とある授業の宇宙言語

ケスアコード

09年度冬学期・数学IIシケプリ「とある授業の宇宙言語（ケスアコード）」

「ジャッジメントですの！」（テスト的な意味で）

ども, 数 II シケ対の木村です. 相変わらずタイトルはネタですが中身はガチ（のつもり）なので活用してやってください. 夏学期とは違い全範囲をカバーしようという目論見です. 見れば単位は来るとは思いますが不可っても責任は取れません＞＜

追記：訂正箇所は赤字で訂正してあります. (最終更新日：10/02/08)

1　核・像

1.1　定義

V, W を線型空間とし, $f : V \to W$ を線型写像とする. このとき,
$\mathrm{Ker}\, f = \{v \in V \mid f(v) = 0\}$ を f の**核**(Kernel) といい,
$\mathrm{Im}\, f = \left\{ w \in W \,\middle|\, {}^{\exists}v \in V, w = f(v) \right\} = \{ f(v) \mid v \in V\}$ を f の**像**(Image) という.

$\mathrm{Ker}\, f$ の定義にある 0 は W の零元です. 尚, $\mathrm{Ker}\, f \subset V, \mathrm{Im}\, f \subset W$ はそれぞれ部分線型空間となります.

1.2　核, 像の次元と rank

$A \in M_{m,n}(K)$ に対し, $f_A : K^n \to K^m$ を $f(v) = Av \ (v \in K^n)$ で定めるとき,

$$\dim \mathrm{Ker}\, f_A = n - \mathrm{rank}\, A, \dim \mathrm{Im}\, f_A = \mathrm{rank}\, A.$$

逆にこちらを rank の定義とすることもあります.

一般に, V, W: 線型空間, $f : V \to W$: 線型写像に対し,

$$\dim V - \dim \mathrm{Ker}\, f = \dim \mathrm{Im}\, f$$

が成り立ちます. **（次元公式）**

1.3　例題

定義さえ知ってれば問題ないでしょうがまぁ一応. 後期第 3 回演習問 5.（一部省略）を上記公式を用いて解いてみます. 定義に戻ってもできるようにしておきましょう（第 3 回演習解答参照）.

（問題）

次の線型写像 $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ の核・像の次元を決定せよ。

$$f \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 + x_2 + x_3 \\ 5x_1 - 2x_2 + 3x_3 \\ -3x_1 + 3x_2 - 2x_3 \end{pmatrix}.$$

（解答）

$f \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 5 & -2 & 3 \\ -3 & 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ より, $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 5 & -2 & 3 \\ -3 & 3 & -2 \end{pmatrix}$ とすると $f(v) = Av$.

A を右基本変形して $A' = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 0 & -9 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ を得るから,

$\dim \mathrm{Im}\, f = \mathrm{rank}\, A = \mathrm{rank}\, A' = 2, \ \dim \mathrm{Ker}\, f = 3 - \mathrm{rank}\, A = 1.$ //

2　基底

2.1　線型独立, 生成系

$V : K$-線型空間, $v_1, \ldots, v_r \in V, \lambda_1, \ldots, \lambda_r \in K$ とする.

$\displaystyle\sum_{i=1}^{r} \lambda_i v_i = 0 \Rightarrow \lambda_i, {}^\forall i$ が成り立つとき, $v_1, \ldots, v_r$ は K 上**線型独立**（一次独立）であるという.

また, $V = \langle v_1, \ldots, v_r \rangle = \{\, \lambda_1 v_1 + \cdots \lambda_r v_r \mid \lambda_1, \ldots, \lambda_r \in K\}$ であるとき,
$v_1, \ldots, v_r$ を V の K 上の**生成系**と呼び, $v_1, \ldots, v_r$ は V を K 上の生成するという.

なお, $v_1, \ldots, v_r$ が線型独立でないとき, $v_1, \ldots, v_r$ は K 上線型従属であるといいます.
また, $V = \{0\}$ の時には, V の生成系としては空集合を考えるのが一般的です.

