２００９年度数学II演習 (理I向け)　第１回　　　　'09/4/14（火）４限

'09/4/20（月）４限

問 1.1. 1) $z \in \mathbb{C}$ とする．$z\bar{z}$ は実数であって，更に $z\bar{z} \geq 0$ が成り立つことを示せ．また, 等号が成り立つことと $z = 0$ であることは同値であることを示せ.

2) $z, w \in \mathbb{C}$ のとき，$|zw| = |z|\,|w|$ が成り立つことを示せ.

3) $z, w \in \mathbb{C}$ について $|z + w| \leq |z| + |w|$ が成り立つことを示せ.

4) $t \in \mathbb{R}$ であれば，$t \in \mathbb{C}$ とみなして $|t| = \sqrt{t\bar{t}}$ と置くと $|t|$ は t を実数と見た時の絶対値と一致することを示せ.（$\sqrt{z\bar{z}}$ を z の絶対値と呼ぶのはこのことも踏まえている.）

問 1.2. $z \in \mathbb{C}$ のとき $\operatorname{re} z = \dfrac{z + \bar{z}}{2}$, $\operatorname{im} z = \dfrac{z - \bar{z}}{2\sqrt{-1}}$ がそれぞれ成り立つことを示せ.

定義 1.3 (指数函数). $z \in \mathbb{C}$ の時

$$e^z = 1 + z + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{3!}z^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

と定める．ただし，ここでは $\frac{z^0}{0!} = 1$ とする.

本当は級数が収束することを示さないと上の定義は意味をなさないが, これは数学 I で扱うことになっているのでここでは収束は認める．さらに次の定理も認めることにする.

定理 1.4. 1) $x \in \mathbb{R}$ の時 $e^{\sqrt{-1}x} = \cos x + \sqrt{-1}\sin x$ が成り立つ.

2) $z, w \in \mathbb{C}$ の時 $e^{z+w} = e^z e^w$ が成り立つ.（指数法則）

問 1.5. $z, w \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, $w \neq 0$ とする.

1) $\arg zw - (\arg z + \arg w)$ は 2π の整数倍であることを示せ.

2) $0 < \arg z < \pi$, $0 < \arg w < \pi$ であるとする．このとき, 複素平面（複素数平面, ガウス平面）における $0, 1, z$ を頂点とする三角形と，$0, w, zw$ を頂点とする三角形は相似であることを示せ．また, 相似比を求めよ.

注. 1) の事実を $\arg zw = \arg z + \arg w$ が $2\pi\mathbb{Z}$ の任意性を除いて成り立つという.

問 1.6. $z \in \mathbb{C}$ とする.

1) $|e^z| = e^{\operatorname{re} z}$ が成り立つことを示せ．また, 常に $e^z \neq 0$ が成り立つことを示せ.

2) $n \in \mathbb{Z}$ であれば $e^{z+2\pi\sqrt{-1}n} = e^z$ が成り立つことを示せ.

3) $(e^z)^{-1} = e^{-z}$ であることを示せ.

注意：左辺は e^z の乗法に関する逆元である.

問 1.7. $z \in \mathbb{C}$ とする．$f_z\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ と $g_z\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ を $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ に対して

$$f_z(x) = \begin{pmatrix} \operatorname{re} z(x_1 + \sqrt{-1}x_2) \\ \operatorname{im} z(x_1 + \sqrt{-1}x_2) \end{pmatrix}, \quad g_z(x) = \begin{pmatrix} \operatorname{re} \bar{z}(x_1 + \sqrt{-1}x_2) \\ \operatorname{im} \bar{z}(x_1 + \sqrt{-1}x_2) \end{pmatrix}$$

と置くことにより定める．ここで $z(x_1 + \sqrt{-1}x_2), \bar{z}(x_1 + \sqrt{-1}x_2)$ は複素数としての積である.

1) $A_z \in M_2(\mathbb{R})$ であって，任意の $x \in \mathbb{R}^2$ について $f_z(x) = A_z x$ が成り立つようなものがただ一つ存在する．A_z を z を用いて表せ．ここで $M_2(\mathbb{R})$ は実数を成分とする 2 行 2 列の行列全体のなす集合である．

2) $z \neq 0$ であれば 1) で得られる行列 A_z は逆行列を持ち，しかもある $w \in \mathbb{C}$ について $(A_z)^{-1} = A_w$ が成り立つことを示せ．

3) $M_2(\mathbb{R})$ の元であって，1) のようにして得ることができるものを全て挙げよ．

4) f_z を g_z に置き換えて 1) から 3) に答えよ．

問 1.8. 問 1.7 で得られる写像 f_z は

a) $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^2,\ f_z(x_1 + x_2) = f_z(x_1) + f_z(x_2)$,

b) $\forall x \in \mathbb{R}^2, \forall \lambda \in \mathbb{R},\ f_z(\lambda x) = \lambda f_z(x)$,

という性質を持つことを示せ．また，g_z についてはどうか調べよ．

問 1.8 の二つの性質を持つ写像を線型写像という．線型写像はこの講義・演習での主題の一つである．

問 1.9 (詳しいことは冬学期に扱う)．$v = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ のとき，v と w の内積を $\langle v \,|\, w \rangle$ で表す．つまり，$\langle v \,|\, w \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2$ とする．内積はいくつかの性質をもつが, そのうち

$$(*) \qquad \langle v \,|\, v \rangle \geq 0 \text{ であって, 等号は } v = 0 \text{ の時, その時のみ成り立つ}$$

という性質に着目し, $v, w \in \mathbb{C}^2$ に対しても同様の性質を持つような操作を考えてみる．

1) 単純に $\mathbb{R}^2$ の時と同様に $\langle v \,|\, w \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2$ とするとこれは性質 $(*)$ を持たないことを示せ．

2) $\langle v \,|\, w \rangle = \overline{x_1} y_1 + \overline{x_2} y_2$ とするとこれは性質 $(*)$ を持つことを示せ．

・ 以下では $\langle v \,|\, w \rangle$ は 2) のものを用いる．

3) $v \in \mathbb{C}^2$ に対して v の長さを $\|v\| = \sqrt{\langle v \,|\, v \rangle}$ として定める．$w \in \mathbb{R}^2$ のとき, $w \in \mathbb{C}^2$ とみなすと $\|w\|$ は通常の意味での w の長さと一致することを示せ．

4) $v \in \mathbb{C}^2$, $\lambda \in \mathbb{C}$ について, $\|\lambda v\| = |\lambda|\, \|v\|$ が成り立つことを示せ．

問 1.10. 複素平面で以下の式が表す図形を図示せよ．

1) $|z - c| = r$, ただし $c, r \in \mathbb{C}$．（より正確には $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - c| = r\}$, $c, r \in \mathbb{C}$ のことである．以下同様.）

2) $|z - 1| + |z + 1| = p,\ p > 0$．（不等号は実数に対してしか意味を持たないので, 例えば $p > 0$ のように不等号を用いた時には暗黙の内に $p \in \mathbb{R}$ を仮定する.）

3) $\left|\dfrac{z-1}{z+1}\right| = c,\ c \in \mathbb{R}$.

4) $\left|z - \sqrt{-1}\right| = (\operatorname{im} z) + 1$.

（以上）

数学 II 演習　足助太郎教官　第１回　解答

問 1.1.

1) $z = a + \sqrt{-1}b$ とおくと, $\bar{z} = a - \sqrt{-1}b$ より, $z\bar{z} = a^2 + b^2 \geq 0$.
また, 等号成立は $a = b = 0$ 即ち $z = 0$ のときである. $\square$

2) $z = a_1 + \sqrt{-1}b_1, w = a_2 + \sqrt{-1}b_2$ とおくと, $zw = (a_1a_2 - b_1b_2) + \sqrt{-1}(a_1b_2 + a_2b_1)$ より,
$|z| = \sqrt{{a_1}^2 + {b_1}^2}, |w| = \sqrt{{a_2}^2 + {b_2}^2}$,
$|zw| = \sqrt{(a_1a_2 - b_1b_2)^2 + (a_1b_2 + a_2b_1)^2} = \sqrt{{a_1}^2{a_2}^2 + {b_1}^2{b_2}^2 + {a_1}^2{b_2}^2 + {b_1}^2{a_2}^2} = \sqrt{({a_1}^2 + {b_1}^2)({a_2}^2 + {b_2}^2)}$.
$\therefore |zw| = |z||w|$. $\square$

3) z, w を 2) 同様定めると, $|z + w| \leq |z| + |w|$ の両辺は正なので二乗して

$$
\begin{aligned}
& |z+w|^2 \leq (|z| + |w|)^2 \\
\Leftrightarrow \quad & (a_1 + a_2)^2 + (b_1 + b_2)^2 \leq ({a_1}^2 + {b_1}^2) + ({a_2}^2 + {b_2}^2) + 2\sqrt{({a_1}^2 + {b_1}^2)({a_2}^2 + {b_2}^2)} \\
\Leftrightarrow \quad & a_1a_2 + b_1b_2 \leq \sqrt{({a_1}^2 + {b_1}^2)({a_2}^2 + {b_2}^2)}.
\end{aligned}
$$

(右辺) ≥ 0 であるから, (左辺) < 0 のとき明らかに成り立つ. (左辺) ≥ 0 ならば両辺二乗して,
$(a_1a_2 + b_1b_2)^2 \leq ({a_1}^2 + {b_1}^2)({a_2}^2 + {b_2}^2) \Leftrightarrow {a_1}^2{a_2}^2 - 2a_1a_2b_1b_2 + {b_1}^2{b_2}^2 = (a_1b_2 - a_2b_1)^2 \geq 0$
を示せばよいがこれは明らかに成り立つ. $\square$

4) $t \in \mathbb{R}$ より $t = \bar{t}$ だから, $\sqrt{t\bar{t}} = \sqrt{t^2} = |t|$. $\square$

問 1.2.

$z = a + \sqrt{-1}b$ とおく. $\bar{z} = a - \sqrt{-1}b$ より, $z + \bar{z} = 2a, z - \bar{z} = 2\sqrt{-1}b$.
$\therefore \dfrac{z + \bar{z}}{2} = a = \mathrm{re}z, \dfrac{z - \bar{z}}{2\sqrt{-1}} = b = \mathrm{im}z$. $\square$

問 1.3.

1) $\theta_1, \theta_2, \theta \in \mathbb{R}$ をそれぞれ $\arg z, \arg w, \arg zw$ のうちの 1 つとすると,
$e^{\sqrt{-1}\theta} = \dfrac{zw}{|zw|} = \dfrac{z}{|z|} \cdot \dfrac{w}{|w|} = e^{\sqrt{-1}(\theta_1 + \theta_2)}$.
$e^{\sqrt{-1}\theta}$ の周期は 2π なので, $\theta + 2\pi n = \theta_1 + \theta_2$ $(n \in \mathbb{Z})$ とかける.
$\therefore \arg zw - (\arg z + \arg w) = 2\pi n$ は 2π の整数倍となる. $\square$

2) 複素平面において, $\mathrm{P}(1)$, $\mathrm{Q}(z)$, $\mathrm{P}'(w)$, $\mathrm{Q}'(zw)$ とする.
$0 < \arg z < \pi, 0 < \arg w < \pi$ より, $0 < \arg zw < 2\pi$ とすると,
$\arg zw = \arg z + \arg w$. $\therefore \angle\mathrm{POQ} = \angle\mathrm{P'OQ'} = \arg z$.
また, $\dfrac{|zw|}{|z|} = \dfrac{|z||w|}{|z|} = \dfrac{|w|}{1}$ より $\dfrac{\mathrm{OQ'}}{\mathrm{OQ}} = \dfrac{\mathrm{OP'}}{\mathrm{OP}} = |w|$.
故に二辺比挟角相等より $\triangle\mathrm{OPQ} \backsim \triangle\mathrm{OP'Q'}$ で, 相似比は $1 : |w|$. $\square$

問 1.6.

1) $z = a + \sqrt{-1}b$ $(a, b \in \mathbb{R})$ とおくと, $e^{\sqrt{-1}\theta} = \cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta$ より,
$|e^z| = |e^a||e^{\sqrt{-1}b}| = |e^x||\cos b + \sqrt{-1}\sin b| = |e^{\mathrm{re}z}||\cos^2 b + \sin^2 b| = e^{\mathrm{re}z}$. $\square$

2) $n \in \mathbb{Z}$ のとき, $e^{z + 2\pi\sqrt{-1}n} = e^z \cdot e^{z + 2\pi\sqrt{-1}n} = e^z(\cos 2\pi n + \sqrt{-1}\sin 2\pi n) = e^z$. $\square$

3) $(e^z)^{-1} = e^x$ とおくと, $e^z \cdot e^x = e^x \cdot e^z = e^{x+z} = 1$ より $x = -z$. $\therefore (e^z)^{-1} = e^{-z}$. $\square$

問 1.7.

1) $z = a + \sqrt{-1}b$ とおくと, $\bar{z} = a - \sqrt{-1}b$ である. $(\mathrm{re}z = a, \mathrm{im}z = b)$

$z(x_1 + \sqrt{-1}x_2) = (ax_1 - bx_2) + \sqrt{-1}(bx_1 + ax_2)$ より, $f_z(x) = \begin{pmatrix} ax_1 - bx_2 \\ bx_1 + ax_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

問 1.2 より $a = \mathrm{re}z = \dfrac{z+\bar{z}}{2}, \mathrm{im}z = b = \dfrac{z-\bar{z}}{2\sqrt{-1}}$ であるから, $A_z = \begin{pmatrix} \dfrac{z+\bar{z}}{2} & -\dfrac{z+\bar{z}}{2} \\ \dfrac{z+\bar{z}}{2} & \dfrac{z+\bar{z}}{2} \end{pmatrix}$.

2) $\det A_z = a^2 + b^2 = |z|^2$ より, $X = \dfrac{1}{a^2+b^2}\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} = \dfrac{1}{|z|^2}\begin{pmatrix} \dfrac{z+\bar{z}}{2} & \dfrac{z+\bar{z}}{2} \\ -\dfrac{z+\bar{z}}{2} & \dfrac{z+\bar{z}}{2} \end{pmatrix}$ とすると,

$A_z X = \dfrac{1}{a^2+b^2}\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ より, X は A_z の逆行列である.

また, X は A_z の a, b をそれぞれ $a, -b$ に置換したものであるから, $w = \bar{z}$ とすると, $(A_z)^{-1} = A_w$ である. □

3) $M = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \middle| \, a, b \in \mathbb{R} \right\}$ とするとき, A としてありうるものは M の任意の元.

4) b を $-b$ に置換すればよいので, 上と同様にして,

1) $A_z = \begin{pmatrix} \dfrac{z+\bar{z}}{2} & \dfrac{z+\bar{z}}{2} \\ -\dfrac{z+\bar{z}}{2} & \dfrac{z+\bar{z}}{2} \end{pmatrix}$.

2) $\dfrac{1}{|z|^2}\begin{pmatrix} \dfrac{z+\bar{z}}{2} & -\dfrac{z+\bar{z}}{2} \\ \dfrac{z+\bar{z}}{2} & \dfrac{z+\bar{z}}{2} \end{pmatrix}, w = z.$

3) f_z の場合に同じ.

問 1.8.

a) $x_1 = \begin{pmatrix} s_1 \\ t_1 \end{pmatrix}, x_2 = \begin{pmatrix} s_2 \\ t_2 \end{pmatrix}$ $(s_1, t_1, s_2, t_2 \in \mathbb{R})$ とおくと,

$$\begin{aligned} f(x_1) + f(x_2) &= \begin{pmatrix} \mathrm{re}\ z(s_1 + \sqrt{-1}t_1) + \mathrm{re}\ z(s_2 + \sqrt{-1}t_2) \\ \mathrm{im}\ z(s_1 + \sqrt{-1}t_1) + \mathrm{re}\ z(s_2 + \sqrt{-1}t_2) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \mathrm{re}\ z\{(s_1 + s_2) + \sqrt{-1}(t_1 + t_2)\} \\ \mathrm{im}\ z\{(s_1 + s_2) + \sqrt{-1}(t_1 + t_2)\} \end{pmatrix} = f_z(x_1 + x_2). \quad \square \end{aligned}$$

b) $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ とすると,

$f(\lambda x) = \begin{pmatrix} \mathrm{re}\ z(\lambda x_1 + \lambda\sqrt{-1}x_2) \\ \mathrm{im}\ z(\lambda x_1 + \lambda\sqrt{-1}x_2) \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} \mathrm{re}\ z(x_1 + \sqrt{-1}x_2) \\ \mathrm{im}\ z(x_1 + \sqrt{-1}x_2) \end{pmatrix} = \lambda f_z(x)$. □

また, z を $\bar{z}$ に置換しても同様であるから, g_z についても成り立つ. □

問 1.9.

1) 例えば $v = \begin{pmatrix} \sqrt{-1} \\ \sqrt{-1} \end{pmatrix}$ とすると, $\langle v, v \rangle = -2 < 0$ より $(*)$ は不成立. □

2) 問 1.1. 1) より $\langle v, v \rangle = \overline{x_1}x_1 + \overline{x_2}x_2 = |x_1|^2 + |x_2|^2 \geq 0$ で,
等号成立は $x_1 = x_2 = 0$ 即ち $v = 0$ のときに限る. よって示された. □

3) $w = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ $(a, b \in \mathbb{R})$ とおくと, $\overline{a} = a, \overline{b} = b$ より, $||w|| = \sqrt{a^2 + b^2}$ となり, ベクトル w の長さと一致する. □

4) $||\lambda v|| = \sqrt{\overline{\lambda x_1}\lambda x_1 + \overline{\lambda x_2}\lambda x_2} = \sqrt{\overline{\lambda}\lambda(\overline{x_1}x_1 + \overline{x_2}x_2)} = |\lambda|\ ||v||$ □

問 1.10.

以下 $z = x + \sqrt{-1}y$ とおく. $(x, y \in \mathbb{R})$

1) $|z - c| \geq 0$ より, $r \notin \mathbb{R}, r < 0$ のとき条件を満たす $z \in \mathbb{C}$ は存在しない.
$r \geq 0$ のとき, $|z - c| = |(x - \mathrm{re}\ c) + \sqrt{-1}(y - \mathrm{im}\ c)| = (x - \mathrm{re}\ c)^2 + (y - \mathrm{im}\ c)^2 = r^2$.
よって与式の表す図形は中心 c, 半径 r の円. ($r = 0$ のときは点 c)

2) 問 1.1. 3) より $|z + w| \leq |z| + |w|$, w を $-w$ として $|z - w| \leq |z| + |w|$ であるから,
$|z + 1| + |z - 1| \geq |(z + 1) - (z - 1)| = 2$ 故に $p \geq 2$ が必要. ($p < 2$ のとき不適)

$$\begin{aligned} |z+1| + |z-1| = p \quad &\Leftrightarrow \quad \sqrt{(x-1)^2 + y^2} + \sqrt{(x+1)^2 + y^2} = p \\ &\Leftrightarrow \quad \sqrt{(x-1)^2 + y^2} = p - \sqrt{(x+1)^2 + y^2} \end{aligned}$$

(左辺) ≥ 0 より, $p^2 \geq (x + 1)^2 + y^2 \cdots (*)$ が必要. 両辺二乗して,
$(x - 1)^2 + y^2 = p^2 - 2p\sqrt{(x + 1)^2 + y^2} + (x + 1)^2 + y^2 \Leftrightarrow 2p\sqrt{(x + 1)^2 + y^2} = p^2 + 4x$
(左辺) ≥ 0 より, $p^2 + 4x \geq 0 \cdots (**)$ が必要. 両辺二乗して

$$\begin{aligned} 4p^2\{(x+1)^2 + y^2\} = p^4 + 8p^2x + 16x^2 \quad &\Leftrightarrow \quad (4p - 16)x^2 + 4p^2y^2 = p^4 - 4p^2 \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} y = 0 (p = 2) \\ \dfrac{x^2}{p^2/4} + \dfrac{y^2}{p^2/4 - 1} = 1 \qquad (p > 2) \cdots (***) \end{cases} \end{aligned}$$

$p = 2$ のとき, $y = 0$ および $(*)(**)$ より $-1 \leq x \leq 1$ であるから, 与式は線分 $y = 0\ -1 \leq x \leq 1$ を表す.
$p > 2$ のとき, $\dfrac{p}{2} < p - 1$, $\dfrac{p}{2} < \dfrac{p^2}{4}$ より, $(***)$ は $(*)(**)$ に含まれるので,
与式は楕円 $\dfrac{x^2}{p^2/4} + \dfrac{y^2}{p^2/4 - 1} = 1$ (焦点 $1, -1$, 長軸の長さ p, 短軸の長さ $\sqrt{p^2 - 4}$ の楕円) を表す.

3) $\left|\dfrac{z-1}{z+1}\right| > 0$ より, $c < 0$ のとき条件を満たす $z \in \mathbb{C}$ は存在しない.

$c \geq 0$ のとき, $|z-1| = c|z+1| \Leftrightarrow |(x-1)+\sqrt{-1}y| = c|(x+1)+\sqrt{-1}y|$

両辺二乗して

$(x-1)^2 + y^2 = c^2\{(x+1)^2+y^2\} \Leftrightarrow (1-c^2)x^2 - 2(1+c^2)x + (1-c^2) + (1-c^2)y^2 = 0$

$c = 1$ のとき $x = 0$ となり虚軸を表す.

