2009 年度冬学期　数学 II 期末試験（足助担当）　解答

問 1． $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 4 & 3 & 8 \\ -2 & -2 & -5 \end{pmatrix}$ とする．

1) $P^{-1}AP$ が対角行列となるような正則な行列 P が存在するならばそのような P と $P^{-1}AP$ を求め, もし存在しないのであればそのことを示せ．ただし, $P^{-1}AP$ が対角行列となるような P として実行列がとれるのであれば P は実行列のうちから求め, 一方, 実行列にとれないのであればそのことを示すこと．
2) $V = \{ B \in M_3(\mathbb{R}) \mid AB = BA \}$ と置く．V は $M_3(\mathbb{R})$ の部分線型空間であることを示せ．ただし $M_3(\mathbb{R})$ は行列の和と定数倍に関して線型空間とみなす．
3) V の次元を求めよ．

（解答）

1) $\det(\lambda E - A) = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -2 & -4 \\ -4 & \lambda-3 & -8 \\ 2 & 2 & \lambda+5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda+1 & -2 & -4 \\ -\lambda-1 & \lambda-3 & -8 \\ 0 & 2 & \lambda+5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda+1 & -2 & -4 \\ 0 & \lambda-5 & -12 \\ 0 & 2 & \lambda+5 \end{vmatrix}$

$= (\lambda+1) \begin{vmatrix} \lambda-5 & -12 \\ 2 & \lambda+5 \end{vmatrix} = (\lambda-1)(\lambda+1)^2$. 故に A の固有値は $\lambda = 1, -1$.

固有値 λ に属する固有空間を $V(\lambda)$ とする．

(i) $\lambda = 1$ のとき

$E - A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 4 & 2 & 8 \\ -2 & -2 & -6 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ と左基本変形されるから,

$V(1) = \{ v \mid (E-A)v = 0 \} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$.

(ii) $\lambda = -1$ のとき

$E - A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 4 & 4 & 8 \\ -2 & -2 & -4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ と左基本変形されるから,

$V(-1) = \{ v \mid (-E-A)v = 0 \} = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$.

よって $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ とすれば, $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ となり,

実行列で対角化可能である．□

2) $AO = OA = O$ より $O \in V$ なので $V \neq \emptyset$.

$B_1, B_2 \in V$ とすると, $A(B_1 + B_2) = AB_1 + AB_2 = B_1A + B_2A = (B_1 + B_2)A$ より $B_1 + B_2 \in V$,

$B \in V, \lambda \in \mathbb{R}$ とすると, $A(\lambda B) = \lambda(AB) = \lambda(BA) = (\lambda B)A$ より $\lambda B \in V$.

故に V は $M_3(\mathbb{R})$ の部分線型空間である．

3) $Q=P^{-1}AP$ とおくと, $AP=PQ, P^{-1}A=QP^{-1}$.

$B\in V$ について, $AB=BA$ より, $P^{-1}ABP=P^{-1}BAP \Leftrightarrow QP^{-1}BP=P^{-1}BPQ$.

$P^{-1}BP=C=(c_{ij})$ とおくと, $QC=CQ$.

$QC=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ -c_{21} & -c_{22} & -c_{23} \\ -c_{31} & -c_{32} & -c_{33} \end{pmatrix}, QC=\begin{pmatrix} c_{11} & -c_{12} & -c_{13} \\ c_{21} & -c_{22} & -c_{23} \\ c_{31} & -c_{32} & -c_{33} \end{pmatrix}$ より $QC=CQ \Leftrightarrow c_{12},c_{13},c_{21},c_{31}=0$.

よって, $V'=\{C\in M_3(\mathbb{R}) \mid QC=CQ\}=\left\{ \begin{pmatrix} c_{11} & 0 & 0 \\ 0 & c_{22} & c_{23} \\ 0 & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix} \middle| \, c_{11},c_{22},c_{23},c_{32},c_{33} \right\}$.

故に $V=\left\{ PCP^{-1} \,\middle|\, C\in V' \right\}, \dim V'=5$ より $\underline{\dim V=5}$.

問 2. $\mathbb{R}_3[x]$ を高々3 次の実係数多項式のなす線型空間とし, $\varphi:\mathbb{R}_3[x]\to\mathbb{R}_3[x]$ を

$$\varphi(f)(x)=x^2\frac{d^2f}{dx^2}(x)+(x-1)\frac{df}{dx}(x)-4f(x)$$

により定める.

1) φ は線型写像であることを示せ.
2) $\operatorname{Ker}\varphi$ を求めよ.