2.2　基底と次元

V : K-線型空間, $V \neq \{0\}$ のとき, 順序づけられた V の元の組 $\{v_1, \ldots, v_r\}$ であって,

1) $v_1, \ldots, v_r$ は V を K 上生成し,

2) $v_1, \ldots, v_r$ は K 上線型独立である

とき, $\{v_1, \ldots, v_r\}$ を V の K 上の**基底**という.

今学期の重要概念の一つです. 基底であることをいうには, この 2 つを示す（確かめる）必要があります.

基底の例：$\{e_1, \ldots, e_n\}$ は K^n の基底である. (e_i:K^nの第 i 基本ベクトル) この基底を K^n の**標準基底**という.

なお, ある線型空間 V に対し, V の基底のとり方は一意的とは限りませんが, V の基底として選べる V の元の個数は一定です. その元の個数を V の**次元**とよびます. 夏学期における次元の定義と同値です.

2.3　例題

（問題）
先ほどの例題 (1.3) における f の核・像の基底を 1 組ずつ挙げよ.
（解答）
A は先ほどと同様とし, $A = (a_1\ a_2\ a_3)$ とおく. A を右基本変形して $A' = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 0 & -9 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ を得るから,

a_1, a_3 は線型独立, および $a_2 = 5a_1 - 9a_3$ となる. 故に

$$\operatorname{Im} f = \left\{ f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = (x_1 + 5x_2)a_1 + (x_3 - 9x_2)a_3 \,\middle|\, x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R} \right\} = \langle a_1, a_3 \rangle$$

よって $\{a_1, a_3\}$ は $\operatorname{Im} f$ の基底である.

また, $\operatorname{Ker}(f) = \left\{ v \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, A'v = 0 \right\} = \left\{ \lambda_1 \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix} \,\middle|\, \lambda_1 \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix} \right\rangle$ より,

$\left\{ \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix} \right\}$ は $\operatorname{Ker} f$ の基底である. //

それぞれ基底の元の個数が, 先ほど求めた次元と一致していることを確かめましょう.

3　表現行列・基底の変換

3.1　表現行列

V, W:線型空間, $f : V \to W$:線型写像, $\dim V = n, \dim W = m$,
$\mathcal{V} = \{v_1, \ldots, v_n\} : V$ の基底, $\mathcal{W} = \{w_1, \ldots, w_m\} : W$ の基底とする.

$$
\begin{aligned}
f(v_1) &= a_{11}w_1 + a_{21}w_2 + \cdots + a_{m1}w_m, \\
f(v_2) &= a_{12}w_1 + a_{22}w_2 + \cdots + a_{m2}w_m, \\
&\vdots \\
f(v_n) &= a_{1n}w_1 + a_{21}w_2 + \cdots + a_{mn}w_m.
\end{aligned}
$$

のとき, $A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ を f **の** $\mathcal{V}, \mathcal{W}$ **に関する表現行列**という.

v_i, w_i を並べたものをベクトルと見なして $\begin{pmatrix} f(v_1) & \cdots & f(v_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1 & \ldots & w_m \end{pmatrix} A$ と表されるような A と思っても良いです. 尚, $W = V$, $\mathcal{V} = \mathcal{W}$ のときは f の $\mathcal{V}$ に関する表現行列という呼び方をします.

ここでやっていることというのは, 例えば $v \in V$ が $\mathcal{V}$ によって $v = x_1v_1 + \cdots + x_nv_n$ と表されるとき, v を $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in K^n$ とみなし, $f(v) \in W$ が $\mathcal{W}$ により $f(v) = y_1w_1 + \cdots + y_mw_m$ と表されるとき $f(v)$ を $\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} \in K^m$ とみなすことにより, f を K^n から K^m への写像だと思おうという話です.