$c \neq 1$ のとき, 両辺を $(1-c^2) \neq 0$ で割って,

$x^2 - 2\dfrac{1+c^2}{1-c^2} + 1 + y^2 = 0 \Leftrightarrow \left(x - \dfrac{1+c^2}{1-c^2}\right)^2 + y^2 = \left(\dfrac{1+c^2}{1-c^2}\right)^2 - 1 = \left(\dfrac{2c}{1-c^2}\right)^2$

よって与式の表す図形は中心 $\dfrac{1+c^2}{1-c^2}$, 半径 $\left|\dfrac{2c}{1-c^2}\right|$ の円. ($c = 0$ のときは点 1 を表す)

4)

$$\begin{aligned} |z-\sqrt{-1}| = (\mathrm{im}\ z)+1 \quad &\Leftrightarrow \quad |x+\sqrt{-1}(y-1)| = \sqrt{x^2+(y-1)^2} = y+1 \\ &\Leftrightarrow \quad x^2+(y-1)^2 = (y+1)^2 \text{かつ } y+1 \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \quad x^2 = 4y \text{ かつ } y \geq -1 \text{（自明）} \end{aligned}$$

よって与式の表す図形は放物線 $x^2 = 4y$ ($\sqrt{-1}$を焦点, 直線 $\mathrm{im}\ z = -1$ を準線とする放物線)

註：各問の図形的な意味は,

1) 点 c からの距離が一定（円の定義）

2) 2 点 $1, -1$ との距離の和が一定（楕円の定義）

3) 2 点 $1, -1$ との距離の比が一定（アポロニウスの円）

4) 点 $\sqrt{-1}$ と直線 $\mathrm{im}\ z = -1$ との距離が等しい（放物線の定義）.

２００９年度数学II演習（理I向け）　第2回　　　　'09/4/28（火）４限
'09/5/7（木）４限

問 2.1. L を $\mathbb{R}^2$ 内の，原点を通る直線とする．実数 a_1, a_2, v_1, v_2 を用いて

$$\begin{aligned} L &= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \middle| \ a_1x_1 + a_2x_2 = 0 \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \middle| \ \exists t \in \mathbb{R}, \ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \right\} \end{aligned}$$

と二通りに L を表した時，$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ の間の関係を求めよ．

$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ はそれぞれ L の法線ベクトル，方向ベクトルと呼ばれるのであった．

問 2.2. P を $\mathbb{R}^3$ 内の，原点を通る平面とする．実数 a_1, a_2, a_3 を用いて

$$P = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \middle| \ a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0 \right\}$$

と表す．$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ は L の法線ベクトルと呼ばれる．

1) $v, w \in P$ とする．任意の実数 t, s について $tv + sw \in P$ が成り立つことを示せ．
2) $v, w \in P$ とする．任意の $u \in P$ について，$u = tv + sw$ と実数 t, s を用いてただ一通りに表すことができることと，$tv + sw = 0$（零ベクトル）であれば $t = s = 0$（こちらの 0 は数）が成り立つことは同値であることを示せ．
3) $v, w \in P$ とする．任意の $u \in P$ について，$u = tv + sw$ と実数 t, s を用いて表すことができるとする．この時，このような表し方は一通りであることを示せ（これは P が「2 次元」であることに因る）．

2) あるいは 3) の条件が成り立つ時

$$\begin{aligned} P &= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \middle| \ a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0 \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \middle| \ \exists t, s \in \mathbb{R}, \ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} \right\} \end{aligned}$$

が成り立っている．

以下では $\langle \cdot | \cdot \rangle$ で $\mathbb{R}^3$ の内積（標準内積）を表す．例えば，$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ と置けば上で定めた P について $P = \{u \in \mathbb{R}^3 \mid \langle a \,|\, u \rangle = 0\}$ が成り立つ．

問 2.3. $\mathbb{R}^3$ 内の図形（$\mathbb{R}^3$ の部分集合）L を次のように定める．まず $a_1, a_2 \in \mathbb{R}^3$ とする．そして

$$a_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ a_{13} \end{pmatrix},\ a_2 = \begin{pmatrix} a_{21} \\ a_{22} \\ a_{23} \end{pmatrix}$$

と成分で表して

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \;\middle|\; \begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = 0 \end{aligned} \right\}$$

と置く．

1) $L = \{u \in \mathbb{R}^3 \mid \langle a_1 \,|\, u \rangle = \langle a_2 \,|\, u \rangle = 0\}$ が成り立つことを確かめよ．
2) a_1, a_2 は問 2.2 の 2) あるいは 3) の条件を充たすとする．このとき，適当に $\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ を定めれば
$$L = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \;\middle|\; \exists t \in \mathbb{R},\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \right\}$$
が成り立つことを示せ．
3) （大雑把に言えば 2) の逆）$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ とし，$v \neq 0$ とする．L を 2) のように定めれば，適当な $a_1, a_2 \in \mathbb{R}^3$ が存在して
$$L = \left\{u \in \mathbb{R}^3 \mid \langle a_1 \,|\, u \rangle = \langle a_2 \,|\, u \rangle = 0\right\}$$
が成り立ち，さらに，この a_1, a_2 は問 2.2 の 2) あるいは 3) の条件を充たすことを示せ．
4) $\mathbb{R}^2$ 内の直線に関して 2) と 3) に対応する事実は何か考えよ（問 2.1 も参照のこと）．

問 2.4. $\theta, \phi \in \mathbb{R}$ とする．T_θ で，$\mathbb{R}^3$ の y-軸を軸とする θ-回転，S_ϕ で，$\mathbb{R}^3$ の z-軸を軸とする ϕ-回転をそれぞれ表す．なお，ここで回転の方向は軸を自分に向かって垂直に立てた時の反時計回りの方向を正の方向と定める（いわゆる右ねじの方向）．従って xyz-空間において z-軸を軸とする回転であれば，x 軸から y 軸へ向かう向きの回転が正の回転である．

1) $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ の時，$T_\theta(x)$ と $S_\phi(x)$ の成分を x_1, x_2, x_3 を用いて表せ．

2) $x \in \mathbb{R}^3$ に対して $f(x) = S_\phi(T_\theta(x))$ と置く（以下の問においても同様）．$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ と成分で表した時，$f(x)$ の成分を求めよ．

3) $v, w \in \mathbb{R}^3$ の時 $\langle T_\theta(v) \,|\, T_\theta(w) \rangle = \langle v \,|\, w \rangle$ が成り立つことを示せ．

4) $v, w \in \mathbb{R}^3$ の時 $\langle f(v) \,|\, f(w) \rangle = \langle v \,|\, w \rangle$ が成り立つことを示せ．

5) $a \in \mathbb{R}^3$，$a \neq 0$ とする．$P = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \langle a \,|\, x \rangle = 0\}$ を $\mathbb{R}^3$ 内の平面とし

$$f(P) = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \exists y \in P,\ x = f(y) \right\}$$

と置く．$f(P)$ は P の f による像と呼ばれる．$f(P)$ は平面であることを示せ．

6) $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ とし，P を 5) と同様に定める．また，

$$P_0 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x_3 = 0 \right\}$$

と置く．このとき，適当な θ，ϕ が存在して $P = f(P_0)$ が成り立つことを示せ．また，このような θ，ϕ について $f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ と $f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ を求めよ．

ヒント：例えば P_0 と P の法線ベクトルに着目し，5) を用いて示すことができる．

問 2.5. 1) $A \in M_n(\mathbb{C})$, $B \in M_n(\mathbb{C})$ の時, AB の実部・虚部をそれぞれ A, B の実部・虚部を用いて表せ.

2) $A \in M_n(\mathbb{R})$ が複素行列として逆行列を持てば（つまり, $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ であれば）, その逆行列は実行列であることを示せ（従って $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ である）.

ヒント：$B \in M_n(\mathbb{C})$ を A の複素行列としての逆行列として，$AB = BA = E_n$ の実部・虚部を考えてみよ.

問 2.6. 行列 A が

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1q} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2q} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{p1} & A_{p2} & \cdots & A_{pq} \end{pmatrix}$$

と区分けされているとき，${}^tA$ を A_{ij} を用いて表せ.

（以上）

数学 II 演習　足助太郎教官　第 2 回　解答

問 2.1. L 上の点 (x_1, x_2) について, ある $t \in \mathbb{R}$ を用いて $x_1 = tv_1, x_2 = tv_2$ とかけるから,

$t(a_1v_1 + a_2v_2) = 0$ これが勝手な t に対し成り立つので, 答えは $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = 0$. □

問 2.2.

1) $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ とすると, $x \in P \Leftrightarrow a \cdot x = 0$.

$v, w \in P$ より $a \cdot v = a \cdot w = 0$ であるから, $a \cdot (tv + sw) = t(a \cdot v) + s(a \cdot w) = 0$.

$\therefore tv + sw \in P$. □

2) $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$ とおくと, $u, v, w \in P$ より,

$$\begin{cases} a_1u_1 + a_2u_2 + a_3u_3 = 0 & (1) \\ a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3 = 0 & (2) \\ a_1w_1 + a_2w_2 + a_3w_3 = 0 & (3) \end{cases}$$

を充たす. $u = tx + su$ なる (s, t) を求める. 即ち連立方程式

$$\begin{cases} u_1 = tv_1 + sw_1 & (4) \\ u_2 = tv_2 + sw_2 & (5) \\ u_3 = tv_3 + sw_3 & (6) \end{cases}$$

を解く. 但し (6) は (1)〜(5) を連立させて得られるので (4)(5) について考えればよい.

(4)(5) より t を消去して $v_2u_1 - v_1u_2 = (v_2w_1 - v_1w_2)s$.

$v_2w_1 - v_1w_2 = 0$（即ち (1)〜(3) より $v = 0$ or $w = 0$ or $v \parallel w$）のとき, $v_2u_1 - v_1u_2 \neq 0$ ならば解なし, $v_2u_1 - v_1u_2 = 0$ ならば s の解は任意の実数となる.

$v_2w_1 - v_1w_2 \neq 0$ のとき, $s = \dfrac{v_2u_1 - v_1u_2}{v_2w_1 - v_1w_2} = 0, u = \dfrac{w_2u_1 - w_1u_2}{v_2w_1 - v_1w_2} = 0$ と (s, t) はただ一つに定まる.

また, $tv + sw = 0$ なる $(s, t) \neq (0, 0)$ が存在すると仮定する. これを (s_0, t_0) とする.

$s_0 = 0$ とすると $t_0 \neq 0$ より $v = 0$, 同様に $t_0 = 0$ とすると $w = 0$.

$s \neq 0, t \neq 0$ とすると, $v = -\dfrac{s_0}{t_0}w$ より $v \parallel w$.

従って, $\forall w \in P, \exists!(s, t) \in \mathbb{R}^2(u = tv + sw) \Leftrightarrow u \neq 0, w \neq 0, u \not\parallel w \Leftrightarrow (tv + sw = 0 \Rightarrow t = s = 0)$. □

（註：$\exists!$ は「唯一つ存在する」の意）

3) 2) より, $w = 0$ or $v = 0$ or $v \parallel w$ のとき, $v_2u_1 - v_1u_2 \neq 0$ ならば (s, t) は存在しないので不適.

また $w \neq 0, v \neq 0, v \not\parallel w$ のとき, 任意の $u \in \mathbb{R}^3$ に対し s, t が定まり,

これは 2) で述べたように一通りに定まる. □

問 2.3.

1) $u \in \mathbb{R}^3$ より $u = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ とおけて,

$\langle a_1 | u \rangle = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0$,

$\langle a_2 | u \rangle = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = 0$

となり一致する. □

2) 連立方程式

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0, & (1) \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = 0 & (2) \end{cases}$$

を考える.

x_1 を固定し x_2, x_3 について解くと

$x_2 = \dfrac{a_{21}a_{13} - a_{11}a_{23}}{a_{12}a_{23} - a_{22}a_{13}} x_1, x_3 = \dfrac{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}{a_{12}a_{23} - a_{22}a_{13}} x_1.$ （問 2.2. により分母は 0 でない）

従って, 例えば $v = \begin{pmatrix} a_{12}a_{23} - a_{22}a_{13} \\ a_{21}a_{13} - a_{11}a_{23} \\ a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \end{pmatrix}$ とすることで $L = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \middle| \exists t \in R, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = tv \right\}$ とできる. □

3) $v \neq 0$ のとき $L = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \middle| \exists t \in R, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = tv \right\}$ は直線を表す.

$a_1 = 0$ のとき, (1) は任意の $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ について成り立つので, $L = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \middle| a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = 0 \right\} \cdots (*)$

となるが, これは直線とならない（平面あるいは空間を表す）ので不適. $a_2 = 0$ のときも同様.

$a_1 \mathbin{/\!/} a_2$ のとき, 即ち実数 k を用いて $a_1 = ka_2$ と表されるとき, $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = k(a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3)$ より,(1) と (2) は同値となり, L は $(*)$ で表されるが同様に不適.

従って a_1, a_2 は $a_1 \neq 0, a_2 \neq 0, a_1 \not\mathbin{/\!/} a_2$ を充たし, これは問 2.2. の 2) と 3) の条件と同値である. □

4) 問 2.1. において $\mathbb{R}^2$ の直線が 2 通りに表されているが, $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \neq 0$, $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \neq 0$ のときに, 一方から他方に書き換えが可能であることに対応する. □

問 2.4.

1) $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cos\theta - y\sin\theta \\ x\sin\theta + y\cos\theta \end{pmatrix}$ であるから,

$T_\theta(x) = \begin{pmatrix} x_1\cos\theta + x_3\sin\theta \\ x_2 \\ -x_1\sin\theta + x_3\cos\theta \end{pmatrix}, S_\phi(x) = \begin{pmatrix} x_1\cos\phi - x_2\sin\phi \\ x_1\sin\phi + x_2\cos\phi \\ x_3 \end{pmatrix}$. □

2) $f(x) = \begin{pmatrix} (x_1\cos\theta + x_3\sin\theta)\cos\phi - x_2\sin\phi \\ (x_1\cos\theta + x_3\sin\theta)\sin\phi + x_2\cos\phi \\ -x_1\sin\theta + x_3\cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1\cos\theta\cos\phi - x_2\sin\phi + x_3\sin\theta\cos\phi \\ x_1\cos\theta\sin\phi + x_2\cos\phi + x_3\sin\theta\sin\phi \\ -x_1\sin\theta + x_3\cos\theta \end{pmatrix}$. □

3) $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$ とおくと,

$$\begin{aligned} \langle T_\theta(v) | T_\theta(w) \rangle &= (v_1\cos\theta + v_3\sin\theta)(w_1\cos\theta + w_3\sin\theta) + v_2w_2 + (-v_1\sin\theta + v_3\cos\theta)(-w_1\sin\theta + w_3\cos\theta) \\ &= (v_1w_1\cos^2\theta + v_3w_3\sin^2\theta + v_1w_3\sin\theta\cos\theta + v_3w_1\sin\theta\cos\theta) + v_2w_2 + \\ &\quad (v_1w_1\sin^2\theta + v_3w_3\cos^2\theta - v_1w_3\sin\theta\cos\theta - v_3w_1\sin\theta\cos\theta) \\ &= v_1w_1 + v_2w_2 + v_3w_3 = \langle v|w \rangle. \square \end{aligned}$$

4) v, w を 3) と同様に定める.3) と同様にして $\langle S_\phi(v) | S_\phi(w) \rangle$ がいえるから,

$\langle f(v) | f(w) \rangle = \langle S_\phi(T_\theta(v)) | S_\phi(T_\theta(w)) \rangle = \langle T_\theta(v) | T_\theta(w) \rangle = \langle v|w \rangle$. □

5) $\langle f(a)|f(x)\rangle = \langle a|x\rangle$ より, 任意の P 上の点は

平面 $Q = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \langle f(a)|x\rangle = 0 \right\}$ 上に移される. 即ち $f(P) \subset Q$.

また, $T_\theta^{-1}(x) = \begin{pmatrix} x_1\cos\theta - x_3\sin\theta \\ x_2 \\ x_1\sin\theta + x_3\cos\theta \end{pmatrix}$, $S_\phi^{-1}(x) = \begin{pmatrix} x_1\cos\phi + x_2\sin\phi \\ -x_1\sin\phi + x_2\cos\phi \\ x_3 \end{pmatrix}$ として,

$f^{-1}(x) = T_\theta^{-1}(S_\phi^{-1}(x))$ を考えると, $f(f^{-1}(x)) = x$ であるから,

任意の $x \in Q$ に対し $y = f^{-1}(x) \in P$ をとれば, $f(y) = x$ とできる. 即ち $f(P) \supset Q$.

従って $f(P) \subset Q$ かつ $f(P) \supset Q$ なので $f(P) = Q$ より平面となる. $\square$

（註：$T_\theta^{-1}(x), S_\phi^{-1}(x)$ はそれぞれ $T_\theta^{-1}(x), S_\phi^{-1}(x)$ の θ, ϕ を $(-\theta), (-\phi)$ に置換したもの）

6) $a_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \|a\| \end{pmatrix}$ とすると, $P_0 = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \langle a_0|x\rangle = 0 \right\}$ と表せる.

$\cos\theta = \dfrac{a_3}{\|a\|}, \sin\theta = \dfrac{\sqrt{{a_1}^2 + {a_2}^2}}{||a||}$ なる θ, 及び $\cos\phi = \dfrac{a_1}{\sqrt{{a_1}^2 + {a_2}^2}}, \sin\phi = \dfrac{a_2}{\sqrt{{a_1}^2 + {a_2}^2}}$ なる ϕ をとれば,

$f(a_0) = \|a\| \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\phi \\ \sin\theta\sin\phi \\ \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = a$ となるから, 5) により $P = f(P_0)$ が成り立つ. また, このとき

$$f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\phi \\ \cos\theta\sin\phi \\ -\sin\theta \end{pmatrix} = \frac{1}{\|a\|\sqrt{{a_1}^2 + {a_2}^2}} \begin{pmatrix} a_1a_3 \\ a_2a_3 \\ {a_1}^2 + {a_2}^2 \end{pmatrix}, f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin\phi \\ \cos\phi \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{{a_1}^2 + {a_2}^2}} \begin{pmatrix} -a_2 \\ a_1 \\ 0 \end{pmatrix}. \square$$

問 2.5.

1) $AB = (\mathrm{re}\,A + \sqrt{-1}\,\mathrm{im}\,A)(\mathrm{re}\,B + \sqrt{-1}\,\mathrm{im}\,B) = (\mathrm{re}\,A\,\mathrm{re}\,B - \mathrm{im}\,A\,\mathrm{im}\,B) + \sqrt{-1}(\mathrm{im}\,A\,\mathrm{re}\,B - \mathrm{re}\,A\,\mathrm{im}\,B)$.

$\therefore \mathrm{re}\,AB = \mathrm{re}\,A\,\mathrm{re}\,B - \mathrm{im}\,A\,\mathrm{im}\,B, \mathrm{im}\,AB = \mathrm{im}\,A\,\mathrm{re}\,B - \mathrm{re}\,A\,\mathrm{im}\,B$. $\square$

2) $A \in M_n(\mathbb{R})$ に対し, $AB = BA = E_n$ なる $B \in M_n(\mathbb{C})$ が存在したとする.

$\mathrm{re}\,A = A, \mathrm{im}\,A = O_n$ であるから, 1) より

$$\begin{cases} A\,\mathrm{re}\,B = \mathrm{re}\,B\,A = E_n, & (1) \\ A\,\mathrm{im}\,B = O_n. & (2) \end{cases}$$

(2) に左から $\mathrm{re}\,B$ をかけると, (1) より

$\mathrm{re}\,B\,A\,\mathrm{im}\,B = \mathrm{re}\,B\,O_n \Leftrightarrow \mathrm{im}\,B = O_n \therefore B \in M_n(\mathbb{R})$. $\square$

（註：$\mathrm{re}\,X$ は行列 X の実部, $\mathrm{im}\,X$ は X の虚部である.）

問 2.6. 答えは

$${}^tA = \begin{pmatrix} {}^tA_{11} & {}^tA_{21} & \cdots & {}^tA_{p1} \\ {}^tA_{12} & {}^tA_{22} & \cdots & {}^tA_{p2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ {}^tA_{1q} & {}^tA_{2q} & \cdots & {}^tA_{pq} \end{pmatrix} \square$$

２００９年度数学II演習 (理I向け)　第3回　　　　'09/5/18（月）４限
'09/5/19（火）４限

以下では特に断らなければ K は $\mathbb{R}$ あるいは $\mathbb{C}$ を表す.

問 3.1. 次の方程式を解け．即ち，解が存在するかどうか判定し，存在するなら解を全て求め，存在しないならばそのことを示せ.

1) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 5 \\ 0 & 4 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ -2 \end{pmatrix}.$　　2) $\begin{pmatrix} -1 & 5 & 2 & 4 \\ 6 & 3 & 2 & 8 \\ 1 & 4 & -1 & 1 \\ 2 & 7 & 5 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ -3 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix}.$

3) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 & -2 \\ -1 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 6 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ b \\ 0 \end{pmatrix},$　ただし $a, b \in \mathbb{R}$.

問 3.2. 以下の行列の逆行列が存在するかどうか判定し，存在するならばそれを求めよ．また，各々の行列の rank（ランク・階数）を求めよ.

1) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 3 & 5 & -1 \\ 2 & -2 & 5 \end{pmatrix}$　　2) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 3 & 2 & -3 \\ 6 & -4 & 3 \end{pmatrix}$

問 3.3. $x_1, \ldots, x_n$ に関する実数を係数とする連立一次方程式

$$(*) \qquad \begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = c_1, \\ \quad\vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = c_m \end{cases} \qquad (a_{ij}, c_i \in \mathbb{R})$$

が与えられたとし，これを複素数ベクトル $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n$ に関する方程式とみなす.

1) $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n$ が方程式 $(*)$ の $\mathbb{C}^n$ における解であったとすると，$\mathrm{re}\, v \in \mathbb{R}^n$ も方程式 $(*)$ の解であり，一方，$\mathrm{im}\, v \in \mathbb{R}^n$ は連立一次方程式

$$(**) \qquad \begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ \quad\vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

の解であることを示せ．なお，方程式 $(**)$ を方程式 $(*)$ に随伴する斉次方程式と呼ぶ.