（解答）

1) $f,g\in\mathbb{R}_3[x]$ に対し,

$$\begin{aligned}
&\varphi(f+g)(x)=x^2\frac{d^2(f+g)}{dx^2}(x)+(x-1)\frac{d(f+g)}{dx}(x)-4(f+g)(x)\\
&=x^2\left(\frac{d^2f}{dx^2}(x)+\frac{d^2g}{dx^2}(x)\right)+(x-1)\left(\frac{df}{dx}(x)+\frac{dg}{dx}\right)-4(f(x)+g(x))\\
&=\left(x^2\frac{d^2f}{dx^2}(x)+(x-1)\frac{df}{dx}(x)-4f(x)\right)+\left(x^2\frac{d^2g}{dx^2}(x)+(x-1)\frac{dg}{dx}(x)-4g(x)\right)\\
&=\varphi(f)(x)+\varphi(g)(x)=(\varphi(f)+\varphi(g))(x).\ \therefore \varphi(f+g)=\varphi(f)+\varphi(g).
\end{aligned}$$

$f\in\mathbb{R}_3[x], \lambda\in\mathbb{R}$ に対し,

$$\begin{aligned}
&\varphi(\lambda f)(x)=x^2\frac{d^2(\lambda f)}{dx^2}(x)+(x-1)\frac{d(\lambda f)}{dx}(x)-4(\lambda f)(x)=\lambda x^2\frac{d^2f}{dx^2}(x)+\lambda(x-1)\frac{df}{dx}(x)-4\lambda\cdot f(x)\\
&=\lambda\left(x^2\frac{d^2f}{dx^2}(x)+(x-1)\frac{df}{dx}(x)-4f(x)\right)=\lambda\cdot\varphi(f)(x)=(\lambda(\varphi(f)))(x).\ \therefore \varphi(\lambda f)=\lambda(\varphi(f)).
\end{aligned}$$

故に φ は線型写像である. $\square$

2) $f\in\mathbb{R}_3[x]$ を $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d\ (a,b,c,d\in\mathbb{R})$ であらわす. このとき,

$\varphi(f)(x)=x^2(6ax+2b)+(x-1)(3ax^2+2bx+c)-4(ax^3+bx^2+cx+d)=5ax^3-3ax^2-(2b+3c)x-(c+4d)$.

$$\therefore f\in\operatorname{Ker}\varphi \Leftrightarrow \begin{cases} 5a=0 \\ 3a=0 \\ 2b+3c=0 \\ c+4d=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=-6d \\ c=-4d \end{cases}.\ \therefore \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}\ (\lambda\in\mathbb{R}).$$

故に $\underline{\operatorname{Ker}\varphi=\langle 6x^2+4x-1\rangle}$.

問3． $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ とする．また, $\mathbb{R}^3$ には標準計量（標準ユークリッド計量）を入れる．

1) A は 1 を固有値に持つことを示せ．また, 1 に属する A の固有空間を求めよ．これを V とする．
2) $\mathbb{R}^3$ における V の直交補空間 $V^\perp$ を求めよ．
3) $v \in V^\perp$ であれば $Av \in V^\perp$ であることを示せ．
4) $V^\perp$ から $V^\perp$ 自身への線型写像 f を $f(v) = Av$ により定める．$V^\perp$ の正規直交基底を一組選び, それに関する f の表現行列を求めよ．
5) A をユニタリ行列で対角化せよ．

（解答）

1) $\det(\lambda E - A) = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & -1 \\ -1 & \lambda & 0 \\ 0 & -1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^3 - 1 = (\lambda - 1)(\lambda^2 + \lambda + 1)$ より,

$\lambda = 1$ は A の固有多項式の根の一つ．故に A は 1 を固有値にもつ．

また, $E - A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ と左基本変形されるから,

$$V = \{ v \mid (E - A)v = 0 \} = \underline{\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle} .$$

2) $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in V^\perp$ とすると, $\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = x_1 + x_2 + x_3 = 0$.

$$\therefore V^\perp \underline{\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle}.$$

3) $v = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in V^\perp$ について, $\left\langle v \middle| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = x_1 + x_2 + x_3 = 0$.

一方 $Av = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ より, $\left\langle Av \middle| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = x_3 + x_1 + x_2 = 0.$ $\therefore Av \perp \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. $\therefore Av \in V^\perp$. $\square$

4) $w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, w_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ とおく,

$$v_1 = \frac{w_1}{\|w_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},\ w_2' = w_2 - \langle v_1 | w_2 \rangle v_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},\ v_2 = \frac{w_2'}{\|w_2\|} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

以上の操作により $V^\perp$ の正規直交基底 $\mathcal{V} = \{v_1, v_2\}$ を得る．

また, $f(v_1) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} v_1 + \frac{\sqrt{3}}{2} v_2, f(v_2) = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = -\frac{\sqrt{3}}{2} v_1 - \frac{1}{2} v_2$ より,

f の $\mathcal{V}$ に関する表現行列は $\underline{\begin{pmatrix} -1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}}$.

5) $\det(\lambda E - A) = \lambda^3 - 1$ より, A の固有値は $\lambda = 1, \omega, \omega^2$. (但し $\omega = \dfrac{-1+\sqrt{-3}}{2}$)

(i) $\lambda = 1$ のとき 1) より $V(1) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$.

(ii) $\lambda = \omega$ のとき $\omega E - A = \begin{pmatrix} \omega & 0 & -1 \\ -1 & \omega & 0 \\ 0 & -1 & \omega \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\omega^2 \\ 0 & 1 & -\omega \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ と左基本変形されるから,

$V(\omega) = \{ v \mid (\omega E - A)v = 0 \} = \left\langle \begin{pmatrix} \omega^2 \\ \omega \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$.