（右図参照. ただし $g_{\mathcal{V}} : K^n \to V$ は $g \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1v_1 + \cdots + x_nv_n$. $g_{\mathcal{W}}$ も同様）

$$
\begin{tikzcd}
K^n \arrow[r, "f_A"] \arrow[d, "g_{\mathcal{V}}"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & K^m \arrow[d, "g_{\mathcal{W}}"] \\
V \arrow[r, "f"'] & W
\end{tikzcd}
$$

このことが定義と合致することは, 手を動かして確かめるか, もしくは結果を信用して認めるかしましょう.
また, $V = K^n, W = K^m$ のとき, 標準基底に関する表現行列は, 今までの意味での表現行列と一致します.

3.2　基底の変換

$\mathcal{V} = \{v_1, \ldots, v_n\}, \mathcal{V}' = \{v'_1, \ldots, v'_n\}$ をともに V の基底とするとき, $v'_i = f(v_i)$ $(i = 1, \ldots, n)$ であるような $f : V \to V$ の $\mathcal{V}$ に関する表現行列を $\mathcal{V}$ **から** $\mathcal{V}'$ **の基底の変換行列**とよぶ.

先程と同様に書けば

$$
\begin{aligned}
v'_1 &= a_{11}v_1 + a_{21}v_2 + \cdots + a_{n1}v_n, \\
v'_2 &= a_{12}v_1 + a_{22}v_2 + \cdots + a_{n2}v_n, \\
&\vdots \\
v'_n &= a_{1n}v_1 + a_{21}v_2 + \cdots + a_{nn}v_n.
\end{aligned}
$$

となるときの $A = (a_{ij})$ のことをいいます.

（おはなし）

V, W:線型空間, $f : V \to W$:線型写像, $\mathcal{V}, \mathcal{V}' : V$ の基底, $\mathcal{W}, \mathcal{W}' : W$ の基底,
$P : \mathcal{V}$ から $\mathcal{V}'$への基底の変換行列, $Q : \mathcal{W}$ から $\mathcal{W}'$への基底の変換行列,
$A : f$ の $\mathcal{V}, \mathcal{W}$ に関する変換行列, $A' : f$ の $\mathcal{V}', \mathcal{W}'$に関する変換行列 のとき,
$A' = Q^{-1}AP$ が成り立つ.

$$
\begin{tikzcd}
K^n \arrow[rrr, "A"] \arrow[dr, "g_V"'] & & & K^m \arrow[dl, "g_W"] \\
& V \arrow[r, "f"] \arrow[from=1-1, to=1-4, phantom, shift right=6ex, "\circlearrowleft"] \arrow[from=3-1, to=3-4, phantom, shift left=6ex, "\circlearrowleft"] & W & \\
K^n \arrow[uu, "P"] \arrow[ur, "g'_V"] \arrow[rrr, "A'"'] & & & K^m \arrow[uu, "Q"'] \arrow[ul, "g'_W"']
\end{tikzcd}
$$

この関係は理論上ではこの後の対角化に関わってきますが, 差し当たり覚えなくても良いと思います.

3.3 例題

08 年の過去問の問 2. を違う問題にアレンジしました.

（問題）

$\mathbb{R}_3[x]$ を高々3 次の実係数多項式のなす線型空間とし, $\varphi : \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}_3[x]$ を

$$\varphi(f)(x) = x^2 \frac{d^2 f}{dx^2}(x) + (x-1)\frac{df}{dx}(x) - 4f(x)$$

により定める. このとき, $\mathbb{R}_3[x]$ の自然な基底 $\{1, x, x^2, x^3\}$ に関する f の表現行列を求めよ.

（解答）

$\{1, x, x^2, x^3\} = \{f_1, f_2, f_3, f_4\}$ とする.