2) $(*)$ において $\begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix} \neq 0$ であるとする．このとき，$(*)$ が $\mathbb{C}^n$ において解を持つことと，$\mathbb{R}^n$ において解を持つことは同値であることを示せ．

3) $(*)$ において $\begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix} = 0$ であるとする（つまり元々斉次方程式であると仮定する）．零ベクトル $\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n (\subset \mathbb{C}^n)$ は明らかに解であるが，これを自明な解と呼ぶ．$(*)$ が $\mathbb{C}^n$ において非自明な解を持つことと，$\mathbb{R}^n$ において非自明な解を持つことは同値であることを示せ．
ヒント：おおよその所は 2) と同様であるが，$\mathbb{C}^n$ における解の成分がすべて純虚数なこともあり得る．

問 3.4. $A \in M_{m,n}(K)$，$v = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in K^n$，$c = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix} \in K^m$ とし，行列を用いて

$$(*) \qquad Av = c$$

と表される $x_1, \ldots, x_n \in K$ に関する連立一次方程式を考える．これにさらに方程式

$$a_{m+1,1}x_1 + \cdots + a_{m+1,n}x_n = c_{m+1}$$

を付け加えて得られる連立一次方程式を考え，$(**)$ で表す．

1) $m = n$ とし，$A \in \mathrm{GL}_n(K)$ とする．すると方程式 $(*)$ は唯一の解 $v = A^{-1}c$ を持つ．このとき，方程式 $(**)$ が解をもつことと，$y_1, \cdots, y_n$ に関する連立一次方程式

$$\begin{pmatrix} {}^tA \\ {}^tc \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{n+1,1} \\ \vdots \\ a_{n+1,n} \\ c_{n+1} \end{pmatrix}$$

が解を持つことは同値であることを示せ．
ヒント：新しい方程式は $\begin{pmatrix} & A & \\ a_{n+1,1} & \cdots & a_{n+1,n} \end{pmatrix} v = \begin{pmatrix} c \\ c_{n+1} \end{pmatrix}$ で与えられる．一方，最後の条件を

$$(y_1 \ \cdots \ y_n)(A \ c) = (a_{n+1,1} \ \cdots \ a_{n+1,n} \ c_{n+1})$$

に書き換え（どのように？），組み合わせてみよ．

2) 1) の条件が成り立つとする．このとき，行列 $\begin{pmatrix} & A & & c \\ a_{n+1,1} & \cdots & a_{n+1,n} & c_{n+1} \end{pmatrix}$ を

左基本変形することにより $\begin{pmatrix} & A & & c \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$ とすることができることを示せ.

3) 必ずしも $m = n$ とは限らない状況を考える．方程式 $(*)$，$(**)$ の解空間（解全体のなす集合）をそれぞれ V, W とする．また，$V \neq \varnothing$ であるとする．このとき，$V = W$ であることと，行列

$$\begin{pmatrix} & A & & c \\ a_{m+1,1} & \cdots & a_{m+1,n} & c_{m+1} \end{pmatrix}$$

を左基本変形することにより $\begin{pmatrix} & A & & c \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$ とすることができることは同値であることを示せ.

問 3.5. $x_1, \ldots, x_n$ に関する K の元を係数とする連立一次方程式

$$(*) \qquad \begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = c_1, \\ \qquad\vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = c_m \end{cases} \qquad (a_{ij}, c_i \in K)$$

が与えられたとし，これを数ベクトル $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in K^n$ に関する方程式とみなす．また，$w = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix}$ として，V_w を $(*)$ の解空間とする．

1) $v_1 \in V_{w_1}$，$v_2 \in V_{w_2}$ であれば $v_1 + v_2 \in V_{w_1+w_2}$ が成り立つことを示せ.
2) $V_w \neq \varnothing$ であることと $(*)$ が解を持つことは同値であることを示せ.
3) $v \in V_w$ を一つ固定する．$T_v\colon V_w \to V_0$ を $T_v(u) = u - v$ により定めると，確かに $T_v(u) \in V_0$ であって，更に T_v は全単射であることを示せ.

（以上）

数学 II 演習　足助太郎教官　第 3 回　解答

問 3.1.

1)

$$\begin{pmatrix}2&1&3&0\\1&-1&5&-5\\0&4&6&-2\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{入れ替える}]{\text{第 1 行と第 2 行を}}\begin{pmatrix}1&-1&5&-5\\2&1&3&0\\0&4&6&-2\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 1 列を掃き出す}]{\text{(1,1) 成分を要として}}$$
$$\begin{pmatrix}1&-1&5&-5\\0&3&-7&10\\0&4&6&-2\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{1/2 倍する}]{\text{第 3 行を}}\begin{pmatrix}1&-1&5&-5\\0&3&-7&10\\0&2&3&-1\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 3 行の }(-1)\text{ 倍を加える}]{\text{第 2 行から}}$$
$$\begin{pmatrix}1&-1&5&-5\\0&1&10&11\\0&2&3&-1\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 2 列を掃き出す}]{\text{(2,2) 成分を要として}}\begin{pmatrix}1&0&-5&6\\0&1&-10&11\\0&0&23&-23\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 3 列を掃き出す}]{\text{(3,3) 成分を要として}}\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&1\\0&0&1&-1\end{pmatrix}.$$

従って求める解は $x=1, y=1, z=-1$.

2)

$$\begin{pmatrix}-1&5&2&4&-8\\6&3&2&8&-3\\1&4&-1&1&-5\\2&7&5&-5&5\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 1 列を掃き出す}]{\text{(1,1) 成分を要として}}\begin{pmatrix}1&-5&-2&-4&8\\0&33&14&32&-51\\0&9&1&5&-13\\0&17&9&3&-11\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 4 行の }(-2)\text{ 倍を加える}]{\text{第 2 行に}}$$
$$\begin{pmatrix}1&-5&-2&-4&8\\0&-1&-4&26&-29\\0&9&1&5&-13\\0&17&9&3&-11\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 3 行の }(-2)\text{ 倍を加える}]{\text{第 4 行に}}\begin{pmatrix}1&-5&-2&-4&8\\0&-1&-4&26&-29\\0&9&1&5&-13\\0&-1&7&-7&15\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 2 列を掃き出す}]{\text{(2,2) 成分を要として}}$$
$$\begin{pmatrix}1&0&18&-134&153\\0&1&4&-26&29\\0&0&-35&239&-274\\0&0&11&-33&44\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{入れ替える}]{\text{第 3 行と第 4 行を}}\begin{pmatrix}1&0&18&-134&153\\0&1&4&-26&29\\0&0&11&-33&44\\0&0&-35&239&-274\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 3 列を掃き出す}]{\text{(3,3) 成分を要として}}$$
$$\begin{pmatrix}1&0&0&-80&81\\0&1&0&-14&13\\0&0&1&-3&4\\0&0&0&134&-134\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 4 列を掃き出す}]{\text{(4,4) 成分を要として}}\begin{pmatrix}1&0&0&0&1\\0&1&0&0&-1\\0&0&1&0&1\\0&0&0&1&-1\end{pmatrix}.$$

従って求める解は $x=1, y=-1, z=1, w=1$.

3)

$$\begin{pmatrix}2&-1&-2&-2&-4\\-1&1&3&2&3\\1&1&5&2&b\\2&1&6&a&0\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{入れ替える}]{\text{第 1 行と第 2 行を}}\begin{pmatrix}-1&1&3&2&3\\2&-1&-2&-2&-4\\1&1&5&2&b\\2&1&6&a&0\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 1 列を掃き出す}]{\text{(1,1) 成分を要として}}$$
$$\begin{pmatrix}1&-1&-3&-2&-3\\0&1&4&2&2\\0&2&8&4&b+3\\0&3&12&a+4&6\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 2 列を掃き出す}]{\text{(2,2) 成分を要として}}\begin{pmatrix}1&0&1&0&-1\\0&1&4&2&2\\0&0&0&0&b+1\\0&0&0&a-2&0\end{pmatrix}.$$

従って $b+1\neq 0$ 即ち $b\neq -1$ のとき解は存在しない. 以下 $b=-1$ とする.

$a-2=0$ 即ち $a=2$ のとき, 求める解は α, β を任意定数として $x=-1-\alpha, y=2-4\alpha-2\beta, z=\alpha, w=\beta$.

$a\neq 2$ のとき, さらに掃き出しを行って,

$$\begin{pmatrix}1&0&1&0&-1\\0&1&4&2&2\\0&0&0&0&0\\0&0&0&a-2&0\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{入れ替える}]{\text{第 3 行と第 4 行を}}\begin{pmatrix}1&0&1&0&-1\\0&1&4&2&2\\0&0&0&a-2&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 4 列を掃き出す}]{\text{(3,4) 成分を要として}}$$
$$\begin{pmatrix}1&0&1&0&-1\\0&1&4&0&2\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

従って求める解は, α を任意定数として $x=-1-\alpha, y=2-4\alpha, z=\alpha, w=0.$

以上をまとめると,

$b\neq -1$ のとき, 解なし.

$b=-1, a=2$ のとき, $x=-1-\alpha, y=2-4\alpha-2\beta, z=\alpha, w=\beta$（$\alpha,\beta$ は任意定数）

$b=-1, a\neq 2$ のとき, $x=-1-\alpha, y=2-4\alpha, z=\alpha, w=0$（$\alpha$ は任意定数）.

問 3.2.

1)

$$\begin{pmatrix}2&-1&4&1&0&0\\3&5&-1&0&1&0\\2&-2&5&0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 1 行を引く}]{\text{第 3 行から}}\begin{pmatrix}2&-1&4&1&0&0\\3&5&-1&0&1&0\\0&-1&1&-1&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 2 行を引く}]{\text{第 1 行から}}$$
$$\begin{pmatrix}-1&-6&5&1&-1&0\\3&5&-1&0&1&0\\0&-1&1&-1&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 1 列を掃き出す}]{\text{(1,1) 成分を要として}}\begin{pmatrix}1&6&-5&-1&1&0\\0&-13&14&3&-2&0\\0&-1&1&-1&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{入れ替える}]{\text{第 2 行と第 3 行を}}$$
$$\begin{pmatrix}1&6&-5&-1&1&0\\0&-1&1&-1&0&1\\0&-13&14&3&-2&0\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 2 列を掃き出す}]{\text{(2,2) 成分を要として}}\begin{pmatrix}1&0&1&-7&1&6\\0&-1&1&-1&0&-1\\0&0&1&16&-2&-15\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 3 列を掃き出す}]{\text{(3,3) 成分を要として}}$$
$$\begin{pmatrix}1&0&0&-23&3&21\\0&1&0&17&-2&-16\\0&0&1&16&-2&-15\end{pmatrix}.$$

従って逆行列は $\begin{pmatrix}-23&3&21\\17&-2&-16\\16&-2&-15\end{pmatrix}$ で, rank は 3 である.

2)

$$\begin{pmatrix}1&-2&2&1&0&0\\3&2&-3&0&1&0\\6&-4&3&0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 2 行の 2 倍を引く}]{\text{第 3 行から}}\begin{pmatrix}1&-2&2&1&0&0\\3&2&-3&0&1&0\\0&-8&9&0&-2&1\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 1 列を掃き出す}]{\text{(1,1) 成分を要として}}$$
$$\begin{pmatrix}1&-2&2&1&0&0\\0&8&-9&-3&1&0\\0&-8&9&0&-2&1\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 2 行を加える}]{\text{第 3 行に}}\begin{pmatrix}1&-2&2&1&0&0\\0&8&-9&-3&1&0\\0&0&0&-3&-1&1\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 2 列を掃き出す}]{\text{(2,2) 成分を要として}}$$
$$\begin{pmatrix}1&0&-1/4&1/4&1/4&0\\0&1&-9/8&-3/8&1/8&0\\0&0&0&-3&-1&1\end{pmatrix}.$$

従って逆行列は存在せず, rank は 2 である.

問 3.3.

1) $A = (a_{ij}), c = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix}$ とすると,

$Av = A\,\mathrm{re}\,v + \sqrt{-1}\,A\,\mathrm{im}\,v = c \in \mathbb{R}^m$

両辺の実部と虚部を比較して

$A\,\mathrm{re}\,v = c,\ A\,\mathrm{im}\,v = 0$

を得る. 従って $\mathrm{re}\,v \in \mathbb{R}^n$ は方程式 $(*)$ の解であり, $\mathrm{im}\,v \in \mathbb{R}^n$ は方程式 $(**)$ の解である. □

2) $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{C}^n$ であるから,「$\mathbb{R}^n$で解を持つ $\Rightarrow$ $\mathbb{C}^n$で解を持つ」は明らか.

また, 1) より, $v \in \mathbb{C}^n$ が解であるならば $\mathrm{re}\,v \in \mathbb{R}^n$ も解であるから, $\mathbb{C}^n$で解を持つ $\Rightarrow$ $\mathbb{R}^n$で解を持つ.

従って, $(*)$ が $\mathbb{C}^n$ において解を持つことと, $\mathbb{R}^n$ において解を持つことは同値である. □

3) 2) と同様の議論により $\mathbb{R}^n$で解を持つ $\Rightarrow$ $\mathbb{C}^n$で解を持つ .

また, $v \in \mathbb{C}^n$ が $(*)$ の非自明な解であるとすると,

$\mathrm{im}\,v = 0$ ならば, $v \in \mathbb{R}^n$ である.

$\mathrm{im}\,v \neq 0$ のとき, 1) により $\mathrm{im}\,v \in \mathbb{R}^n$ は $(**)$ の解である.

ところで方程式 $(**)$ は, $c = 0$ のときにおける方程式 $(*)$ に他ならない. 故に $\mathrm{im}\,v \in \mathbb{R}^n$ も非自明な解である.

従って, $(*)$ が $\mathbb{C}^n$ において非自明な解を持つことと, $\mathbb{R}^n$ において非自明な解を持つことは同値である. □

問 3.4.

1) 新しい方程式は $\begin{pmatrix} A \\ a_{n+1,1} \cdots a_{n+1,n} \end{pmatrix} v = \begin{pmatrix} c \\ c_{n+1} \end{pmatrix}$ で与えられる.

これが解を持つとき, $Av = c$,$A \in \mathrm{GL}_n(K)$ より $v = A^{-1}c$ であるから,

$\left(a_{n+1,1} \cdots a_{n+1,n}\right)\left(A^{-1}c\right) = c_{n+1}$

である. 従って,

$$\begin{aligned} & \left(a_{n+1,1} \cdots a_{n+1,n}\right)\left(E \quad A^{-1}c\right) = \left(a_{n+1,1} \cdots a_{n+1,n} \quad c_{n+1}\right) \\ \Leftrightarrow\ & \left(a_{n+1,1} \cdots a_{n+1,n}\right) A^{-1}\left\{A\left(E \quad A^{-1}c\right)\right\} = \left(a_{n+1,1} \cdots a_{n+1,n} \quad c_{n+1}\right) \\ \Leftrightarrow\ & \left(a_{n+1,1} \cdots a_{n+1,n}\right) A^{-1}\left(A \quad c\right) = \left(a_{n+1,1} \cdots a_{n+1,n} \quad c_{n+1}\right) \end{aligned}$$

ここで $\left(a_{n+1,1} \cdots a_{n+1,n}\right) A^{-1} = \left(y_1 \cdots y_n\right)$ とおけば,

$\left(y_1 \cdots y_n\right)\left(A \quad c\right) = \left(a_{n+1,1} \cdots a_{n+1,n} \quad c_{n+1}\right)$

ここで両辺の転置行列をとると,

$\begin{pmatrix} {}^tA \\ {}^tc \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{n+1,1} \\ \vdots \\ a_{n+1,n} \\ c_{n+1} \end{pmatrix}$

以上により, 方程式 $(**)$ が解を持つことと, $\left(y_1 \cdots y_n\right)$ が存在することは同値である. □

2) 1) により

$\begin{pmatrix}y_1 \cdots y_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A & c\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a_{n+1,1} \cdots a_{n+1,n} & c_{n+1}\end{pmatrix}$

であるから,

$\begin{pmatrix} A & c \\ a_{n+1,1} \cdots a_{n+1,n} & c_{n+1}\end{pmatrix}$

の第 $n+1$ 行から第 i 行の y_i 倍 $(i = 1, 2, \ldots, n)$ を引くことにより,（これは左基本変形である）

$\begin{pmatrix} A & c \\ 0 \cdots 0 & 0\end{pmatrix}$ とすることができる. □

3) 方程式 $(*)$ は $\begin{pmatrix} A \\ 0 \cdots 0\end{pmatrix} v = \begin{pmatrix} c \\ 0\end{pmatrix}$ と同値である.

従って, $(**)$ の拡大係数行列 $\begin{pmatrix} A & c \\ a_{m+1,1} \cdots a_{m+1,n} & c_{m+1}\end{pmatrix}$ に左基本変形を施すことにより

$\begin{pmatrix} A & c \\ 0 \cdots 0 & 0\end{pmatrix}$ を得られたとすると, 左基本変形により解空間は変化しないので $V = W$ である.

逆に $V = W$ であるならば, $X = \begin{pmatrix} A & c \\ a_{m+1,1} \cdots a_{m+1,n} & c_{m+1}\end{pmatrix}$ を左基本変形して得られる階段行列 X' と $Y = \begin{pmatrix} A & c \\ 0 \cdots 0 & 0\end{pmatrix}$ を左基本変形して得られる階段行列 Y' を等しくすることができる. 即ち, ある基本行列の積 $P, Q \in \mathrm{GL}_{m+1}(K)$ を用いて $X' = PX = QY = Y'$ とすることができる. このとき $Q^{-1}PX = Y$ と変形でき, $Q^{-1}P$ は基本行列の積であるから, X を左基本変形することにより Y を得る.

従って, $V = W$ であることと, X を左基本変形することにより Y とすることができることは同値である. □

問 3.5.

1) $w_1 = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_m\end{pmatrix}, w_2 = \begin{pmatrix} c'_1 \\ \vdots \\ c'_m\end{pmatrix}$ のとき, 「$v_1 \in V_{w_1}, v_2 \in V_{w_2} \Rightarrow v_1 + v_2 \in V_{w_1,w_2}$」を示す.

$v_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n\end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n\end{pmatrix}$ として,

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = c_1 \\ \qquad\vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = c_m \end{cases} \qquad \cdots (1)$$

$$\begin{cases} a_{11}x'_1 + \cdots + a_{1n}x'_n = c'_1 \\ \qquad\vdots \\ a_{m1}x'_1 + \cdots + a_{mn}x'_n = c'_m \end{cases} \qquad \cdots (2)$$

$(1) + (2)$ より

$$\begin{cases} a_{11}(x_1 + x'_1) + \cdots + a_{1n}(x_n + x'_n) = c_1 + c'_1 \\ \qquad\vdots \\ a_{m1}(x_1 + x'_1) + \cdots + a_{mn}(x_n + x'_n) = c_m + c'_m \end{cases} \qquad \cdots (2)$$

$\therefore v_1 + v_2 \in V_{w_1,w_2}$. □

2) $V_w \neq \varnothing$ ならば, $v \in V_w$ なる v が存在し, V_w は $(*)$ の解空間であったから, v は $(*)$ の解である.

逆に $(*)$ がある解 $v \in K^n$ を持ったとすると, v は V_w の要素であるから $V_w \neq \varnothing$. よって示された. □

3) $v \in V_w$ から, $v = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ とおくと,

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = c_1 \\ \qquad\quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = c_m \end{cases} \qquad \cdots(3)$$

また, $u = \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$ とすると, $T_v(u)$ は,

$$\begin{cases} a_{11}x'_1 + \cdots + a_{1n}x'_n = c_1 \\ \qquad\quad \vdots \\ a_{m1}x'_1 + \cdots + a_{mn}x'_n = c_m \end{cases} \qquad \cdots(4)$$

(3)(4) より,

$$\begin{cases} a_{11}(x_1 - x'_1) + \cdots + a_{1n}(x_n - x'_n) = 0 \\ \qquad\quad \vdots \\ a_{m1}(x_1 - x'_1) + \cdots + a_{mn}(x_n - x'_n) = 0 \end{cases} \qquad \cdots(2)$$

より, たしかに $T_v(u) \in V_0$ である.

また, 任意の $v_0 \in V_0$ に対し $u = v + v_0$ とすると, 1) により $v + v_0 \in V_{w+0} = V_w$ であって, $T_v(u) = (v + v_0) - v = v_0$ となるから $T_v(u)$ は全射. さらに, 任意の $u_1, u_2 \in V_w$ に対して $T_v(u_1) = T_v(u_2) \Rightarrow u_1 - v = u_2 - v \Leftrightarrow u_1 = u_2$ が成り立つので $T_v(u)$ は単射. 従って $T_v(u)$ は全単射である. $\square$

２００９年度数学II演習（理I向け）　第4回　　'09/6/1（月）４限
'09/6/2（火）４限

以下では特に断らなければ K は $\mathbb{R}$ あるいは $\mathbb{C}$ を表す.

問 4.1. 以下の方程式はいずれも $x_1, \cdots, x_n$ に関する方程式である．それぞれの解空間を $\{v \in K^n \mid v = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_s v_s + d\}$ のように表せ.

1) $n = 8$.
$$\begin{cases} x_2 + 3x_4 + x_7 + 3x_8 = 0, \\ x_3 + 2x_4 + x_6 - x_8 = 0, \\ x_5 + 2x_6 + x_8 = 0. \end{cases}$$

2) $n = 5$.
$$\begin{cases} x_1 + \sqrt{-1}x_3 + x_5 = 0, \\ x_2 - 2x_3 = 0, \\ x_4 - 3\sqrt{-1}x_5 = 0. \end{cases}$$

3) $n = 8$.
$$\begin{cases} x_2 + 3x_4 + x_7 + 3x_8 = 4, \\ x_3 + 2x_4 + x_6 - x_8 = -6, \\ x_5 + 2x_6 + x_8 = 2. \end{cases}$$

4) $n = 5$.
$$\begin{cases} x_1 + \sqrt{-1}x_3 + x_5 = 0, \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + \sqrt{-1}x_4 = 0, \\ \sqrt{-1}x_2 - (3 - 2\sqrt{-1})x_3 + x_4 - \sqrt{-1}x_5 = 0. \end{cases}$$

問 4.2. 次の行列はいずれも正則である．各々の行列について，i) 逆行列を求め，ii) 基本行列の積として表し，iii) 行列式を求めよ．なお，作業の仕方によっては必ずしも i) ii) iii) の順序で解けるわけではないことに留意せよ.

1) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$　2) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 4 \\ -2 & 3 & 10 \end{pmatrix}$　3) $\begin{pmatrix} \sqrt{-1} & 2 - \sqrt{-1} & -1 \\ 1 & 3 & 4 \\ 2 & -4 - 3\sqrt{-1} & -1 + 4\sqrt{-1} \end{pmatrix}$

問 4.3. 以下の行列の各々について, その行列式と逆行列を求めよ.

1) $\begin{pmatrix} 5 & 2 & 5 \\ -4 & 1 & -6 \\ -2 & 3 & -5 \end{pmatrix}$　2) $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 5 \\ 1 & -4 & -6 \\ 3 & -2 & -5 \end{pmatrix}$　3) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -6 \\ 0 & 0 & 3 & -2 & -5 \end{pmatrix}$

問 4.4. V, W を集合とし，$f\colon V \to W$ を写像とする.

1) 命題　$v_1, v_2 \in V$ について,「$f(v_1) = f(v_2)$ が成り立てば $v_1 = v_2$ が成り立つ」の「　」の部分を論理記号（$\forall$, $\exists$ $\Rightarrow$ 等）を用いて表せ.
2) 命題　「任意の $w \in W$ についてある $v \in V$ が存在して $w = f(v)$ が成り立つ」を論理記号を用いて表せ.

3) 「f が単射でない」ことと「f が全射でない」ことをそれぞれ論理記号を用いて表せ.

4) 次のような $f\colon V \to W$ の例を挙げよ.

(a) f は単射であるが全射でない.

(b) f は全射であるが単射でない.

(c) f は単射でも全射でもない.

(d) f は全単射である.

5) $f\colon V \to W$ であって，上の4つのいずれの場合にも属さないものがあればそのような例を挙げ，存在しないのであればそのことを示せ.

問 4.5. 次の連立一次方程式をクラメルの公式を用いる方法と，掃き出しを用いる方法の二通りで解け.

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 7x_3 = -1, \\ 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 2, \\ 5x_1 + 10x_2 + 16x_3 = 4 \end{cases}$$

問 4.6. $A \in M_{m,n}(K)$, $B \in M_{n,m}(K)$ とする.

1) $AB = E_m$ が成り立つが $BA = E_n$ は成り立たないような A, B の例を挙げよ.

2) $n = m$，$r < n$ とし，$\widetilde{E_r} \in M_n(K)$ を $\widetilde{E_r} = \begin{pmatrix} E_r & O_{r,n-r} \\ O_{n-r,r} & O_{n-r,n-r} \end{pmatrix}$ により定める. $AB = \widetilde{E_r}$ が成り立つが $BA = \widetilde{E_r}$ は成り立たないような A, B の例を挙げよ.

問 4.7. $\mathbb{R}[t] = \{$ 実数を係数とする t に関する多項式 $\}$ とする. $f \in \mathbb{R}[t]$ の時（f は t に関する多項式である），多項式 $\varphi(f) \in \mathbb{R}[t]$ を $\varphi(f)(t) = tf(t)$ により定める. $f(t) = 1 + t$ であれば $\varphi(f)(t) = t + t^2$ である. また，$f \in \mathbb{R}[t]$ の時，$\psi(f) \in \mathbb{R}[t]$ を $\psi(f)(t) = \dfrac{f(t) - f(0)}{t}$ により定める. $f(t) = 1 + 2t$ であれば $\psi(f)(t) = 2$ である.

1) 任意の $f \in \mathbb{R}[t]$ について $\psi(\varphi(f)) = f$ が成り立つことを示せ.

2) $\varphi(\psi(f)) = f$ は必ずしも成り立たないことを示せ.

問 4.8. $\mathbb{R}_n[t]$ を高々 n 次の，実数を係数とする t に関する多項式全体のなす集合とする. $\mathbb{R}_n[t] \subset \mathbb{R}[t]$ である. $\psi\colon \mathbb{R}_n[t] \to \mathbb{R}_n[t]$ を問 4.7 と同様に定める. $A \in M_{n+1}(\mathbb{R})$ であって，任意の $f \in \mathbb{R}_n[t]$，ただし $f(t) = a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n$，について

$$\begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

により $b_0, \ldots, b_n$ を定めると，$\psi(f) = b_0 + b_1 t + \cdots + b_n t^n$ が成り立つようなものを求めよ. また，このような性質を持つ A はただ一つであることを示せ.

問 4.7 の結論は主張「$A, B \in M_n(K)$ が $AB = E_n$ を充たせば $BA = E_n$ が成り立つ」は n が有限の値でないと成り立たないことを示している．このことは直感的には次のように説明できる（数学的に厳密な説明ではない）．$\mathbb{R}[\,t\,]$ の元を係数だけ抜き出すと，例えば $1+t$ には $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$, $1+2t-3t^2$ には $\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix}$ といったように列ベクトルを対応させることができる．ただし，いくらでも次数の高い多項式が存在するから，実際にはサイズを揃えるために $\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\\\vdots\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1\\2\\-3\\0\\\vdots\end{pmatrix}$ などと，無限個の成分を用意しておく必要がある．ここで，φ と ψ を問 4.8 を真似て行列で表してみる．すると，サイズが無限大になってしまうので本当のところはよく分からないが，φ, ψ はそれぞれ

$$\begin{pmatrix} 0 & & & & \\ 1 & 0 & & & \\ 0 & 1 & 0 & & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & & & & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \\ \vdots & \vdots & & & & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

で表される（ような気がする）．これらの「行列」をそれぞれ A, B とすると

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & & & & \\ 0 & 1 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

なのでいかにも単位行列のようであるが，一方，

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 & & & & \\ 0 & 1 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

となり，これはいかにも単位行列ではなさそうである．これらのことは後日扱う「線型空間」「線型写像」などの概念を用いれば正確に述べることができる．

（以上）

数学 II 演習　足助太郎教官　第 4 回　解答

問 4.1.

1) 与方程式の拡大係数行列は $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

よって求める解空間は

$$\left\{ v \in K^8 \;\middle|\; \exists \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5 \in K, v = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_4 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_5 \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

2) 与方程式の拡大係数行列は $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \sqrt{-1} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3\sqrt{-1} & 0 \end{pmatrix}$.

よって求める解空間は

$$\left\{ v \in K^5 \;\middle|\; \exists \lambda_1, \lambda_2 \in K, v = \lambda_1 \begin{pmatrix} \sqrt{-1} \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 3\sqrt{-1} \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

3) 与方程式の拡大係数行列は $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & -1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

よって求める解空間は

$$\left\{ v \in K^8 \;\middle|\; \exists \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5 \in K, v = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_4 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_5 \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -6 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

4) 与方程式の拡大係数行列を掃き出して,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \sqrt{-1} & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & \sqrt{-1} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{-1} & -(3-2\sqrt{-1}) & 1 & \sqrt{-1} & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & \sqrt{-1} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2-\sqrt{-1} & \sqrt{-1} & -1 & 0 \\ 0 & \sqrt{-1} & -(3-2\sqrt{-1}) & 1 & \sqrt{-1} & 0 \end{pmatrix} \to$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \sqrt{-1} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2+\sqrt{-1} & -\sqrt{-1} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\sqrt{-1} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

よって求める解空間は

$$\left\{ v \in K^5 \;\middle|\; \exists \lambda_1, \lambda_2 \in K, v = \lambda_1 \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{-1} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

問 4.2.

1) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{(1)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \underset{(2)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & -2 \end{pmatrix} \underset{(3)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2/3 & -4/3 \\ 0 & 1 & -1/3 & 2/3 \end{pmatrix}.$

ただし, (1) から (3) はそれぞれ以下の操作を表す.

(1) 第 1 行と第 2 行を入れ替える

(2) (1,1) 成分を要として第 1 列を掃き出す

(3) (2,2) 成分を要として第 2 列を掃き出す

i) 上の結果より, 逆行列は $\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

ii) (1) から (3) の逆変形を基本行列の積で表せばよいから,

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

iii) 積の行列式は, 行列式の積に等しいから,

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = (-1)\cdot 1\cdot(-3)\cdot 1 = 3.$$

2) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 10 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{(1)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 10 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{(2)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & -13 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 7 & 18 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \underset{(3)}{\longrightarrow}$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 3 & -5 & 2 \\ 0 & 7 & 18 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \underset{(4)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 6 & -9 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & -3 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & -3 & 21 & -33 & 15 \end{pmatrix} \underset{(5)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -8 & 13 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & 18 & -28 & 13 \\ 0 & 0 & 1 & -7 & 11 & -5 \end{pmatrix}.$

ただし, (1) から (5) はそれぞれ以下の操作を表す.

(1) 第 1 行と第 2 行を入れ替える

(2) (1,1) 成分を要として第 1 列を掃き出す

(3) 第 2 行を 3 倍したものに, 第 3 列の 2 倍を加える

(4) (2,2) 成分を要として第 2 列を掃き出す

(5) (3,3) 成分を要として第 1 列を掃き出す

i) 上の結果より, 逆行列は $\begin{pmatrix} -8 & 13 & -6 \\ 18 & -28 & 13 \\ -7 & 11 & -5 \end{pmatrix}$.

ii) (1) から (5) の逆変形を基本行列の積で表せばよいから,

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 4 \\ -2 & 3 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

iii) 1) と同様にして, （行列式の値が 1 となるものを無視すると）

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 4 \\ -2 & 3 & 10 \end{vmatrix} = (-1)\cdot\frac{1}{3}\cdot(-1)\cdot(-3) = -1.$$

3) $i=\sqrt{-1}$ とする.

$$\begin{pmatrix} i & 2-i & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -4-3i & -1+4i & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[(1)]{} \begin{pmatrix} 1 & -1-2i & i & i & -i & 0 \\ 0 & 4+2i & 4-i & i & 1 & 0 \\ 0 & -2+i & -1+2i & 2i & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[(2)]{}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & (19+18i)/10 & (-3-6i)/10 & (4+3i)/10 & 0 \\ 0 & 1 & (7-6i)/10 & (1+2i)/10 & (2-i)/10 & 0 \\ 0 & 0 & (-2+i)/10 & (4+23i)/10 & (3-4i)/10 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[(3)]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -24+13i & 6+2i & 4+11i \\ 0 & 1 & 0 & 4+9i & 1-2i & 5-i \\ 0 & 0 & 1 & 3-10i & -2+i & -4-2i \end{pmatrix}.$$

ただし, (1) から (3) はそれぞれ以下の操作を表す.

(1) (1,1) 成分を要として第 1 列を掃き出す

(2) (2,2) 成分を要として第 2 列を掃き出す

(3) (3,3) 成分を要として第 1 列を掃き出す

i) 上の結果より, 逆行列は $\begin{pmatrix} -24+13i & 6+2i & 4+11i \\ 4+9i & 1-2i & 5-i \\ 3-10i & -2+i & -4-2i \end{pmatrix}$

ii) (1) から (3) の逆変形を基本行列の積で表せばよいから,

$$\begin{pmatrix} i & 2-i & -1 \\ 1 & 3 & 4 \\ 2 & -4-3i & -1+4i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4+2i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2+i & 1 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & -1-2i & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (-2+i)/10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & (19+18i)/10 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & (7-6i)/10 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

iii) 上と同様にして

$$\begin{vmatrix} i & 2-i & -1 \\ 1 & 3 & 4 \\ 2 & -4-3i & -1+4i \end{vmatrix} = (-i)\cdot(4+2i)\cdot\frac{-2+i}{10} = -i.$$

編注：複素行列はある程度諦めましょう. あまり工夫する術は無い気がします. なお, この問いの出題意図と思われるものに沿って解きましたが, 行列式は普通に余因子展開やサラスの公式で求めてよいと思います.

問 4.3.

1) $$\begin{pmatrix} 5 & 2 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & -6 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[(1)]{} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ -4 & 1 & -6 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[(2)]{} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 13 & -10 & 4 & 5 & 0 \\ 0 & 9 & -7 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[(3)]{}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & 4 & -3 \\ 0 & 9 & -7 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[(4)]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 7 & 13 & 9 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 20 & 38 & -26 \end{pmatrix} \xrightarrow[(5)]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -13 & -25 & 17 \\ 0 & 1 & 0 & 8 & 15 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & 10 & 19 & -13 \end{pmatrix}.$$

ただし, (1) から (5) はそれぞれ以下の操作を表す.

(1) 第 1 行に第 2 行を加える

(2) (1,1) 成分を要として第 1 列を掃き出す

(3) 第 2 行を 2 倍したものに, 第 3 列の 3 倍を加える

(4) (2,2) 成分を要として第 2 列を掃き出す

(5) (3,3) 成分を要として第 1 列を掃き出す

従って逆行列は $\begin{pmatrix} -13 & -25 & 17 \\ 8 & 15 & -10 \\ 10 & 19 & -13 \end{pmatrix}$ である.

また, 変形の過程より,

$$\begin{vmatrix} 5 & 2 & 5 \\ -4 & 1 & -6 \\ -2 & 3 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 13 & -10 \\ 0 & 9 & -7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 13 & -10 \\ 9 & -7 \end{vmatrix} = 13 \cdot (-7) - (-10) \cdot 9 = -1.$$

2) $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 5 \\ 1 & -4 & -6 \\ 3 & -2 & 5 \end{pmatrix}$ は $\begin{pmatrix} 5 & 2 & 5 \\ -4 & 1 & -6 \\ -2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ の第 1 列と第 2 列を入れ替えたものであるから, その逆行列は

$\begin{pmatrix} 5 & 2 & 5 \\ -4 & 1 & -6 \\ -2 & 3 & 5 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -13 & -25 & 17 \\ 8 & 15 & -10 \\ 10 & 19 & -13 \end{pmatrix}$ の第 1 行と第 2 行を入れ替えて $\begin{pmatrix} 8 & 15 & -10 \\ -13 & -25 & 17 \\ 10 & 19 & -13 \end{pmatrix}$.

また, 行列式の列に関する交代性より,

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 & 5 \\ 1 & -4 & -6 \\ 3 & -2 & 5 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 5 & 2 & 5 \\ -4 & 1 & -6 \\ -2 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 1.$$

3) A, B を正方行列とするとき, $\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & O \\ O & B^{-1} \end{pmatrix}, \begin{vmatrix} A & O \\ O & B \end{vmatrix} = |A||B|$ である.

従って, $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$ および 2) より,

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -6 \\ 0 & 0 & 3 & -2 & 5 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 15 & -10 \\ 0 & 0 & -13 & -25 & 17 \\ 0 & 0 & 10 & 19 & -13 \end{pmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -6 \\ 0 & 0 & 3 & -2 & 5 \end{vmatrix} = 1.$$

編註：ここで使った事実は, 例えば「線型代数入門」（東京大学出版会）の p.42-43,p.83 を参照.

問 4.4.

1) $f(v_1) = f(v_2) \Rightarrow v_1 = v_2$

2) $\forall w \in W, \exists v_1, v_2 \in V\ (w = f(v))$

3) 「f が単射でない」$\exists v_1, v_2 \in V\ (f(v_1) = f(v_2), v_1 \neq v_2)$
「f が全射でない」$\exists w \in W, \forall v \in V\ (w \neq f(v))$

4) 例えば以下のようなものがある.

(a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \mathrm{Arctan}\, x$,

(b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^3 - x$,

(c) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \sin x$,

(d) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x$.

編註：$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ の写像で統一してみましたが, 例えば (a) は $\mathbb{N} \to \mathbb{N}, f(x) = 2x$ などでも全く問題なく, むしろこっちのほうが簡潔で良い気がします.

5) 「f が全単射である」とは, 「f が全射かつ単射である」ことである. また f は単射であるか無いかのいずれかであり, かつ全射であるか無いかのいずれかであるから, f は必ず (a) から (d) のいずれかに属する. □

問 4.5.

クラメルの公式を用いて求める.

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 2 & 4 & 6 \\ 5 & 10 & 16 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 0 & -2 & -8 \\ 0 & -5 & -19 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -8 \\ -5 & -19 \end{pmatrix} = (-2)\cdot(-19) - (-8)\cdot(-5) = -2,$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 3 & 7 \\ 2 & 4 & 6 \\ 4 & 10 & 16 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -3 & -7 \\ 0 & 10 & 20 \\ 0 & 22 & 44 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 20 \\ 22 & 44 \end{pmatrix} = 10\cdot 44 - 20\cdot 22 = 0,$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 7 \\ 2 & 2 & 6 \\ 5 & 4 & 16 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 7 \\ 0 & 4 & -8 \\ 0 & 9 & -19 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -8 \\ 9 & -19 \end{pmatrix} = 4\cdot(-19) - (-8)\cdot 9 = -4,$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 5 & 10 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 4 \\ 0 & -5 & 9 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -5 & 9 \end{pmatrix} = (-2)\cdot 9 - 4\cdot(-5) = 2$$

などとなるから, 求める解は

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 3 & 7 \\ 2 & 4 & 6 \\ 4 & 10 & 16 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 2 & 4 & 6 \\ 5 & 10 & 16 \end{vmatrix}} = 0, x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 7 \\ 2 & 2 & 6 \\ 5 & 4 & 16 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 2 & 4 & 6 \\ 5 & 10 & 16 \end{vmatrix}} = 2, x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 5 & 10 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 2 & 4 & 6 \\ 5 & 10 & 16 \end{vmatrix}} = -1.$$

掃き出し法により求める.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 & -1 \\ 2 & 4 & 6 & 2 \\ 5 & 10 & 16 & 4 \end{pmatrix} \underset{(1)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 & -1 \\ 0 & -2 & -8 & 4 \\ 0 & -5 & -19 & 9 \end{pmatrix} \underset{(2)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 & 5 \\ 0 & 1 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \underset{(3)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

ただし, (1) から (3) はそれぞれ以下の操作を表す.

(1) (1,1) 成分を要として第 1 列を掃き出す

(2) (2,2) 成分を要として第 2 列を掃き出す

(3) (3,3) 成分を要として第 1 列を掃き出す

従って, 求める解は $x_1 = 0, x_2 = 2, x_3 = -1$.

問 4.6.

1) $m < n$ のとき, $A = \begin{pmatrix} E_m & O_{m,n-m} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} E_m \\ O_{n-m,m} \end{pmatrix}$ とすると,

$AB = E_m$ であるが, $BA = \begin{pmatrix} E_m & O_{m,n-m} \\ O_{n-m,m} & O_{n-m,n-m} \end{pmatrix} \neq E_n$ である. □

2) $A = \begin{pmatrix} E_r & O_{r,n-r} \\ O_{n-r,r} & O_{n-r,n-r} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} E_r & O_{r,n-r} \\ E_{n-r,r} & O_{n-r,n-r} \end{pmatrix}$ とすると,

$AB = \begin{pmatrix} E_r & O_{r,n-r} \\ O_{n-r,r} & O_{n-r,n-r} \end{pmatrix} = \tilde{E}_r$ であるが, $BA = \begin{pmatrix} E_r & O_{r,n-r} \\ E_{n-r,r} & O_{n-r,n-r} \end{pmatrix} \neq \tilde{E}_r$ である. □

問 4.7.

1) $\psi(\varphi(f)(t)) = \psi(tf(t)) = \dfrac{tf(t) - 0 \cdot f(0)}{t} = f(t)$. 故に任意の $f \in \mathbb{R}[t]$ について $\psi(\varphi(f)) = f$ が成り立つ. □

2) $\varphi(\psi(f)(t)) = \psi\left(\dfrac{f(t) - f(0)}{t}\right) = t \cdot \dfrac{f(t) - f(0)}{t} = f(t) - f(0)$. 故に $f(0) \neq 0$ なる $f \in \mathbb{R}[t]$ について $\varphi(\psi(f)) = f$ は必ずしも成り立たない. □

問 4.8.

$f(t) = a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n$ について, $\psi(f) = a_1 + a_2 t + \cdots + a_n t^{n-1}$ より,

$$\begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_{n-1} \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \\ 0 \end{pmatrix}$$

故に $A = (a_{ij})$ とすると,

$a_i = \sum_{k=1}^{n+1} a_{k-1} a_{i,k}$ $(i = 1, \ldots, n+1)$. ただし $a_{n+1} = 0$ とした.

これが任意の f, 即ち任意の $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ について成り立つので,

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & (j - i = 1) \\ 0 & (j - i \neq 1) \end{cases}$$

従って, 題意を充たす行列は $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$ に限られる. □

編註：問題文には $A \in M_n(\mathbb{R})$ とありますが, 多分 $A \in M_{n+1}(\mathbb{R})$ だと思います.

２００９年度数学II演習 (理I向け)　第5回　　'09/6/15（月）４限
'09/6/16（火）４限

以下では特に断らなければ K は $\mathbb{R}$ あるいは $\mathbb{C}$ を表す.

問 5.1. 1) 上三角行列（下三角行列）同士の和・積は再び上三角行列（下三角行列）であることを示せ.

2) 正則な上三角行列（下三角行列）の逆行列は上三角行列（下三角行列）であることを示せ.

問 5.2. $A \in M_n(K)$ を $A = \begin{pmatrix} A' & b \\ c & d \end{pmatrix}$ と $A' \in M_{n-1}(K)$ であるように区分けする. $A' \in \mathrm{GL}_{n-1}(K)$ のとき,

$$L = \begin{pmatrix} A' & 0 \\ c & d' \end{pmatrix},\ U = \begin{pmatrix} E_{n-1} & b' \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

が $A = LU$ を充たすように b', d' を定めよ.

