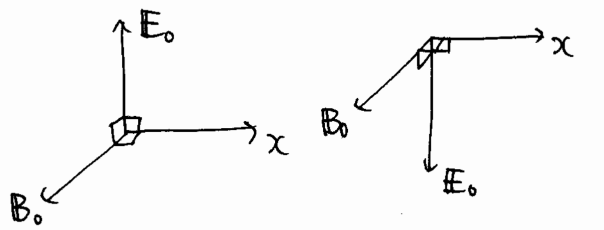
$$\frac{\partial \mathbb{B}}{\partial t} = -\nabla\times\mathbb{E} = -\begin{pmatrix} \cancel{\frac{\partial E_z}{\partial y}} - \cancel{\frac{\partial E_y}{\partial z}} \\ \cancel{\frac{\partial E_x}{\partial z}} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} - \cancel{\frac{\partial E_x}{\partial y}} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0 \\ -E_{z0}\,k\cos(kx-\omega t) \\ E_{y0}\,k\cos(kx-\omega t) \end{pmatrix}$$

$$= -k\begin{pmatrix} 0 \\ -E_{z0} \\ E_{y0} \end{pmatrix}\cos(kx-\omega t) \qquad \therefore\ \mathbb{B} = \frac{-k}{\omega}\begin{pmatrix} 0 \\ -E_{z0} \\ E_{y0} \end{pmatrix}\sin(kx-\omega t)$$

$$\mathbb{E}\cdot\mathbb{B} \Rightarrow \begin{pmatrix} E_{x0} \\ E_{y0} \\ E_{z0} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ -E_{z0} \\ E_{y0} \end{pmatrix} = 0 - E_{y0}\cdot E_{z0} + E_{z0}\cdot E_y = 0$$

$$\therefore\ \underline{\mathbb{E}_0 \perp \mathbb{B}_0} \qquad \text{また}\ \frac{|\mathbb{E}|}{|\mathbb{B}|} = \frac{\omega}{k}$$

つまり、進行方向, $\mathbb{E}$, $\mathbb{B}$ すべて互いに直交することになります。



2種類あります。

これを偏光と呼びます。

球面波

$$\left\{\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\right\}\mathbb{E} = 0$$

↓ 球座標を使うと、

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + (\text{角度による微分})$$

(角度による微分) ↓ 球対称ならば 0

$$= \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}$$

$r\to\infty$ のとき、 $\frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} \to 0$

よって、 $\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial r^2}\right)\mathbb{E} \simeq 0 \Rightarrow \mathbb{E} \simeq \mathbb{E}_0\sin(kr-\omega t)$

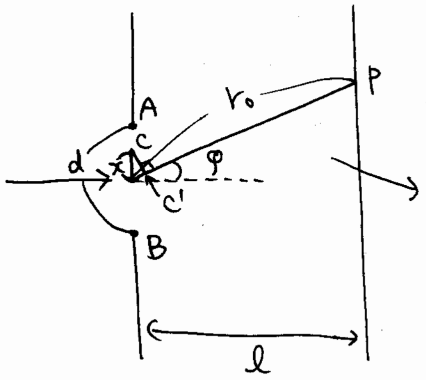
$\frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}$ の項も考えると、

$\mathbb{E} \simeq \frac{\mathbb{E}_0}{r}\sin(kr-\omega t)$ となります。

つまり、遠方へ行くほど振幅は $\frac{1}{r}$ に比例して減少します。
これは、エネルギーの保存を考えると納得できます。波の半径が広がれば球面積は r^2 に比例するので、各点でのエネルギーは r^2 に反比例して減少しなければいけません。
(エネルギー) $\propto$ (振幅)$^2 = \frac{|\mathbb{E}_0|^2}{r^2}$ より、振幅は r に反比例して減少します。

干渉と回折

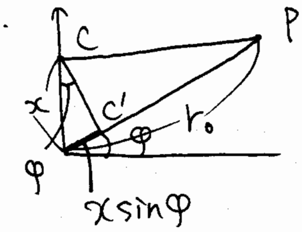
スリットのすき間 d が波長に比べて無視できない場合を考えます。



Pでの波の大きさを考えます。

このとき、幅が無限小のすき間が、AからBまで連続的につながっていて、その1つずつの和を考える、という方程をとります。

拡大。



$$PC \fallingdotseq PC' = r_0 - x\sin\varphi$$

つまり、Cから出た波の、$r_0 - x\sin\varphi$ の位置での波の大きさは、

$$\cos\{k(r_0 - x\sin\varphi) - \omega t\}$$

これを、$-\frac{d}{2} \to \frac{d}{2}$ まで x について積分すると、

$$\int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} \cos\{k(r_0 - x\sin\varphi) - \omega t\}\, dx$$

ここで $kr_0 - \omega t = \alpha$ とおくと、

$$= \int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} \cos(\alpha - kx\sin\varphi)\, dx$$

$$= \frac{1}{-k\sin\varphi}\Big[\sin(\alpha - k\sin\varphi \cdot x)\Big]_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} = \frac{1}{-k\sin\varphi}\left\{\sin\left(\alpha - \frac{d}{2}k\sin\varphi\right) - \sin\left(\alpha + \frac{d}{2}k\sin\varphi\right)\right\}$$

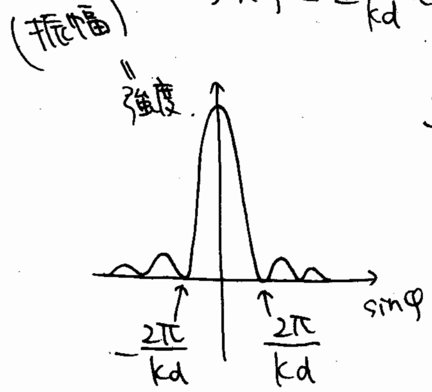
$$= \frac{1}{k\sin\varphi} \cdot 2\cos\alpha \cdot \sin\left(\frac{d}{2}k\sin\varphi\right)$$

$$= \frac{2}{k\sin\varphi}\sin\left(\frac{d}{2}k\sin\varphi\right)\cos(kr_0 - \omega t)$$

振幅 → 角度依存性があることが解ります。

$\sin\varphi \to 0$ のとき、$\frac{2}{k\sin\varphi} \to \infty$, $\sin\left(\frac{d}{2}k\sin\varphi\right) \to 0$　　$\sin\varphi = 0$ で最大

$\sin\varphi = \pm\frac{2\pi}{kd}$ のとき、$\frac{2}{k\sin\varphi}\sin\left(\frac{d}{2}k\sin\varphi\right) = 0$



これから解ることは、

$d \to$ 小 になれば、ピークの幅 → 大 となるということです。

これは、すき間から波が車輪のように広がる、ということ。

つまり、すき間が小さくないと、回折は起こらないということです。

多分、ここは出ないだろうなあというところや、イマイチ自分で解らないところは省かせてもらいました。一応、教科書がなくても解るように書いたつもりですが、このプリントと教科書を読みながら勉強してください。

時間がない人は、レポート問題を完璧にしておいてください。

解らないことがあったら、答えられる範囲で答えるので、rosy-hide.8@docomo.ne.jp まで連絡下さい。

量が多くなって、あと後半は多分説明がかなり解りにくくてごめんなさい。