(iii) $\lambda = \omega^2$ のとき $\omega^2 E - A = \begin{pmatrix} \omega^2 & 0 & -1 \\ -1 & \omega^2 & 0 \\ 0 & -1 & \omega^2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\omega \\ 0 & 1 & -\omega^2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ と左基本変形されるから,

$V(\omega^2) = \left\{ v \,\middle|\, (\omega^2 E - A)v = 0 \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} \omega \\ \omega^2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$.

従って $\left\{ \dfrac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \dfrac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} \omega^2 \\ \omega \\ 1 \end{pmatrix}, \dfrac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} \omega \\ \omega^2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ はそれぞれの固有ベクトルのなす正規直交系であるから,

ユニタリ行列 $\dfrac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & \omega^2 & \omega \\ 1 & \omega & \omega^2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ を用いて $U^{-1}AU = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \omega & 0 \\ 0 & 0 & \omega^2 \end{pmatrix}$ と対角化される. □

問 4 . $\mathbb{R}^3$ の座標を (x_1, x_2, x_3) とする.

1) $\mathbb{R}^3$ 上の二次形式

$$3x_1^2 - x_2^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3$$

の符号を求めよ.

2) Q を $\mathbb{R}^3$ 上の二次形式とし, $\mathrm{sgn}Q = (r, s)$ とする. $V = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} \middle| \; x_1, x_2 \in \mathbb{R} \right\}$ とし, V 上の二次形式 q を $v \in V$ に対して $q(v) = Q(v)$ として定める（これが二次形式であることは認めてよい）. 主張

$$\mathrm{sgn}q = (1, 0) \text{ であるならば } r + s \leq 2 \text{ である}$$

が正しければ証明し, 正しくないならば反例を挙げよ. 反例を挙げる場合には挙げた例が反例となっていることも示すこと.

（解答）

1) $Q = 3x_1^2 - x_2^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3$
$= \dfrac{1}{3}(3x_1 - x_2 + x_3)^2 - \dfrac{4}{3}x_2^2 - \dfrac{4}{3}x_2x_3 - \dfrac{1}{3}x_3^2 = \dfrac{1}{3}(3x_1 - x_2 + x_3)^2 - \dfrac{1}{3}(2x_2 - x_3)^2$.

$y_1 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}(3x_1 - x_2 + x_3), y_2 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}(2x_2 - x_3), y_3 = x_3$ とすると,

$Q = y_1^2 - y_2^2$. 従って Q の符号は $\underline{(1, 1)}$.

2) 主張は正しくない. 実際, $Q(x) = {}^t\!xTx$ を $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ で定めると, $v = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} \in V$ に対して,

$q(v) = Q(v) = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2$ より $\mathrm{sgn}q = (1, 0)$ である.

一方, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ に対して, $Q(x) = x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 + x_2^2 - (x_2 + x_3)^2$

より $\mathrm{sgn}Q = (2, 1)$ なので, $s + t > 2$ となりこれが反例である. □

補足：問 4.2) の反例の見つけ方

$Q(x) = {}^t\!xTx$（但し $T = (t_{ij})$ は 3 次対称行列）とすると, $v = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} \in V$ に対し,

$Q(x) = t_{11}x_1^2 + 2t_{12}x_1x_2 + t_{22}x_2^2 = t_{11}\left(x_1 + \dfrac{t_{12}}{t_{11}}\right)^2 + \dfrac{t_{11}t_{22} - t_{12}^2}{t_{11}} x_2^2 \ (t_{11} \neq 0)$.

故に $t_{11} \neq 0$ かつ $t_{11}t_{22} - t_{12}^2 = 0$ のとき $\mathrm{sgn}q = (1, 0)$.

一方, $s + t \leq 2 \Leftrightarrow s + t \neq 3 \Leftrightarrow T$ は 0 を固有値に持つ $\Leftrightarrow \det T = 0$.

$\det T = \begin{vmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{12} & t_{22} & t_{23} \\ t_{13} & t_{23} & t_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t_{11}t_{22} & t_{12}t_{22} & t_{13}t_{22} \\ t_{12}^2 & t_{12}t_{22} & t_{12}t_{23} \\ t_{13} & t_{23} & t_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & t_{13}t_{22} - t_{12}t_{23} \\ t_{12}^2 & t_{12}t_{22} & t_{12}t_{23} \\ t_{13} & t_{23} & t_{33} \end{vmatrix}$

$= (t_{13}t_{22} - t_{12}t_{23}) \begin{vmatrix} t_{12}^2 & t_{12}t_{22} \\ t_{13} & t_{23} \end{vmatrix} = t_{12}(t_{13}t_{22} - t_{12}t_{23})^2$ より,

$t_{11}t_{22} - t_{12}^2 = 0, t_{11} \neq 0, t_{12} \neq 0, t_{13}t_{22} - t_{12}t_{23} \neq 0$ なる T について反例が得られる.