問 5.3. $A \in M_n(K)$ とする. A の第1行から第 k 行, 第1列から第 k 列までを取り出して得られる行列を $A_k \in M_k(K)$ とする（A_k を第 k 主座小行列（k-th principal minor）と呼ぶ）. もし $A_1, \cdots, A_n (= A)$ が全て正則であるとすると, 対角成分が全て 1 であるような上三角行列 $U \in \mathrm{GL}_n(K)$ と, 正則な下三角行列 $L \in \mathrm{GL}_n(K)$ がただ一組存在して $A = LU$ が成り立つことを示せ（例えば以下のように示せる）. これを LU 分解と呼ぶ.
存在の証明.

1) $n = 1$ の時は $U = (1)$, $L = A$ とすればよい.
2) 条件を充たすような n 次以下の行列について分解が存在したとし, $A \in \mathrm{GL}_{n+1}(K)$ であって, A も条件を充たすとする. $A = \begin{pmatrix} A' & b \\ c & d \end{pmatrix}$ と $A' \in M_n(K)$ であるように区分けする. $A' = A_n$ なので, 仮定から A' は正則である. 前問を用いて $A = L_1U_1$ とすると, L_1 の第 n 主座小行列は帰納法の仮定から LU 分解可能である（証明は必要である）. このことを用いてまず L_1 が LU 分解可能であることを示し, それから A 自身が LU 分解可能であることを示す.

一意性の証明. $A = LU = L'U'$ を共に LU 分解とする. このとき, $L'^{-1}L = U'U^{-1}$ が成り立つ. 両辺が共に E_n に等しいことを $L'^{-1}L$, $U'U^{-1}$ の形に着目して示す.

問 5.4. 以下の行列のそれぞれについて, LU 分解を求めよ.

$$1)\ \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \qquad 2)\ \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 4 & -1 & 6 \\ -1 & 6 & 11 \end{pmatrix} \qquad 3)\ \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

問 5.5 (ヴァンデルモンド（Vandermonde）の行列式). $n \geq 2$ とする.

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ {x_1}^2 & {x_2}^2 & \cdots & {x_n}^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ {x_1}^{n-1} & {x_2}^{n-1} & \cdots & {x_n}^{n-1} \end{pmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_i - x_j)$$

が成り立つことを示せ．ここで，$\displaystyle\prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)$ は $1 \leq i < j \leq n$ なる (i, j) の組全てについて $(x_j - x_i)$ を考えてその積を取ることを意味する．この行列式を $x_1, \cdots, x_n$ の差積と呼ぶ.

問 5.6. $A \in M_{m,n}(K)$ とし，$A = (a_1, \ldots, a_n)$ と K^m の元 $a_1, \ldots, a_n$ を用いて表す. $\operatorname{rank} A = n-1$ かつ $\operatorname{rank}(a_1, \ldots, a_{n-1}) = n-1$ であるならば，適当な $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1} \in K$ が存在して $a_n = \lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_{n-1} a_{n-1}$ が成り立つことを示せ.

ヒント:例えば次のように考えることが出来る．A の第 1 列から第 $(n-1)$ 列までに着目し $A' = (a_1, \ldots, a_{n-1})$ と置く．$A = (A' \ a_n)$ であって，$\operatorname{rank} A' = n-1$ である．右基本変形により A の A' の部分を列階段行列に直す．この状態からさらに右基本変形により A 全体を列階段行列に直したときどのような作業で，最終的にどのような形になるか考えてみよ.

問 5.7. $A \in M_{m,n}(K)$ とする．$i_1 < i_2 < \cdots < i_r$，$j_1 < j_2 < \cdots < j_r$ を正の整数とし，A から第 i_1 行，$\cdots$，第 i_r 行および第 j_1 列，$\cdots$，第 j_r 列を取り出して（取り去るのではない）得られる $M_r(K)$ の元を $A_{i_1,\cdots,i_r;j_1,\cdots,j_r}$ で表す（このような行列を r 次小行列などと呼ぶ）．ある $i_1 < i_2 < \cdots < i_r$，$j_1 < j_2 < \cdots < j_r$ について $\det A_{i_1,\cdots,i_r;j_1,\cdots,j_r} \neq 0$ であることと，$\operatorname{rank} A \geq r$ であることは同値であることを示せ.

ヒント：基本変形により行列のランクは不変なのであった.

問 5.8. $A \in M_n(K)$ とする．A の余因子行列を $\widetilde{A}$ で表す.

1) $A \in \mathrm{GL}_n(K)$ であるとき，$\det \widetilde{A}$ を求めよ.
2) $A \in \mathrm{GL}_n(K)$ であるとき，$\widetilde{(\widetilde{A})} = (\det A)^{n-2} A$ であることを示せ.
3) $n > 2$ とする．$A \notin \mathrm{GL}_n(K)$ のとき，$\widetilde{(\widetilde{A})} = O_n$ であることを示せ.

ヒント:（少なくとも）二通りの方針があり得る．例えばまず $\operatorname{rank} A$ により場合分けをする．$\operatorname{rank} A < n-1$ の時には問 5.7 を用いれば $\widetilde{A} = O_n$ であることが容易に示せる．$\operatorname{rank} A = n-1$ の時には問 5.6 と，行列式の性質を用いると $\widetilde{A}$ が特別な形をしていることがわかり，$\operatorname{rank} A < n-1$ の場合に帰着できる．あるいは 2) に着目して，まず対応 $A \mapsto \widetilde{(\widetilde{A})}$ が $A \in M_n(K)$ の函数として（つまり n^2 個の変数の函数として）連続であることを示す．一方，任意の $A \in M_n(K)$ についてある正則な行列の列 $\{A_n\}_{n=1,2,\ldots,}$ であって $\displaystyle\lim_{n\to\infty} A_n = A$ なるものが存在することを示す．これらのことから主張を示すことができる（多変数の函数の連続性について未習であると後者の方針で示すのは難しい）.

（以上）

数学 II 演習　足助太郎教官　第 5 回　解答

問 5.1.

1) A, B を上三角行列とする．即ち $A = (a_{ij}), B = (b_{ij})$ のとき, $i > j$ ならば $a_{ij}, b_{ij} = 0$ とする．
このとき $A + B$ の (i, j) 成分は $a_{ij} + b_{ij}$ で, $i > j$ のとき $a_{ij} + b_{ij} = 0$ である．
また, AB の (i, j) 成分は $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$ で, $k < i$ のとき $a_{ik} = 0$, $j < k$ のとき $b_{kj} = 0$ であるから, $i > j$ のとき $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} = 0$ となる．従って, 上三角行列 A, B の和 $A + B$ および積 AB は再び上三角行列である．上の不等号の向きを逆にすることにより, 下三角行列においても同様に成り立つ．□

2) 正則な上三角行列 $A = (a_{ij}) \in \mathrm{GL}_n(K)$ に対し, (k, k) 成分を要として第 k 行を掃き出す操作を考える．このとき行う操作は

   (i) 第 k 列を $1/a_{kk}$倍 する．

   (ii) 第 l 列に第 k 列の $(-a_{kl})$ 倍を加える.$(l \neq k)$

である.(i) を表す行列は $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & 1/a_{kk} & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$, (ii) を表す行列は, $l < k$ のとき E_n $(\because a_{kl} = 0)$,

$l > k$ のとき $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & & & & \vdots \\ \vdots & & 1 & \cdots & -a_{kl} & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & & & 1 & & \vdots \\ \vdots & & & & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$ となり, いずれも上三角行列である．$k = 1, \ldots, n$ について上の行列の表す右基本変形を施すことにより, A は E_n に変形される．よって上の行列の積 A^{-1} は, 1) により再び上三角行列である．下三角行列については左基本変形を考えることにより同様に示される．□

（別解）$A = (a_{ij}) \in \mathrm{GL}_n(K)$, $i > j \Rightarrow a_{ij} = 0$ とする．$A^{-1} = \dfrac{1}{\det A} \begin{pmatrix} \tilde{a}_{11} & \cdots & \tilde{a}_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{a}_{1n} & \cdots & \tilde{a}_{nn} \end{pmatrix}$

A から第 k 行, 第 l 列を除いて得られる $M_{n-1}(K)$ の元を $\widetilde{A}_{kl}$ とすると,

$$\widetilde{A}_{kl} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,k-1} & a_{1,k} & \cdots & a_{1,l-1} & a_{1,l+1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & & & & & & & \\ a_{k-1,1} & & a_{k-1,k-1} & & & & & & \\ a_{k+1,1} & & & a_{k+1,k} & & & & & \\ \vdots & & & & \ddots & & & & \\ a_{l,1} & & & & & a_{l,l-1} & & & \\ a_{l+1,1} & & & & & & a_{l+1,l+1} & & \\ \vdots & & & & & & & \ddots & \\ a_{l+1,1} & & & & & & & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$k < l$ のとき, $i > j \Rightarrow a'_{ij} = 0, a_{k+1,k}, \ldots, a_{l,l-1} = 0$ より, $\tilde{A}_{kl}$ は上三角行列であって, 対角成分に 0 を含むから, $\tilde{a}_{kl} = \det \widetilde{A}_{kl} = 0$. 故に上三角行列 A の逆行列 A^{-1} は上三角行列である．□

問 5.2. $A=\begin{pmatrix}A' & b\\ c & d\end{pmatrix}=LU=\begin{pmatrix}A' & A'b'\\ c & cb'+d'\end{pmatrix}$ より, $\begin{cases}b=A'b'\\ d=cb'+d'\end{cases}$ $\therefore\begin{cases}b'=A'^{-1}b\\ d'=d-cb'\end{cases}$

問 5.3.

（存在性）

数学的帰納法による.

1) $n=1$ のとき $U=(1), L=A$ とすればよい.

2) n 次以下について成り立つとする. $A\in M_{n+1}(K)$ が条件を充たすとすると, A の第 n 主座小行列 A' も条件を充たす. $A=\begin{pmatrix}A' & b\\ c & d\end{pmatrix}, A'=LU$ とする.

ここで $L_1=\begin{pmatrix}L & 0\\ cU^{-1} & d-cU^{-1}L^{-1}b\end{pmatrix}, U_1=\begin{pmatrix}U & L^{-1}b\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ とすると, L_1 は下三角行列, U_1 は上三角行列であって, $L_1U_1=\begin{pmatrix}A' & b\\ c & d\end{pmatrix}=A$ となるから, 確かに $n+1$ 次においても LU 分解が存在する.

1) 2) より LU 分解の存在性が示された.

（一意性）

$A=LU=L'U'$ を共に LU 分解とする. このとき $L'^{-1}L=U'U^{-1}$.

問 5.1. により, 左辺は下三角行列, 右辺は上三角行列であるから, 上式の両辺は対角行列である.

さらに, $U=\begin{pmatrix}E_{n-1} & b\\ 0 & 1\end{pmatrix}, U'=\begin{pmatrix}E_{n-1} & b'\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ とおくと, $U^{-1}=\begin{pmatrix}E_{n-1} & -b\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ より

$U'U^{-1}=\begin{pmatrix}E_{n-1} & b'-b\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ であるが, $U'U^{-1}$ は対角行列であることにより $b'-b=0$

$\therefore L'^{-1}L=U'U^{-1}=E_n$. $\therefore L=L', U=U'$. □

（註：存在性の証明で若干ヒントを無視しました. 具体的に書けちゃったから別に良いよね.）

問 5.4.

1) $2=2\cdot 1$ と LU 分解されるから, 問 5.3. で得られた式に代入して,

$$\begin{pmatrix}2 & -2\\ 4 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 4\cdot 1 & 1-4\cdot 1\cdot\frac{1}{2}\cdot(-2)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{2}\cdot(-2)\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 4 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

2) $\begin{pmatrix}2 & -2\\ 4 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 4 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ と LU 分解される（求め方は 1) と同様）から,

$\begin{pmatrix}-1 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}-1 & 5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2 & 0\\ 4 & 3\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}0\\ 6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 2\end{pmatrix}, 11-\begin{pmatrix}-1 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ 2\end{pmatrix}=1$ などにより,

$$\begin{pmatrix}2 & -2 & 0\\ 4 & -1 & 6\\ -1 & 6 & 11\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 4 & 3 & 0\\ -1 & 5 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

3) $\begin{pmatrix}2 & 2\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ と LU 分解されるから,

$\begin{pmatrix}0 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}0 & 3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2 & 0\\ 1 & -1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}2\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}, 4-\begin{pmatrix}0 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}=1$ などにより,

$$\begin{pmatrix}2 & 2 & 2\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 1 & -1 & 0\\ 0 & 3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

問 5.5.

数学的帰納法により示す.

1) $n=2$ のとき $\det\begin{pmatrix}1 & 1\\ x_1 & x_2\end{pmatrix}=x_2-x_1$ より成り立つ.

2) n 次以下について成り立つと仮定すると,

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_{n+1} \\ {x_1}^2 & {x_2}^2 & \cdots & {x_{n+1}}^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ {x_1}^n & {x_2}^n & \cdots & {x_{n+1}}^n \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 1 \\ x_1 - x_{n+1} & x_2 - x_{n+1} & \cdots & x_{n+1} \\ {x_1}^2 - {x_{n+1}}^2 & {x_2}^2 - {x_{n+1}}^2 & \cdots & {x_{n+1}}^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ {x_1}^n - {x_{n+1}}^n & {x_2}^n - {x_{n+1}}^n & \cdots & {x_{n+1}}^n \end{pmatrix}$$

（$k = 1, \ldots, n$ について, 第 k 列から第 $(n+1)$ 列を引く）

$$= (-1)^{n+2}\begin{pmatrix} x_1 - x_{n+1} & x_2 - x_{n+1} & \cdots & x_n - x_{n+1} \\ {x_1}^2 - {x_{n+1}}^2 & {x_2}^2 - {x_{n+1}}^2 & \cdots & {x_n}^2 - {x_{n+1}}^2 \\ {x_1}^3 - {x_{n+1}}^3 & {x_2}^3 - {x_{n+1}}^3 & \cdots & {x_n}^3 - {x_{n+1}}^3 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ {x_1}^n - {x_{n+1}}^n & {x_2}^n - {x_{n+1}}^n & \cdots & {x_n}^n - {x_{n+1}}^n \end{pmatrix}$$

（第 1 行について行列式を展開）

$$= (-1)^n \prod_{k=1}^{n}(x_k - x_{n+1})\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 + x_{n+1} & x_2 + x_{n+1} & \cdots & x_n + x_{n+1} \\ {x_1}^2 + x_1 x_{n+1} + {x_{n+1}}^2 & {x_2}^2 + x_2 x_{n+1} + {x_{n+1}}^2 & \cdots & {x_n}^2 + x_n x_{n+1} + {x_{n+1}}^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n} {x_1}^{n-k} {x_{n+1}}^{k-1} & \displaystyle\sum_{k=1}^{n} {x_2}^{n-k} {x_{n+1}}^{k-1} & \cdots & \displaystyle\sum_{k=1}^{n} {x_n}^{n-k} {x_{n+1}}^{k-1} \end{pmatrix}$$

（行列式の多重線型性により, $k = 1, \ldots, n$ について, 第 k 列から $(x_k - x_{n+1})$ を括りだす）

$$= \prod_{k=1}^{n}(x_{n+1} - x_k)\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ {x_1}^2 & {x_2}^2 & \cdots & {x_n}^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ {x_1}^{n-1} & {x_2}^{n-1} & \cdots & {x_n}^{n-1} \end{pmatrix}$$

（$k = 2, \ldots, n$ について, 第 k 行から第 $(k-1)$ 行の x_{n+1}倍を引く）

$$= \prod_{k=1}^{n}(x_{n+1} - x_k) \prod_{1 \le i < j \le n}(x_j - x_i) = \prod_{1 \le i < j \le n+1}(x_j - x_i) = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \prod_{1 \le i < j \le n+1}(x_i - x_j)$$

（$\because 1 \le i < j \le n+1$ なる $i, j \in \mathbb{N}$ の組は$\begin{pmatrix} n+1 \\ 2 \end{pmatrix} = \dfrac{n(n+1)}{2}$通り, ただし$\begin{pmatrix} n \\ r \end{pmatrix} = \dfrac{n!}{r!(n-r)!}$は二項係数）

より, $n+1$ 次についても成り立つ.

1) 2) により示された. □

問 5.6.

$A = (A' \; a_n)$ と区分けして, $A' = (a_1 \; \cdots \; a_{n-1})$ とおく.

A' に右基本変形を施し列階段行列 $A'' = (a'_1 \; \cdots \; a'_{n-1})$ を得たとすると, 各 $k = 1, \ldots, n-1$ に対し適当な $\lambda_{k,1}, \ldots, \lambda_{k,n-1} \in K$ が存在して, $a'_k = \lambda_{k,1} a_1 + \cdots + \lambda_{k,n-1} a_{n-1}$ と書ける.

A'' の i_k 列が第 k 次基本ベクトルであるとする. 上と同様の変形を A について行うと $(A'' \; a_n)$ を得る.

$\operatorname{rank} A = n-1$ より, さらに変形を行うことによって第 n 列を零ベクトルにできる.

各 k に対し第 i_k 列が基本ベクトルであるから, a_n の第 l 成分を $a_{n,l}$ で表すと, その変形は各 k について第 n 列から第 k 列の a_{n,i_k} 倍を引く操作である.

ゆえに $\lambda_k = \displaystyle\sum_{l=1}^{n-1} a_{n,i_l} \lambda_{l,k}$ $(k = 1, \ldots, n-1)$ とすれば $a_n = \lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_{n-1} a_{n-1}$ が成り立つ. □

問 5.7.

ある $i_1 < i_2 < \cdots < i_r, j_1 < j_2 < \cdots < j_r$ について $\det A_{i_1,\cdots,i_r;j_1,\cdots,j_r} \neq 0$ のとき, $\operatorname{rank} A_{i_1,\cdots,i_r;j_1,\cdots,j_r} \neq r$ である. また A の行と列を適切に入れ替える基本変形により $\begin{pmatrix} A_{i_1,\cdots,i_r;j_1,\cdots,j_r} & P \\ Q & R \end{pmatrix}$ という形に変形できる. 基本変形によって rank は不変であったから, $\operatorname{rank} A \ge r$.

逆に rank$A \geq r$ のとき, A を右基本変形して得られる列階段行列において, 第 i_k 列が第 k 次基本ベクトルであるような $i_1 < i_2 < \cdots < i_r$, および A を左基本変形して得られる階段行列において, 第 i_k 行が第 k 次基本ベクトルであるような $j_1 < j_2 < \cdots < j_r$ が存在する. このような $i_k, j_k (1 \leq k \leq r)$ に対し $\det A_{i_1,\cdots,i_r;j_1,\cdots,j_r} \neq 0$ が成り立つ. よって示された. □

問 5.8.

1) $A\widetilde{A} = (\det A)E_n$ より,

$$\det(A\widetilde{A}) = (\det A)(\det\widetilde{A}) = \det((\det A)E_n) = \det\begin{pmatrix}\det A & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \det A\end{pmatrix} = (\det A)^n$$

$\det A \neq 0$ であるから, 答えは $\det\widetilde{A} = (\det A)^{n-1}$ である.

2) $\widetilde{A}\widetilde{(\widetilde{A})} = (\det\widetilde{A})E_n$ の両辺に左から A を掛けて,

$(A\widetilde{A})\widetilde{(\widetilde{A})} = (\det A)\widetilde{(\widetilde{A})} = (\det\widetilde{A})A = (\det A)^{n-1}A$

$\det A \neq 0$ より, $\widetilde{(\widetilde{A})} = (\det A)^{n-2}A$ が成り立つ. □

3) A の rank により場合分けを行う.

(i) rank$A \leq n-2$ のとき

問 5.7. より, rank$A < n-1$ であることと, いかなる $i_1 < i_2 < \cdots < i_{n-1}, j_1 < j_2 < \cdots < j_{n-1}$ についても $\det A_{i_1,\cdots,i_{n-1};j_1,\cdots,j_{n-1}} = 0$ であることは同値であるから, 任意の $1 \leq i, j \leq n$ に対して A の第 (i,j) 余因子は 0 になる. よって $\widetilde{(\widetilde{A})} = \widetilde{O_n} = O_n$

(ii) rank$A = n-1$ のとき

問 5,7 より,$\det A_{i_1,\cdots,i_{n-1};j_1,\cdots,j_{n-1}} = 0$ なる $i_1 < i_2 < \cdots < i_{n-1}, j_1 < j_2 < \cdots < j_{n-1}$ が存在する. $1 \leq i \leq n, i \neq i_k (k = 1, \ldots n-1)$ なる $i \in \mathbb{N}$ を i' とする.

$A = (a_1\ \cdots\ a_n)$ とおくと, 問 5.6. より, 適当な $\lambda_{i_1}, \ldots, \lambda_{i_{n-1}} \in K$ が存在して,

$a_{i'} = \lambda_{i_1}a_{i_1} + \cdots + \lambda_{i_{n-1}}a_{i_{n-1}}$ と表せる. a_k から第 j 成分を取り去った K^{n-1} の元を $a_{k,j}$ とすると,

A の第 (i',j) 余因子 $\tilde{a}_{i',j}$ は, $\tilde{a}_{i',j} = (-1)^{i'+j}\det(a_{i_1,j}\ \cdots a_{i_{n-1},j})$, 第 (i_k,j) 余因子 $\tilde{a}_{i_k,j}$ は,

$\tilde{a}_{i_k,j} = (-1)^{i_k+j}\det(a_{i_1,j}\ \cdots\ a_{i_k-1,j}\ a_{i_k+1,j}\ \cdots\ a_{i',j}\ \cdots\ a_{i_{n-1},j})$

$= (-1)^{i+j}\det(a_{i_1,j}\ \cdots\ a_{i-1,j}\ a_{i+1,j}\ \cdots\ \lambda_{i_1}a_{i_1,j} + \cdots + \lambda_{i_{n-1}}a_{i_{n-1},j}\ \cdots\ a_{i_{n-1},j})$

$= (-1)^{i_k+j}\det(a_{i_1,j}\ \cdots\ a_{i_k-1,j}\ a_{i_k+1,j}\ \cdots\ \lambda_i a_{i,j}\ \cdots\ a_{i_{n-1},j})$ (列に関する引き算)

$= (-1)^{i_k}\lambda_{i_k}\cdot(-1)^j\det(a_{i_1,j}\ \cdots\ a_{i_k-1,j}\ a_{i_k+1,j}\ \cdots\ a_{i,j}\ \cdots\ a_{i_{n-1},j})$ (列に関する多重線型性による)

$= (-1)^{i_k+|i_k-i'|-1}\lambda_{i_k}\cdot(-1)^j\det(a_{i_1,j}\ \cdots a_{i_{n-1},j})$

$\left(\because \mathrm{sgn}\begin{pmatrix}1 & \cdots & i_k-1 & i_k+1 & \cdots & i_k & \cdots & n\\ 1 & 2 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & n-1 & n\end{pmatrix} = (-1)^{|i_k-i'|-1}\right)$

$(-1)^{i_k+|i_k-i'|-1}\lambda_{i_k}, (-1)^j\det(a_{i_1,j}\ \cdots a_{i_{n-1},j})$ はそれぞれ i_k, j の関数であるから, それぞれ $f(i_k), g(j)$ とおくと, $f(i') = (-1)^{i'}$ で定めれば, $\tilde{a}_ij = f(i)g(j)$ が成り立つから,

$$\det\widetilde{A} = \det\begin{pmatrix}\tilde{a}_{11} & \cdots & \tilde{a}_{n1}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \tilde{a}_{1n} & \cdots & \tilde{a}_{nn}\end{pmatrix} = \begin{vmatrix} f(i_1)g(1) & f(i_1)g(2) & \cdots & f(i_1)g(n)\\ f(i_2)g(1) & f(i_2)g(2) & \cdots & f(i_2)g(n)\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ f(i')g(1) & f(i')g(2) & \cdots & f(i')g(n)\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ f(i_{n-1})g(1) & f(i_{n-1})g(2) & \cdots & f(i_{n-1})g(n)\end{vmatrix}$$

列に関する引き算により, 第 1 列以外を零ベクトルにすることができるから, rank$\widetilde{A} \leq 1 < n-2$.

従って (i) により, $\widetilde{(\widetilde{A})} = O_n$ が成り立つ. □

２００９年度数学II演習（理I向け）　第6回　　　　　　　　　　　　　　　　'09/6/29（月）４限
'09/6/30（火）４限

以下では特に断らなければ K は $\mathbb{R}$ あるいは $\mathbb{C}$ を表す.

注. V が K-線型空間であるとは，V（や，関連する演算）が K-線型空間の定義を充たすことである．従って，例えば集合 V が与えられたとき，V が K-線型空間であることを示す方法は原理的には V が定義の条件を全て充たすことを全て確認する以外にはない.

問 6.1. 以下の主張を確かめよ.

1) $M_{m,n}(K)$ は行列の和と K の元との積により K-線型空間である.
2) $K[\,t\,]$ で t を変数とする K 係数の多項式全体を表す.
$$K[\,t\,] = \{a_0 + a_1t + \cdots + a_nt^n \mid a_0, \cdots, a_n \in K\}$$
である（n は元ごとに異なる）．また，$K_n[\,t\,]$ で t を変数とする高々 n 次の K 係数の多項式全体を表す.
$$K_n[\,t\,] = \{a_0 + a_1t + \cdots + a_mt^m \mid a_0, \cdots, a_m \in K,\ m \leq n\}$$
である．$K[t]$，$K_n[\,t\,]$ は共に多項式の和・実数倍に関して K-線型空間である.
※ $K[\,t\,]$ は一般的な記号であるが，$K_n[\,t\,]$ はそうではないので注意せよ.
3) $V = \{\{a_n\}_{n=1,2,\cdots} \mid a_n \in K,\ a_{n+2} - 3a_{n+1} + 2a_n = 0\}$ とする.
$a, b \in V$ であるとき，$a = \{a_n\},\ b = \{b_n\}$ と表しておいて $c_n = a_n + b_n$ と置き，$a+b \in V$ を $a+b = \{c_n\}$ により定める．また，$a \in V,\ \lambda \in K$ であるとき，$a = \{a_n\}$ と表しておいて $d_n = \lambda a_n$ と置き，$\lambda a \in V$ を $\lambda a = \{d_n\}$ と定める．すると V は K-線型空間である.

問 6.2. V を $\mathbb{C}$-線型空間とする．集合として $W = V$ と置き，$v, v' \in W$ の時，$v+v'$ を V の元としての和として定め，$\lambda \in \mathbb{R}$ の時 λv を $\lambda \in \mathbb{C}$ とみなしてから V の元と $\mathbb{C}$ の元との積により定める．このとき，W は $\mathbb{R}$-線型空間であることを示せ.
※ $v \in V$ とし，$w = \sqrt{-1}v$ とする．W は集合としては V に等しいので $w \in W$ であるが，W の元としては $\sqrt{-1}v$ は計算できない（定義されていない）ので，$w = \sqrt{-1}v$ という等式は W においては意味を持たない.

定義 6.3. V, W を K-線型空間とする．$f\colon V \to W$ が K-線型写像であるとは，

1) $\forall v_1, v_2 \in V,\ f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2)$
2) $\forall v \in V,\ \forall \lambda \in K,\ f(\lambda v) = \lambda f(v)$

が共に成り立つことを言う.

上の条件において，左辺の和や定数倍は V の，右辺のそれは W のものであることに注意せよ.

問 6.4. n を固定し，

$$W = \left\{ a_n \frac{d^n}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{d}{dt} + a_0 \;\middle|\; a_0, \cdots, a_n \in \mathbb{R} \right\}$$

と置く．ここで，$w = a_n \frac{d^n}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{d}{dt} + a_0$ は，$f \in \mathbb{R}[\,t\,]$ に対して

$$w(f) = a_n \frac{d^n f}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1} f}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{df}{dt} + a_0 f$$

と置くことで定められた写像である．

1) $w\colon \mathbb{R}[\,t\,] \to \mathbb{R}[\,t\,]$ は $\mathbb{R}$-線型写像であることを示せ．
2) $w = a_n \frac{d^n}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{d}{dt} + a_0$，$w' = b_n \frac{d^n}{dt^n} + b_{n-1}\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} + \cdots + b_1 \frac{d}{dt} + b_0$ をそれぞれ W の元とする．

$$w + w' = (a_n + b_n)\frac{d^n}{dt^n} + \cdots + (a_1 + b_1)\frac{d}{dt} + (a_0 + b_0)$$

と定め，また，$\lambda \in \mathbb{R}$ に対して

$$\lambda w = (\lambda a_n)\frac{d^n}{dt^n} + (\lambda a_{n-1})\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} + \cdots + (\lambda a_1)\frac{d}{dt} + (\lambda a_0)$$

と定めると，$f \in \mathbb{R}[\,t\,]$ について $(w + w')(f) = w(f) + w'(f)$, $(\lambda w)(f) = \lambda w(f)$ がそれぞれ成り立つことを示せ．
3) 上で定めた演算により W は $\mathbb{R}$-線型空間であることを示せ．
ヒント：W の元の「係数」に着目すれば演算は $\mathbb{R}^{n+1}$ のものと同じである．

問 6.5. $V = K^3$ とする．以下に挙げる部分線型空間 W_1, W_2, W_3 の組について，$W_1 + W_2$, $W_1 + W_3$, $W_2 + W_3$, $W_1 + W_2 + W_3$ をそれぞれ求めよ．

1) $V = K^3$，$W_1 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle, W_2 = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle, W_3 = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$
2) $V = K^3$，$W_1 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle, W_2 = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle, W_3 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

問 6.6. $V = K[x]$ とする．以下に挙げる部分線型空間 W_1, W_2 の組について，$W_1 \cap W_2$, $W_1 + W_2$ をそれぞれ求めよ．

1) $W_1 = \langle x + 1 \rangle$, $W_2 = \langle x - 2 \rangle$.
2) $W_1 = \langle x - 1 \rangle$, $W_2 = \langle x^2 - 3x + 2 \rangle$.
3) $W_1 = \langle x^2 - 3x + 2 \rangle$, $W_2 = \langle x^2 - 4 \rangle$.

問 6.7. 以下に挙げる $\mathbb{R}^2$ の部分集合がそれぞれ $\mathbb{R}^2$ の部分線型空間であるかどうか理由と共に答えよ.

1) $W_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; x_1 \in \mathbb{R} \right\}$　　2) $W_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; x_1 \in \mathbb{R} \right\}$

3) $W_3 = \left\{ \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix} \;\middle|\; t \in \mathbb{R} \right\}$　　4) $W_4 = \left\{ \begin{pmatrix} t^3 \\ t^3 \end{pmatrix} \;\middle|\; t \in \mathbb{R} \right\}$

問 6.8. $\mathbb{R}^2$ の部分線型空間 W を $W = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; x_1 \in \mathbb{R} \right\}$ により定める．$\mathbb{R}^2$ の部分線型空間 U_1, U_2 であって, $\mathbb{R}^2 = W \oplus U_1 = W \oplus U_2$ かつ $U_1 \neq U_2$ であるようなものを一組挙げよ.

問 6.9. V を K-線型空間とし，W_1, W_2, W_3 を V の部分線型空間とする.

1) $(W_1 + W_2) \cap W_3 \supset (W_1 \cap W_3 + W_2 \cap W_3)$ が成り立つことを示せ．また，等号が成り立たない例を挙げよ.
2) $((W_1 \cap W_2) + W_3) \subset (W_1 + W_3) \cap (W_2 + W_3)$ が成り立つことを示せ．また，等号が成り立たない例を挙げよ.

問 6.10. V を K-線型空間とする.

$$V^* = \{ f\colon V \to K,\ K\text{-線型写像} \}$$

と置く.

1) $f, g \in V^*$ とする．$f + g\colon V \to K$ を $v \in V$ に対して
$$(f+g)(v) = f(v) + g(v)$$
により定めると $f + g \in V^*$ であることを示せ.
2) $f \in V^*$，$\lambda \in K$ とする．$\lambda f\colon V \to K$ を $v \in V$ に対して
$$\lambda f(v) = \lambda(f(v))$$
により定めると $\lambda f \in V^*$ であることを示せ.
3) 上の演算に関して V^* は K-線型空間であることを示せ.

V^* を V の双対空間（そうついくうかん）と呼ぶ．$V^\vee$ 等で表すこともある.

問 6.11. V, W を K-線型空間，$f\colon V \to W$ を K-線型写像とする.

1) $g \in W^*$ の時，$f^*(g)$ を
$$f^*(g)(v) = g(f(v)),\ v \in V$$
により定めると，$f^*(g) \in V^*$ であることを示せ．しばしば $f^*(g)$ を単に f^*g で表す.
2) $f^*\colon W^* \to V^*$ は K-線型写像であることを示せ.

（以上）

数学 II 演習　足助太郎教官　第 6 回　解答

問 6.1.

1) $A=(a_{ij}), B=(b_{ij}), C=(c_{ij}) \in M_{m,n}(K), \lambda, \mu \in K$ とする.
行列の和を $A+B=(a_{ij}+b_{ij})$, K の元との積を $\lambda A=(\lambda a_{ij})$ で定めると, $A+B, \lambda A \in M_{m,n}(K)$ であって,

(1) $(A+B)+C=((a_{ij}+b_{ij})+c_{ij})=(a_{ij}+(b_{ij}+c_{ij}))=A+(B+C)$,

(2) $A+B=(a_{ij}+b_{ij})=(b_{ij}+a_{ij})=B+A$,

(3) $a_{ij}=0$ なる A を O とすると, 任意の A に対し $O+A=(0+a_{ij})=(a_{ij})=A$,

(4) 任意の A に対し $A'=(-a_{ij})$ とすると, $A+A'=(a_{ij}+(-a_{ij}))=O$,

(5) $(\lambda+\mu)A=((\lambda+\mu)a_{ij})=(\lambda a_{ij}+\mu a_{ij})=\lambda A+\mu A$,

(6) $\lambda(A+B)=(\lambda(a_{ij}+b_{ij}))=(\lambda a_{ij}+\lambda b_{ij})=\lambda A+\lambda B$,

(7) $(\lambda\mu)A=((\lambda\mu)a_{ij})=(\lambda(\mu a_{ij}))=\lambda(\mu A)$,

(8) $1\cdot A=(1\cdot a_{ij})=(a_{ij})=A$.
(1)〜(8) により, $M_{m,n}(K)$ は K-線型空間である. □

2) $p,q,r \in K_n[t]$ を $p(t)=a_nt^n+\cdots+a_0, q(t)=b_nt^n+\cdots+b_0, r(t)=c_nt^n+\cdots+c_0$ で定め, $\lambda,\mu \in K$ とする.
多項式の和を $(p+q)(t)=(a_n+b_n)t^n+\cdots+(a_0+b_0)$, 実数倍を $(\lambda p)(t)=(\lambda a_n)t^n+\cdots+(\lambda a_0)$ で定めると, $p+q, \lambda p \in K_n[t]$ であって,

(1) $((p+q)+r)(t)=\{(a_n+b_n)+c_n\}t^n+\cdots+\{(a_0+b_0)+c_0\}=\{a_n+(b_n+c_n)\}t^n+\cdots+\{a_0+(b_0+c_0)\}=(p+(q+r))(t)$ より $(p+q)+r=p+(q+r)$,

(2) $(p+q)(t)=(a_n+b_n)t^n+\cdots+(a_0+b_0)=(b_n+a_n)t^n+\cdots+(b_0+a_0)=(q+p)(t)$ より $p+q=q+p$,

(3) 定数項 0 について, 任意の $p \in K_n[t]$ に対し $0+p=p$,

(4) 任意の $p \in K_n[t]$ に対し, $p'=-p$ とすると, $(p+p')(t)=\{a_n+(-a_n)\}t^n+\cdots+\{a_0+(-a_0)\}=0$,

(5) $((\lambda+\mu)p)(t)=(\lambda+\mu)a_nt^n+\cdots+(\lambda+\mu)a_0=(\lambda a_n+\mu a_n)t^n+\cdots+(\lambda a_n+\mu a_n)=(\lambda p+\mu p)(t)$ より $(\lambda+\mu)p=\lambda p+\mu p$,

(6) $(\lambda(p+q))(t)=\lambda(a_n+b_n)t^n+\cdots+\lambda(a_0+b_0)=(\lambda a_n+\lambda b_n)t^n+\cdots+(\lambda a_0+\lambda b_0)=(\lambda p+\lambda q)(t)$ より $\lambda(p+q)=\lambda p+\lambda q$,

(7) $((\lambda\mu)p)(t)=(\lambda\mu)a_nt^n+\cdots+(\lambda\mu)a_0=\lambda(\mu a_n)t^n+\cdots+\lambda(\mu a_0)=(\lambda(\mu p))(t)$ より $(\lambda\mu)p=\lambda(\mu p)$,

(8) $(1\cdot p)(t)=(1\cdot a_n)t^n+\cdots+(1\cdot a_0)=a_nt^n+\cdots+a_0=p(t)$ より $1\cdot p=p$.
(1)〜(8) により, $K_n[t]$ は K-線型空間である. $K[t]$ についても同様に示される.□

3) $a,b,c \in V$ を $a=\{a_n\}, b=\{b_n\}, c=\{c_n\}$ で定め, $\lambda,\mu \in K$ とする.

(1) $(a+b)+c=\{(a_n+b_n)+c_n\}=\{a_n+(b_n+c_n)\}=a+(b+c)$,

(2) $a+b=\{a_n+b_n\}=\{b_n+a_n\}=b+a$,

(3) $0=\{0\}$ とすると, 任意の a に対し $0+a=a$,

(4) 任意の a に対し $a'=-a$ とすると, $a+a'=\{a_n+(-a_n)\}=\{0\}=0$,

(5) $(\lambda+\mu)a=\{(\lambda+\mu)a_n\}=\{\lambda a_n+\mu a_n\}=\lambda a+\mu a$

(6) $\lambda(a+b)=\{\lambda(a_n+b_n)\}=\{\lambda a_n+\lambda b_n\}=\lambda a+\lambda b$

(7) $(\lambda\mu)a=\{(\lambda\mu)a_n\}=\{\lambda(\mu a_n)\}=\lambda(\mu a)$

(8) $1\cdot a=\{1\cdot a_n\}=\{a_n\}=a$
(1)〜(8) により, V は K-線型空間である. □

問 6.2. $v, v' \in W = V$ に対し, W の演算 $v + v'$ を V の元の和として定めると, V は $\mathbb{C}$-線型空間であることにより, W は W の元の和について定義の条件を充たす.

また, $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ 及び V が $\mathbb{C}$-線型空間であることにより, $\lambda \in \mathbb{R}$ について W の演算 λv を V の演算として定めると, W は W の元の実数倍について定義の条件を充たす.

従って W は $\mathbb{R}$-線型空間である. $\square$

問 6.4.

1) $f, g \in \mathbb{R}[t]$, $\lambda \in \mathbb{R}$ とすると, $f+g, \lambda f \in \mathbb{R}[t]$ であって,

$$w(f+g) = a_n \frac{d^n(f+g)}{dt^n} + \cdots + a_0(f+g) = \left(a_n \frac{d^n f}{dt^n} + \cdots + a_0 f\right) + \left(a_n \frac{d^n g}{dt^n} + \cdots + a_0 g\right) = wf + wg \in \mathbb{R}[t],$$

$$w(\lambda f) = a_n \frac{d^n(\lambda f)}{dt^n} + \cdots + a_0(\lambda f) = \lambda \left(a_n \frac{d^n f}{dt^n} + \cdots + a_0 f\right) = \lambda(wf) \in \mathbb{R}[t].$$

従って $w : \mathbb{R}[t] \to \mathbb{R}[t]$ は $\mathbb{R}$ 線型写像である. $\square$

2) $$(w+w')(f) = (a_n + b_n)\frac{d^n f}{dt^n} + \cdots (a_0 + b_0)f = \left(a_n \frac{d^n f}{dt^n} + b_n \frac{d^n f}{dt^n}\right) + \cdots (a_0 f + b_0 f)$$

$$= \left(a_n \frac{d^n f}{dt^n} + \cdots + a_0 f\right) + \left(a_b \frac{d^n f}{dt^n} + \cdots + b_0 f\right) = wf + w'f,$$

$$(\lambda w)(f) = (\lambda a_n)\frac{d^n f}{dt^n} + \cdots + (\lambda a_0)f = \lambda \left(a_n \frac{d^n f}{dt^n} + \cdots + a_0 f\right) = a_n \frac{d^n(\lambda f)}{dt^n} + \cdots + a_0(\lambda f) = (\lambda w)f. \ \square$$

3) $w, w', w'' \in W$ を $w = a_n \frac{d^n}{dt^n} + \cdots + a_0$, $w' = b_n \frac{d^n}{dt^n} + \cdots + b_0$, $w'' = c_n \frac{d^n}{dt^n} + \cdots + c_0$ で定め, $\lambda, \mu \in K$ とする.

(1) $(w+w')+w'' = \{(a_n+b_n)+c_n\}\frac{d^n}{dt^n} + \{(a_0+b_0)+c_0\} = \{a_n+(b_n+c_n)\}\frac{d^n}{dt^n} + \{a_0+(b_0+c_0)\} = w+(w'+w''),$

(2) $w + w' = (a_n + b_n)\frac{d^n}{dt^n} + \cdots (a_0 + b_0) = (b_n + a_n)\frac{d^n}{dt^n} + \cdots (b_0 + a_0) = w' + w,$

(3) $a_0, \ldots, a_n = 0$ なる w を 0 とすると, 任意の $w \in W$ に対し $w =,$

(4) 任意の $w \in W$ に対し, $w' = (-a_n)\frac{d^n}{dt^n} + \cdots + (-a_0)$ とおくと, $w+w' = \{a_n+(-a_n)\}\frac{d^n}{dt^n} + \{a_0+(-a_0)\} = 0,$

(5) $(\lambda+\mu)w = (\lambda+\mu)a_n\frac{d^n}{dt^n} + \cdots + (\lambda+\mu)a_0 = (\lambda a_n + \mu a_n)\frac{d^n}{dt^n} + \cdots + (\lambda a_0 + \mu a_0) = \lambda w + \mu w,$

(6) $\lambda(w+w') = \lambda(a_n + b_n)\frac{d^n}{dt^n} + \cdots + \lambda(a_0 + b_0) = (\lambda a_n + \lambda b_n)\frac{d^n}{dt^n} + \cdots + (\lambda a_0 + \lambda b_0) = \lambda w + \lambda w',$

(7) $(\lambda\mu)w = (\lambda\mu)a_n\frac{d^n}{dt^n} + \cdots + (\lambda\mu)a_0 = \lambda(\mu a_n)\frac{d^n}{dt^n} + \cdots + \lambda(\mu a_0) = \lambda(\mu w)$

(8) $(1 \cdot w) = (1 \cdot a_n)\frac{d^n}{dt^n} + \cdots + (1 \cdot a_0) = a_n\frac{d^n}{dt^n} + \cdots + a_0 = w$

(1)〜(8) により, V は $\mathbb{R}$-線型空間である. $\square$

問 6.5.

1) $$W_1 + W_2 = \{\, w_1 + w_2 \mid w_1 \in W_1, w_2 \in W_2 \} = \left\{ \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \middle|\ \lambda_1, \lambda_2 \in K \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle,$$

$$W_1 + W_3 = \left\{ \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \middle|\ \lambda_1, \lambda_2 \in K \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle,$$

$$W_2 + W_3 = \left\{ \lambda_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \middle|\ \lambda_1, \lambda_2 \in K \right\} = \left\{ (\lambda_1 + \lambda_2) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \middle|\ \lambda_1, \lambda_2 \in K \right\}$$

$$= \left\{ \mu_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \middle|\ \mu_1, \mu_2 \in K \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle, (\lambda_1 = \mu_1 - \mu_2, \lambda_2 = \mu_2 \text{と置換})$$

$$W_1+W_2+W_3=\left\{\lambda_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+\lambda_2\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+\lambda_3\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\middle|\ \lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\in K\right\}$$
$$=\left\{\lambda_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+(\lambda_2+\lambda_3)\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+\lambda_3\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\middle|\ \lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\in K\right\}$$
$$=\left\{\mu_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+\mu_2\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+\mu_3\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\middle|\ \mu_1,\mu_2,\mu_3\in K\right\}=\left\langle\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\rangle=K^3.$$
($\lambda_1=\mu_1,\lambda_2=\mu_2-\mu_3,\lambda_3=\mu_3$と置換)

2) $$W_1+W_2=\left\{\lambda_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+\lambda_2\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}\middle|\ \lambda_1,\lambda_2\in K\right\}=\left\langle\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}\right\rangle,$$
$$W_1+W_3=\left\{\lambda_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+\lambda_2\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+\lambda_3\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\middle|\ \lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\in K\right\}$$
$$=\left\{\mu_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+\mu_2\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+\mu_3\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\middle|\ \mu_1,\mu_2,\mu_3\in K\right\}=\left\langle\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\rangle=K^3,$$
($\lambda_1=\mu_1-\mu_2-\mu_3,\lambda_2=\mu_2,\lambda_3=\mu_3$と置換)
$$W_2+W_3=\left\{\lambda_1\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}+\lambda_2\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+\lambda_3\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\middle|\ \lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\in K\right\}$$
$$\left\{(\lambda_1+\lambda_2)\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+(-\lambda_1+\lambda_3)\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\middle|\ \lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\in K\right\}$$
$$=\left\{\mu_1\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+\mu_2\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\middle|\ \mu_1,\mu_2\in K\right\}=\left\langle\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right\rangle\ (\lambda_1=k\in K,\lambda_2=\mu_1-k,\lambda_3=\mu_2+k\text{ と置換})$$
$$W_1+W_2+W_3=W_1+(W_2+W_3)=W_1+W_3=K^3$$

問 6.6.

1) $p\in W_1\cap W_2$ について, $p=\lambda_1(x+1)=\lambda_2(x-2)$ なる $\lambda_1,\lambda_2\in K$ が存在する.

係数を比較して $\begin{cases}\lambda_1=\lambda_2\\ \lambda_1=-2\lambda_2\end{cases}$ $\therefore\begin{cases}\lambda_1=0\\ \lambda_2=0\end{cases}$ より $p=0$. 従って $W_1\cap W_2=\{0\}$.

また, $W_1+W_2=\{\,\lambda_1(x+1)+\lambda_2(x-2)\mid\lambda_1,\lambda_2\in K\}$
$=\{\,(\lambda_1+\lambda_2)x+(\lambda_1-2\lambda_2)\mid\lambda_1,\lambda_2\in K\}=\{\,\mu_1x+\mu_2\mid\mu_1,\mu_2\in K\}=K_1[x]$.

($\lambda_1=\dfrac{2\mu_1+\mu_2}{3},\lambda_2=\dfrac{\mu_1-\mu_2}{3}$と置換)

2) $p\in W_1\cap W_2$ について, $p=\lambda_1(x-1)=\lambda_2(x^2-3x+2)$ なる $\lambda_1,\lambda_2\in K$ が存在する.

係数を比較して $\begin{cases}\lambda_2=0\\ \lambda_1=-3\lambda_2\\ -\lambda_1=2\lambda_2\end{cases}$ $\therefore\begin{cases}\lambda_1=0\\ \lambda_2=0\end{cases}$ より $p=0$. 従って $W_1\cap W_2=\{0\}$.

また, $W_1+W_2=\left\{\,\lambda_1(x-1)+\lambda_2(x^2-3x+2)\,\middle|\,\lambda_1,\lambda_2\in K\right\}$
$=\{\,(x-1)(\lambda_2x+\lambda_1-2\lambda_2)\mid\lambda_1,\lambda_2\in K\}=\{\,(x-1)(\mu_1x+\mu_2)\mid\mu_1,\mu_2\in K\}=\{\,f\in K_2[x]\mid f(1)=0\}$.

($\lambda_1=2\mu_1+\mu_2,\lambda_2=\mu_1$と置換)

3) $p \in W_1 \cap W_2$ について, $p = \lambda_1(x^2-3x+2) = \lambda_2(x^2-4)$ なる $\lambda_1, \lambda_2 \in K$ が存在する.

係数を比較して $\begin{cases} \lambda_1 = \lambda_2 \\ -3\lambda_1 = 0 \\ 2\lambda_1 = -4\lambda_2 \end{cases} \quad \therefore \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \end{cases}$ より $p = 0$. 従って $W_1 \cap W_2 = \{0\}$.

また, $W_1 + W_2 = \left\{\, \lambda_1(x^2-3x+2) + \lambda_2(x^2-4) \,\middle|\, \lambda_1, \lambda_2 \in K \right\}$
$= \{\, (x-2)((\lambda_1+\lambda_2)x - \lambda_1 + 2\lambda_2) \mid \lambda_1, \lambda_2 \in K\} = \{\, (x-2)(\mu_1 x + \mu_2) \mid \mu_1, \mu_2 \in K\}$
$= \{\, f \in K_2[x] \mid f(2) = 0\}$. ($\lambda_1 = \dfrac{2\mu_1 - \mu_2}{3}, \lambda_2 = \dfrac{\mu_1 + \mu_2}{3}$ と置換)

独り言：さっきからいちいち置換を明記しているのは $\lambda_1, \dots$ が K 全体を動くとき $\mu_1, \dots$ も K 全体を動くことをはっきりさせたいという意図なのですが, 解答に要らない気もしてきた.

問 6.7.

($\mathbb{R}^2$ は $\mathbb{R}$-線型空間である)

1) $x, x' \in \mathbb{R}$ とし, $w = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}, w' = \begin{pmatrix} x' \\ 0 \end{pmatrix}$ とおく. $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in W_1$ より, $W_1 \neq \emptyset$ であって,

$\forall w, w' \in W_1, w + w' = \begin{pmatrix} x + x' \\ 0 \end{pmatrix} \in W_1$ および $\forall w \in W_1, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda w = \begin{pmatrix} \lambda x \\ 0 \end{pmatrix} \in W_1$ が成り立つ.

従って W_1 は $\mathbb{R}^2$ の部分線型空間である. □

2) $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in W_2$ であるが, $2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \notin W_2$ より, W_2 は $\mathbb{R}^2$ の部分線型空間ではない. □

3) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in W_3$ であるが, $2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \notin W_2$ より, W_3 は $\mathbb{R}^2$ の部分線型空間ではない. □

4) $t, s \in \mathbb{R}$ とし, $w = \begin{pmatrix} t^3 \\ t^3 \end{pmatrix} w' = \begin{pmatrix} s^3 \\ s^3 \end{pmatrix}$ とおく. $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in W_4$ より, $W_4 \neq \emptyset$ であって,

$\forall w, w' \in W_4, w + w' = \begin{pmatrix} t^3 + s^3 \\ t^3 + s^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\sqrt[3]{t^3 + s^3})^3 \\ (\sqrt[3]{t^3 + s^3})^3 \end{pmatrix} \in W_4$ および

$\forall w \in W_4, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda w = \begin{pmatrix} \lambda t^3 \\ \lambda t^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\sqrt[3]{\lambda} t)^3 \\ (\sqrt[3]{\lambda} t)^3 \end{pmatrix} \in W_4$ が成り立つ. 従って W_4 は $\mathbb{R}^2$ の部分線型空間である. □

問 6.8.

$U_1 = \left\{ \begin{pmatrix} y_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \,\middle|\, y_1 \in \mathbb{R} \right\}, U_2 = \left\{ \begin{pmatrix} y_2 \\ -y_2 \end{pmatrix} \,\middle|\, y_2 \in \mathbb{R} \right\}$ とすると, $U_1 \neq U_2$ であって,
$W \cap U_1 = W \cap U_2 = 0$ より, $W \oplus U_1 = W + U_1 = \mathbb{R}^2, W \oplus U_2 = W + U_2 = \mathbb{R}^2$ となる. □

問 6.9.

1) $W_1 \cap W_3 + W_2 \cap W_3 = \{x + y \mid x \in W_1 \cap W_3, y \in W_2 \cap W_3\}$ であって,

任意の $x \in W_1 \cap W_3, y \in W_2 \cap W_3$ に対して, $x \in W_1, y \in W_2$ より $x + y \in W_1 + W_2$,

$x, y \in W_3$ および W_3 が V の部分線型空間であることにより $x + y \in W_3$ である.

$\therefore (W_1 + W_2) \cap W_3 \supset (W_1 \cap W_3 + W_2 \cap W_3)$

また $V = K^3, W_1 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle, W_2 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle, W_3 = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ 定めると,

$(W_1 + W_2) \cap W_3 = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle, (W_1 \cap W_3 + W_2 \cap W_3) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ となり等号は成り立たない. □

2) $(W_1 \cap W_2) + W_3 = \{x + y \mid x \in W_1 \cap W_2, y \in W_3\}$ であって, 任意の $x \in W_1 \cap W_2, y \in W_3$ に対して,

$x \in W_1, y \in W_3$ より $x + y \in W_1 + W_3$, $x \in W_2, y \in W_3$ より $x + y \in W_2 + W_3$ である.

$\therefore ((W_1 \cap W_2) + W_3) = (W_1 + W_3) \cap (W_2 + W_3)$

また V, W_1, W_2, W_3 を 1) と同様に定めると,

$(W_1 \cap W_2) + W_3 = W_3, (W_1 + W_3) \cap (W_2 + W_3) = K^3$ となり等号は成り立たない. □

問 6.10.

1) $\forall v, v' \in V, (f+g)(v+v') = f(v+v') + g(v+v') = (f(v) + f(v')) + (g(v) + g(v')) =$
$(f(v) + g(v)) + (f(v') + g(v')) = (f+g)(v) + (f+g)(v')$,

$\forall v \in V, \forall \lambda \in K, (f+g)(\lambda v) = f(\lambda v) + g(\lambda v) = \lambda f(v) + \lambda g(v) = \lambda(f(v) + g(v)) = \lambda((f+g)(v))$.

従って $f + g : V \to K$ は K-線型写像である. $\therefore f + g \in V^*$. □

2) $\forall v, v' \in V, \lambda f(v+v') = \lambda(f(v+v')) = \lambda(f(v) + g(v)) = \lambda(f(v)) + \lambda(f(v')) = \lambda f(v) + \lambda f(v')$,

$\forall v \in V, \forall \mu \in K, \lambda f(\mu v) = \lambda(f(\mu v)) = \lambda(\mu(f(v))) = \mu(\lambda(f(v))) = \mu(\lambda f(v))$.

従って $\lambda f : V \to K$ は K-線型写像である. $\therefore \lambda f \in V^*$. □

3) $f, g, h \in V^*, \lambda, \mu \in K, v \in V$ とする.

(1) $((f+g)+h)(v) = (f+g)(v) + h(v) = f(v) + g(v) + h(v) = f(v) + (g+h)(v) = (f + (g+h))(v)$. $\therefore (f+g)+h = f+(g+h)$,

(2) $(f+g)(v) = f(v) + g(v) = g(v) + f(v) = (g+f)(v)$. $\therefore f + g = g + f$,

(3) $o \in V^*$ を $o(v) = 0$ で定めると, $\forall f \in V^*, (o+f)(v) = o(v) + f(v) = f(v)$. $\therefore o + f = f$

(4) 任意の $f \in V^*$ に対し, $f' \in V^*$ を $f'(v) = -f(v)$ で定めると,
$(f+f')(v) = f(v) + f'(v) = f(v) + (-f(v)) = o(v)$. $\therefore f + f' = o$,

(5) $(\lambda+\mu)f(v) = (\lambda+\mu)(f(v)) = \lambda(f(v)) + \mu(f(v)) = \lambda f(v) + \mu f(v) = (\lambda f + \mu f)(v)$. $\therefore (\lambda+\mu)f = \lambda f + \mu f$,

(6) $\lambda(f+g)(v) = \lambda((f+g)(v)) = \lambda(f(v) + g(v)) = \lambda(f(v)) + \lambda(g(v)) = \lambda f(v) + \lambda g(v) = (\lambda f + \lambda g)(v)$. $\therefore \lambda(f+g) = \lambda f + \lambda g$,

(7) $(\lambda\mu)f(v) = (\lambda\mu)(f(v)) = \lambda(\mu(f(v))) = \lambda(\mu f(v)) = \lambda(\mu f)(v)$. $\therefore (\lambda\mu)f = \lambda(\mu f)$,

(8) $1 \cdot f(v) = 1 \cdot (f(v)) = f(v)$. $\therefore 1 \cdot f = f$.
(1)〜(8) により, V^* は K-線型空間である. □

問 6.10.

1) $f : V \to W, g : W \to K$ より $f^*(g) : V \to K$ であって,

$\forall v, v' \in V, f^*(g)(v+v') = g(f(v+v')) = g(f(v) + f(v')) = g(f(v)) + g(f(v')) = f^*(g)(v) + f^*(g)(v')$,

$\forall v \in V, \forall \lambda \in K, f^*(g)(\lambda v) = g(f(\lambda v)) = g(\lambda(f(v))) = \lambda(g(f(v))) = \lambda(f^*(g)(v))$.

従って $f^*(g) : V \to K$ は K-線型写像である. $\therefore f^*(g) \in V^*$. □

2) $v \in V$ とする.

$\forall g, g' \in W^*, f^*(g+g')(v) = (g+g')(f(v)) = g(f(v)) + g'(f(v)) = f^*(g)(v) + f^*(g')(v) = (f^*(g) + f^*(g'))(v)$,
$\therefore f^*(g+g') = f^*(g) + f^*(g')$,

$\forall g \in W^*, \forall \lambda \in K, f^*(\lambda g)(v) = (\lambda g)(f(v)) = \lambda(g(f(v))) = \lambda(f^*(g)(v))$, $\therefore f^*(\lambda g) = \lambda(f^*(g))$.

従って $f^* : W^* \to V^*$ は K-線型写像である. □

２００９年度数学 II 演習 (理 I 向け)　第 7 回　　　　　　　　'09/7/13（月）４限
'09/7/14（火）４限

以下では特に断らなければ K で $\mathbb{R}$ あるいは $\mathbb{C}$ を表す.

問 7.1. $t_1, t_2, t_3, t_4 \in K$ とし，K^4 の元 a_1, a_2, a_3 を

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ a_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ a_3 = \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \\ t_4 \end{pmatrix}$$

により定める．また，$A = (a_1\ a_2\ a_3)$ と置く．

1) $V = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ と置くと，$V = \{w \in K^4 \mid \exists v \in K^3,\ w = Av\}$ が成り立つことを示せ.
2) A' を A を右基本変形して得られる行列とすると，$V = \{w \in K^4 \mid \exists v \in K^3,\ w = A'v\}$ が成り立つことを示せ.
3) $\dim V = \mathrm{rank}(a_1\ a_2\ a_3)$ が成り立つことを示せ．また，この等しい値を求めよ.
4) V を簡潔に表せ.

問 7.2. $K[x]$ を x に関する K-係数の多項式全体のなす K-線型空間とする．即ち，

$$K[x] = \{a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \mid a_0, \cdots, a_n \in K\}$$

と置く．$f, g \in K[x]$ の時，$f + g$ は f と g の，次数が等しい項の係数同士を加えて得られ，また，$f \in K[x]$，$\lambda \in K$ の時，λf は f の各項を一斉に λ 倍して得られるのであった．ここで $f, g \in K[x]$ の時，$f +' g$ を函数としての f と g の和として定める．即ち，$f +' g$ を

$$(f +' g)(x) = f(x) + g(x)$$

であるような函数として定める．このとき，$f +' g = f + g$ が成り立つことを示せ．また，同様に $f \in K[x]$，$\lambda \in K$ の時 $\lambda \times' f$ を函数としての f と λ の積として定める．即ち，$\lambda \times' f$ を

$$(\lambda \times' f)(x) = \lambda f(x)$$

であるような函数として定める．すると $\lambda \times' f = \lambda f$ が成り立つことを示せ.
注：$+'$ や $\times'$ という記号は勿論ここだけの記号であって，通常は用いない.

問 7.3. 1) $f\colon K^{n+1} \to K_n[x]$ を

$$f \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$$

により定めると f は K-線型同型写像であることを示せ．また，f の逆写像を求めよ.

2) $g\colon K^{n+1}\to K_n[x]$ を

$$g\begin{pmatrix}a_0\\a_1\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}=a_0+(a_0+a_1)x+(a_0+a_1+a_2)x^2+\cdots+(a_0+\cdots+a_n)x^n$$

により定めると g は K-線型同型写像であることを示せ．また，g の逆写像を求めよ．

問 7.4. 線型写像 $\varphi: K^2\to K^3$, $\psi: K^3\to K^3$ をそれぞれ

$$\varphi\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2x+3y\\-x+y\\y\end{pmatrix},\quad \psi\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+z\\2x+y-3z\\x-y\end{pmatrix}$$

により定める．

1) $\psi\circ\varphi\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ を具体的に計算し，表現行列を求めよ．
2) $\psi\circ\varphi$，φ，ψ の表現行列をそれぞれ A, B, C とする．A, B, C を求め，$A=CB$ が成り立つことを確かめよ．

問 7.5. $f\colon\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ を $v=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3$ のとき $f(v)=\begin{pmatrix}x^n+y+z\\x+y\end{pmatrix}$ として定める．ただし n は正の整数であるとする．f が線型写像であることと $n=1$ であることは同値であることを示せ．

問 7.6. 1) 線型写像 $\varphi:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ は線型同型写像になりえないことを示せ．

注：次元の話に持ち込んでしまえばすぐに示せるが，上の主張を示すだけであれば実は次元に関する知識は必ずしも必要ない．例えば一次方程式の話に持ち込むこともできるし，あるいは次のように考えることもできる．φ が線型同型写像であると仮定し，$t=\varphi\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$，$s=\varphi\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ とおく．t や s が実数であることに注意すると，$\varphi^{-1}(t)$ と $\varphi^{-1}(s)$ は本来持つはずのない性質を持ってしまうことがわかる（議論の仕方によっては一次方程式の話に持ち込むのとほぼ同じことになる）．

2) $n>m$ とすると，任意の線型写像 $f\colon K^n\to K^m$ について f は単射でないことを示せ．
3) $n<m$ とすると，任意の線型写像 $f\colon K^n\to K^m$ について f は全射でないことを示せ．

問 7.7. $\mathbb{R}^3$ の元 v_1, v_2, v_3 について，条件

$$f(v_1)=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\ f(v_2)=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\ f(v_3)=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

を充たす $\mathbb{R}^3$ から $\mathbb{R}^3$ への線型写像について考える．

1) 以下のように v_1, v_2, v_3 を定める時，上の条件を充たす f が存在するならばそれを求め，存在しないのであればそのことを示せ．

(a) $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$.

(b) $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

2) $A = (v_1\ v_2\ v_3)$ とする．上の条件を充たす f が存在することと，A が正則であることは同値であることを示せ．また，A が正則な時に上の条件を充たす f の表現行列を A を用いて表せ．

問 7.8. $f \in \mathbb{R}_n[x]$ に対して $\varphi(f) \in \mathbb{R}_{2n}[x]$ を条件

$$\varphi(f)(x) = f(x^2)$$

により定める．

1) φ を $\mathbb{R}_n[x]$ から $\mathbb{R}_{2n}[x]$ への写像とみなすと φ は線型写像であることを示せ．
2) φ は単射であることを示せ．
3) 線型写像 $\psi\colon \mathbb{R}_{2n}[x] \to \mathbb{R}_n[x]$ であって $\psi \circ \varphi = \mathrm{id}_{\mathbb{R}_n[x]}$ が成り立つようなものを一つ求めよ．また，そのような ψ について $\varphi \circ \psi = \mathrm{id}_{\mathbb{R}_{2n}[x]}$ が成り立つかどうか調べよ．

問 7.9. 1) $f\colon K^8 \to K^3$ を

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 + 3x_4 + x_7 + 3x_8 \\ x_3 + 2x_4 + x_6 - x_8 \\ x_5 + 2x_6 + x_8 \end{pmatrix}$$

により定め，

$$V = \left\{ v \in K^8 \;\middle|\; f(v) = 0 \right\},$$
$$W = \left\{ w \in K^3 \;\middle|\; \exists\, v \in K^8,\ w = f(v) \right\}$$

と置く.（後期で定める記号を用いれば，$V = \operatorname{Ker} f$，$W = \operatorname{Im} f$ である.）このとき，V と W を簡潔に表し，それぞれの次元を求めよ．

2) $g\colon \mathbb{C}^5 \to \mathbb{C}^3$ を

$$g\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + \sqrt{-1}x_3 + x_5 \\ x_2 - 2x_3 \\ x_4 - 3\sqrt{-1}x_5 \end{pmatrix}$$

により定め，V，W も 1) と同様に定める．このとき，V と W を簡潔に表し，それぞれの次元を求めよ．

問 7.10. V, W を線型空間とし，U_1, U_2 を V の部分線型空間とする．また，$f_1\colon U_1 \to W$，$f_2\colon U_2 \to W$ をそれぞれ線型写像とする．

1) $V = U_1 \oplus U_2$ と直和分解されているとする．$v \in V$ の時 $v = u_1 + u_2$，但し $u_1 \in U_1$，$u_2 \in U_2$ と表して
$$f(v) = f_1(u_1) + f_2(u_2)$$
と置けば f は V から W への写像としてきちんと定まっていて（well-defined であるなどという），さらに線型写像であることを示せ．

2) 単に $V = U_1 + U_2$ であるとしても，必ずしも上の式で f をきちんと定めることができない．このような例を挙げよ．

問 7.11. 1) $t_1, t_2, t_3 \in K$ とし，K^3 の部分線型空間 W_1，W_2 をそれぞれ
$$W_1 = \left\langle \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \right\rangle, \quad W_2 = \left\langle \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}t_1\\t_2\\t_3\end{pmatrix} \right\rangle$$
により定める．$W_1 + W_2$ が直和であるための t_1, t_2, t_3 に関する条件を求めよ．また，このとき $K^3 = W_1 \oplus W_2 (= W_1 + W_2)$ が成り立つことを示せ．

2) $t_1, t_2, t_3, t_4, t_5 \in K$ とし，K^5 の部分線型空間 W_1，W_2，W_3 をそれぞれ
$$W_1 = \left\langle \begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix} \right\rangle, \quad W_2 = \left\langle \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix} \right\rangle \quad W_3 \left\langle \begin{pmatrix}t_1\\t_2\\t_3\\t_4\\t_5\end{pmatrix} \right\rangle$$
により定める．$W_1 + W_2 + W_3$ が直和であるための t_1, t_2, t_3, t_4, t_5 に関する条件を求めよ．また，このとき和空間を簡潔に表せ．

定義 7.12. f を $\mathbb{R}$ 上定義された実数値函数とする．f が奇函数であるとは任意の $x \in \mathbb{R}$ について $f(-x) = -f(x)$ が成り立つことをいい，また，f が偶函数であるとは任意の $x \in \mathbb{R}$ について $f(-x) = f(x)$ が成り立つことをいう．

問 7.13. $V = \{f \in \mathbb{R}[x] \mid f \text{ は奇函数}\}$，$W = \{f \in \mathbb{R}[x] \mid f \text{ は偶函数}\}$ と置く．

1) V と W は共に $\mathbb{R}[x]$ の部分線型空間であることを示せ．

2) $\mathbb{R}[x] = V \oplus W$ が成り立つことを示せ．

3) $\mathbb{R}[x] = V \oplus W$ であるから，$f \in \mathbb{R}[x]$ の時，$g \in V$ と $h \in W$ がそれぞれ唯一つ存在して $f = g + h$ が成り立つ．g と h を f を用いて簡潔に表せ．
注：2) の解き方によってはこちらも同時に解けてしまう．

（以上）

数学 II 演習　足助太郎教官　第 7 回　解答

問 7.1.

1) $V = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle = \{\, \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3 \mid \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in K \}$

$$= \left\{ (a_1\ a_2\ a_3)\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\\ \lambda_3\end{pmatrix} \middle| \ \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in K \right\} = \left\{ Av \,\middle|\, v \in K^3 \right\} = \left\{ w \in K^4 \,\middle|\, \exists v \in K^3, w = Av \right\}. \ \square$$

2) A' は A に右基本変形を施したものであるから, $P \in \mathrm{GL}_3(K)$ を用いて $A' = AP$ と表せる. $v' = Pv$ とすると, $A'v = APv = Av'$ であって, $v = P^{-1}v'$ より, v が K 全体を動くとき v' も K 全体を動く.

$\therefore \left\{ w \in K^4 \,\middle|\, \exists v \in K^3, w = A'v \right\} = \left\{ w \in K^4 \,\middle|\, \exists v' \in K^3, w = Av' \right\} = V. \ \square$

3) A を右基本変形して $A' = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & t_3 - t_1\\ 0 & 1 & t_4 - t_2\end{pmatrix}$ を得る. よって $t_1 \neq t_3$ または $t_2 \neq t_4$ のとき,

$$V = \left\{ v_1\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix} + v_2\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix} + v_3\begin{pmatrix}0\\0\\t_3-t_1\\t_4-t_2\end{pmatrix} \middle|\ v_1, v_2, v_3 \in K \right\}$$ より $V \cong K^3$,

$t_1 = t_3$ かつ $t_2 = t_4$ のとき $V = \left\{ v_1\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix} + v_2\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix} \middle|\ v_1, v_2 \in K \right\}$ より $V \cong K^2$.

また, A を基本変形して $A'' = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & t_3 - t_1\\ 0 & 0 & t_4 - t_2\end{pmatrix}$ を得る. $\therefore \mathrm{rank} A = \mathrm{rank} A'' = \begin{cases} 2 & (t_1 = t_3, t_2 = t_4)\\ 3 & (\text{otherwise})\end{cases}$

従って $\mathrm{dim} V = \mathrm{rank}(a_1\ a_2\ a_3) = \begin{cases} 2 & (t_1 = t_3, t_2 = t_4)\\ 3 & (\text{otherwise})\end{cases}$. $\square$

4) $t_1 = t_3, t_2 = t_4$ のとき $V = \left\langle \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix} \right\rangle$, $t_1 \neq t_3$ または $t_2 \neq t_4$ のとき $V = \left\langle \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\t_3-t_1\\t_4-t_2\end{pmatrix} \right\rangle$.

問 7.2.

$f, g \in K[x]$ を $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_0, g(x) = b_n x^n + \cdots + b_0$ とおくと,
$(f+g)(x) = (a_n + b_n)x^n + \cdots + (a_0 + b_0) = (a_n x^n + \cdots + a_0) + (b_n x^n + \cdots + b_0) = f(x) + g(x)$.
一方, 定義より $(f +' g)(x) = f(x) + g(x)$. $\therefore (f+g)(x) = (f +' g)(x)$ より $f + g = f +' g$. $\square$

また, $(\lambda f)(x) = (\lambda a_n)x^n + \cdots + (\lambda a_0) = \lambda(a_n x^n + \cdots + a_0) = \lambda \cdot f(x)$.
一方, 定義より $(\lambda \times' f)(x) = \lambda \cdot f(x)$. $\therefore (\lambda f)(x) = (\lambda \times' f)(x)$ より $\lambda f = \lambda \times' f$. $\square$

問 7.3.

1) $p \in K_n[x]$ に対し, $a_n = \{p$ の x^nの係数 $\}$ とするとき, $f' : K_n[x] \to K^{n+1}$ を $f'(p) = \begin{pmatrix}a_0\\ a_1\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}$ で定めると,

$f \circ f' = \mathrm{id}_{K_n[x]}$, $f' \circ f = \mathrm{id}_{K^{n+1}}$ より f は K-線型同型写像である. $\square$

また, f の逆写像 f^{-1} は f' である.

（註：$a_n = f^{(n)}(0)/n!$ としても同じです. 必ずしも式で表す必要はありませんが. ）

2) $p \in K_n[x]$ に対し,a_n を 1) と同様に定めるとき, $g' : K_n[x] \to K^{n+1}$ を $g'(p) = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 - a_0 \\ \vdots \\ a_n - a_{n-1} \end{pmatrix}$ で定めると,

$g \circ g' = \mathrm{id}_{K_n[x]}$, $g' \circ g = \mathrm{id}_{K^{n+1}}$ より g は K-線型同型写像である. □

また, g の逆写像 g^{-1} は g' である.

問 7.4.

1) $\psi \circ \varphi \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \psi \begin{pmatrix} 2x+3y \\ -x+y \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x+4y \\ 3x+4y \\ 3x+2y \end{pmatrix}$.

2) $CB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = A$. □

問 7.5.

1) f が線型写像であるとき, $\lambda \in \mathbb{R}$ として,

$f(\lambda v) = \begin{pmatrix} \lambda^n x^n + \lambda y + \lambda z \\ \lambda x + \lambda y \end{pmatrix} = \lambda f(v) = \begin{pmatrix} \lambda x^n + \lambda y + \lambda z \\ \lambda x + \lambda y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \lambda^n x^n = \lambda x^n$. よって $n = 1$ が必要.

逆に $n = 1$ のとき, $v, v' \in \mathbb{R}^3$ を $v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, v' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ とおくと,

$\forall v, v' \in \mathbb{R}^3, f(v+v') = \begin{pmatrix} (x+x') + (y+y') + (z+z') \\ (x+x') + (y+y') \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y+z \\ x+y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x'+y'+z' \\ x'+y' \end{pmatrix} = f(v) + f(v')$,

$\forall v \in \mathbb{R}^3, \forall \lambda \in K, f(\lambda v) = \begin{pmatrix} \lambda x + \lambda y + \lambda z \\ \lambda x + \lambda y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x+y+z \\ x+y \end{pmatrix} = \lambda f(v)$ より f は線型写像である.

従って,f が線型写像であることと $n = 1$ であることは同値である. □

問 7.6.

1) φ が線型同型写像であると仮定し, $t = \varphi \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, s = \varphi \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ とおくと, $\varphi^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ が存在して, $\varphi^{-1}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \varphi^{-1}(s) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ が成り立つ. φ^{-1} が写像であることにより $s \neq t$ である. いま $t \neq 0$ としてよい.

φ は実線型写像であることにより $\varphi \begin{pmatrix} s/t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \dfrac{s}{t} \varphi \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = s$ であるから, $\varphi^{-1}(s)$ は $\begin{pmatrix} s/t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ の 2 通りの値をとることになり, φ^{-1} が写像であることに反し矛盾. 従って $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ は線型同型写像になりえない. □

2) f の表現行列を $A = (a_{ij}) \in M_{m,n}(K)$ とする. f が単射, 即ち $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$ が成り立つことは, 方程式 $Av = w$ が解をもてばそれは唯一解であることと同値である.

f が単射であると仮定し, $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in K^n$ として, 方程式 $Av = 0$ を考える. $v = 0$ は自明な解である.

左基本変形によって解空間は不変であった. $n > m$ より, A を階段行列に直したとき, 基本ベクトルとならない列が存在する. その列を第 $j_1, \ldots, j_k$ 列とする.（但し $k = m - \mathrm{rank} A$）これを方程式に戻すと

$$\begin{cases} v_1 + a_{1,j_1}v_{j_1} + \cdots + a_{1,j_k}v_{j_k} = 0 \\ \vdots \\ v_1 + a_{1,j_1}v_{j_1} + \cdots + a_{1,j_k}v_{j_k} = 0 \end{cases}$$

故に $(v_{j_1}, \ldots, v_{j_k}) \neq 0$ に対し v_l $(l \neq j_1, \ldots, j_k)$ が定まり, このとき v は非自明な解となるから, 解の唯一性に反し矛盾. 従って f は単射ではない. □

3) f の表現行列を $A = (a_{ij}) \in M_{m,n}(K)$ とする. f が全射, 即ち $\forall w \in K^m, \exists v \in K^n(w = f(v))$ が成り立つことと, $V = \{w \in K^m \mid \exists v \in K^n, w = Av\} = K^m$ となることは同値である.

f が全射であると仮定し, $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in K^n, w = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_m \end{pmatrix} \in K^m$ とおく. 問 7.1. 2) より, A を右基本変形しても V は不変である. $n < m$ より, A を列階段行列に直したとき, 基本ベクトルとならない行が存在する. そのうちの 1 つを第 i 行とする. 第 i_k 行が第 k 次基本ベクトルであるとすると, $w_{i_k} = v_k$ $(k = 1, \ldots, r)$ および $w_i = a_{i,1}v_1 + \cdots + a_{i,r}v_r$ が成り立つ. 但し $r = \mathrm{rank}A$ である. 故に $w_{i_k} = v_k$ $(k = 1, \ldots, r)$ かつ $w_i \neq a_{i,1}v_1 + \cdots + a_{i,r}v_r$ なる $w \in K^m$ について $w \notin V$ となり, $V = K^m$ であることに反し矛盾.

従って f は全射ではない. □

問 7.7.

1) (a) $\begin{pmatrix} -23 & 3 & 19 \\ 17 & 2 & -14 \\ 16 & -2 & 13 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -23 & 3 & 19 \\ 17 & 2 & -14 \\ 16 & -2 & 13 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$

$\begin{pmatrix} -23 & 3 & 19 \\ 17 & 2 & -14 \\ 16 & -2 & 13 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ より, $\begin{pmatrix} -23 & 3 & 19 \\ 17 & 2 & -14 \\ 16 & -2 & 13 \end{pmatrix}$ なる行列表示を持つ f について,

$f(v_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, f(v_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, f(v_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ が成り立つ.

(b) 条件を充たす f が存在すると仮定する.

$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = -4\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} - 11\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$, および f が線型写像であることにより,

$f(v_1) = f(-4v_2 - 11v_3) = -4f(v_2) - 11f(v_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ -11 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ となり矛盾. 故に f は存在しない. □

2) f の表現行列を P とするとき, $PA = P(v_1\ v_2\ v_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E$ が成り立つ.

従ってそのような P が存在する条件は $A \in \mathrm{GL}_n(K)$ で, このとき $P = A^{-1}$ である.

問 7.8.

1) $\forall f, g \in \mathbb{R}_n[x], \varphi(f+g)(x) = (f+g)(x^2) = f(x^2) + g(x^2) = \varphi(f)(x) + \varphi(g)(x) = (\varphi(f) + \varphi(g))(x),$

$\forall f \in \mathbb{R}_n[x], \forall \lambda \in K, \varphi(\lambda f)(x) = \lambda f(x^2) = \lambda(f(x^2)) = \lambda(\varphi(f)(x)) = \lambda(\varphi(f))(x) = \lambda\varphi(f)(x)$

従って $\varphi : \mathbb{R}_n[x] \to \mathbb{R}_{2n}[x]$ は線型写像である. □

2) $f, g \in \mathbb{R}_n[x]$ に対し, $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_0, g(x) = b_n x^n + \cdots + b_0$ とおく.

$\varphi(f)(x) = \varphi(g)(x) \Leftrightarrow f(x^2) = g(x^2) \Leftrightarrow f(x^2) - g(x^2) = (a_n - b_n)x^{2n} + \cdots + (a_1 - b_1)x^2 + (a_0 - b_0)$

よって $\varphi(f) = \varphi(g)$ ならば $a_i = b_i$ $(i = 0, \ldots, n)$ 即ち $f = g$ が成り立つから, φ は単射である. □

3) $f(x)=a_{2n}x^{2n}+\cdots+a_0\in\mathbb{R}_{2n}[x]$ に対し, $\psi:\mathbb{R}_{2n}[x]\to\mathbb{R}_n[x]$ を $\psi(f)(x)=a_{2n}x^n+a_{2n-2}x^{n-1}+\cdots+a_2x+a_0$ で定めると, $\psi\circ\varphi=\mathrm{id}_{\mathbb{R}_n[x]}$ が成り立つ.
また, $g(x)=x^2+x$ なる $g\in\mathbb{R}_{2n}[x]$ に対し, $\varphi\circ\psi(g)(x)=x^2$ より, $\varphi\circ\psi(g)\neq g$. $\therefore\varphi\circ\psi\neq\mathrm{id}_{\mathbb{R}_{2n}[x]}$. $\square$

問 7.9.

1) V は $f(v)=0$ の解空間で, 下のように表されるから, $\mathrm{dim}V=5$.

$$V=\left\{v\in K^8\;\middle|\;\exists\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4,\lambda_5\in K,\lambda_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}+\lambda_2\begin{pmatrix}0\\-3\\-2\\1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}+\lambda_3\begin{pmatrix}0\\0\\-1\\0\\-2\\1\\0\\0\end{pmatrix}+\lambda_4\begin{pmatrix}0\\-1\\0\\0\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix}+\lambda_5\begin{pmatrix}0\\3\\-1\\0\\1\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

f の表現行列を $A\in M_{3,8}(K)$ とすると, $W=\left\{w\in K^3\;\middle|\;\exists v\in K^8,w=Av\right\}$ とかける. A に右基本変形を施しても W は不変であった. A を右基本変形することで $A'=(E_3\ O_{3,5})$ を得るから, $v=\begin{pmatrix}v_1\\\vdots\\v_8\end{pmatrix}$ として

$$W=\left\{w\in K^3\;\middle|\;\exists v\in K^8,w=A'v\right\}=\left\{\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix}\;\middle|\;v_1,v_2,v_3\in K\right\}=K^3.$$ よって $\mathrm{dim}W=3$.

2) 1) と同様にして, $V=\left\{v\in\mathbb{C}^5\;\middle|\;\exists\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{C},\lambda_1\begin{pmatrix}-\sqrt{-1}\\2\\1\\0\\0\end{pmatrix}+\lambda_2\begin{pmatrix}-1\\0\\0\\3\sqrt{-1}\\1\end{pmatrix}\right\}$. $\therefore\mathrm{dim}V=2$

また, g の表現行列を $B\in M_{3,5}$ とすると, B に右基本変形を施して $B'=(E_3\ O_{3,2})$ を得るから, 1) と同様に考えて, $W=\mathbb{C}^3,\mathrm{dim}V=3$.

問 7.10.

1) U_1+U_2 が直和であることから, $v=u_1+u_2$ という表し方は 1 通りである. 即ち, 任意の $v\in V$ に対し u_1,u_2 が一意的に定まり, さらに f_1,f_2 が写像であることにより, 各 u_1,u_2 に対し $f(u_1),f(u_2)$ は一意的に定まる.
従って各 v に対し $f(v)=f_1(u_1)+f_2(u_2)$ は一意的に定まるから, $f:V\to W$ は well-defined である. $\square$
$v,v'\in V,\lambda\in K$ とする. $u_1,u_1'\in U_1,u_2,u_2'\in U_2$ を用いて $v=u_1+u_2,v'=u_1'+u_2'$ と表されているとすると, $v+v'=(u_1+u_1')+(u_2+u_2')\ (u_1+u_1'\in U_1,u_2+u_2'\in U_2)$, $\lambda v=\lambda u_1+\lambda u_2\ (\lambda u_1\in U_1,\lambda u_2\in U_2)$ であって,
$\forall v,v'\in V,f(v+v')=f_1(u_1+u_1')+f_2(u_2+u_2')=(f_1(u_1)+f_1(u_1'))+(f_2(u_2)+f_2(u_2'))=$
$(f_1(u_1)+f_2(u_2))+(f_1(u_1')+f_2(u_2'))=f(v)+f(v')$,
$\forall v\in V,\forall\lambda\in K,f(\lambda v)=f_1(\lambda u_1)+f_2(\lambda u_2)=\lambda f_1(u_1)+\lambda f_2(u_2)=\lambda(f_1(u_1)+f_2(u_2))=\lambda f(v)$.
従って $f:V\to W$ は線型写像である. $\square$

2) $V=W=K^3,U_1=\left\langle\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right\rangle,U_2=\left\langle\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\rangle$ とし, f_1,f_2 を $f_1(u_1)=u_1,f_2(u_2)=2u_2$ で定める.

$v=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},u_1=u_2'=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},u_2=u_1'=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ とすると, $u_1,u_1'\in U_1,u_2,u_2'\in U_2$, $v=u_1+u_2=u_1'+u_2'$ だが,

$f(u_1)+f(u_2)=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},f(u_1')+f(u_2')=\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}$ となり一意的でない. よって f は well-defined ではない.

問 7.11.

1) $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \in W_1 \cap W_2$ より, $W_1 + W_2$ は直和にはなりえない. （出題ミス？）

2) $W_1 \cap W_2 = \{0\}$ であるから, $(W_1 + W_2) \cap W_3 = \{0\}$ となる条件を求めればよい.

$W_1 + W_2 = \left\langle \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix} \right\rangle$, $W_3 = \left\langle \begin{pmatrix}t_1\\t_2\\t_3\\t_4\\t_5\end{pmatrix} \right\rangle$ より, 求める条件は, $t_4 \neq 0$ または $t_5 \neq 0$.

また, このとき $W_1 + W_2 + W_3 = \left\langle \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\t_4\\t_5\end{pmatrix} \right\rangle$ である.

問 7.13.

1) $0 \in V$ より $V \neq \emptyset$ であって,

$\forall f, g \in V, (f+g)(-x) = f(-x) + g(-x) = -f(x) - g(x) = -(f(x) + g(x)) = -(f+g)(x)$ より $f + g \in V$,

$\forall f \in V, \lambda \in K, \lambda f(-x) = \lambda(f(-x)) = \lambda(-f(x)) = -(\lambda(f(x))) = -(\lambda f(x))$ より $\lambda f \in V$.

従って V は $\mathbb{R}[x]$ の部分線型空間である. W についても同様の演算により確かめられる. $\square$

2) $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_0$ とおく. $f \in V$ とすると, $f(-x) = -f(x) \Leftrightarrow a_0 = a_2 = \cdots = a_{2m} = \cdots = 0$

$\therefore V = \left\{ a_{2m-1}x^{2m-1} + \cdots + a_3 x^3 + a_1 x \;\middle|\; a_1, a_3, \ldots, a_{2m-1} \in \mathbb{R} \right\}$

また, $f \in W$ とすると, $f(-x) = f(x) \Leftrightarrow a_1 = a_3 = \cdots = a_{2m-1} = \cdots = 0$

$\therefore W = \left\{ a_{2m}x^{2m} + \cdots + a_2 x^2 + a_0 \;\middle|\; a_0, a_2, \ldots, a_{2m} \in \mathbb{R} \right\}$

故に $V \cap W = \{a_n x^n + \cdots + a_0 \mid a_0 = a_1 = \cdots = a_n = 0\} = \{0\}$ より $V + W$ は直和であって,

また $V + W = \{a_n x^n + \cdots + a_0 \mid a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}[x]$. 従って $V \oplus W = \mathbb{R}[x]$. $\square$

3) $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_0$ のとき, $f(x) - f(-x) = 2(a_{2m-1}x^{2m-1} + \cdots + a_3 x^3 + a_1 x)$,

$f(x) + f(-x) = 2(a_{2m}x^{2m} + \cdots + a_2 x^2 + a_0)$ より, g, h を $g(x) = \dfrac{f(x) - f(-x)}{2}, h(x) = \dfrac{f(x) + f(-x)}{2}$ で定めると, $g \in V, h \in W$ であって, $f = g + h$ が成り立つから, これが答えである.