$\varphi(f_1)(x) = -4 \qquad = -4f_1$

$\varphi(f_2)(x) = -3x - 1 \quad = \quad -f_1 - 3f_2$

$\varphi(f_3)(x) = -2x \qquad = \qquad -2f_2$

$\varphi(f_4)(x) = 5x^3 - 3x^2 = \qquad -3f_3 + 5f_4$

従って f の $\{1, x, x^2, x^3\}$ に関する表現行列は $= \begin{pmatrix} -4 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

4 計量線型空間

4.1 計量

V : K-線型空間とする. $v, w \in V$ に対し $\langle v|w\rangle \in K$ を与える対応が存在して以下の性質を持つとする.

1) $\langle v_1 + v_2|w\rangle = \langle v_1|w\rangle + \langle v_2|w\rangle, \langle v|w_1 + w_2\rangle = \langle v|w_1\rangle + \langle v|w_2\rangle$ $({}^\forall v, v_1, v_2, w, w_1, w_2 \in V)$

2) $\langle v|\lambda w\rangle = \lambda\langle v|w\rangle$, $\langle \mu v|w\rangle = \overline{\mu}\langle v|w\rangle$ $({}^\forall v, w \in V, \lambda, \mu \in K)$

3) $\langle v|w\rangle = \overline{\langle w|v\rangle}$ $({}^\forall v, w \in V)$

4) $\langle v|v\rangle \geq 0$ $({}^\forall v \in V)$, $\langle v|v\rangle = 0 \Leftrightarrow v = 0$

このとき $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ を, $K = \mathbb{R}$ のとき **（ユークリッド）計量**, $K = \mathbb{C}$ のとき**エルミート計量**などと呼ぶ.

V に計量が定まっているとき, $(V, \langle \cdot \mid \cdot \rangle)$ を**計量線型空間**とよぶ. $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ が明らかなときは単に V で表す.

線型空間のときと同様,「〜が計量をなすことを示せ」ときたら基本的には 1)〜4) の条件を check です.
注意点としては, $K = \mathbb{C}$ のときに 2),3) の条件において複素共役を忘れないようにしましょう.
また, 2) を $\langle v|\lambda w\rangle = \overline{\lambda}\langle v|w\rangle, \langle \mu v|w\rangle = \mu\langle v|w\rangle$ とする流儀もあるので, こちらも注意してください.

計量の例：$v, w \in K^n$ に対し, $\langle v|w\rangle = v^* w$ (但し $v^* = {}^t\overline{v}$) と定めると, $\langle\cdot\,|\,\cdot\rangle$ は K^n 上の計量を与える. この $\langle\cdot\,|\,\cdot\rangle$ を K^n の**標準計量**とよぶ.

4.2 ノルム・Cauchy-Schwarz の不等式

$(V, \langle\cdot\,|\,\cdot\rangle)$ を計量線型空間とする.
$v \in V$ のとき,$\|v\| = \sqrt{\langle v|v\rangle}$ を計量 $\langle\cdot\,|\,\cdot\rangle$ に関する v の**ノルム**（長さ）と呼ぶ.

ノルムそのものの定義もあるのですが講義で扱わないので割愛というか自重. $V = K^n$ で標準計量を考えるとき, ノルムは普通の「長さ」と一致します（標準的なノルム, 2-ノルムなどという）.

$(V, \langle\cdot\,|\,\cdot\rangle)$ を計量線型空間, $\|\cdot\|$ を $\langle\cdot\,|\,\cdot\rangle$ から定まるノルム とする. このとき
$^\forall v, w \in V,\ |\langle v|w\rangle| \leq \|v\|\,\|w\|$
が成り立つ.**（Cauchy-Schwarz の不等式）**

4.3 例題

計量を直接的に扱う問題はあまり出ないとは思いますが, この証明は覚えとくべきかなと思い載せてみます.
（問題）
$(V, \langle\cdot\,|\,\cdot\rangle)$ を計量線型空間, $\|\cdot\|$ を $\langle\cdot\,|\,\cdot\rangle$ から定まるノルム とする. このとき
$^\forall v, w \in V,\ \|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$
が成り立つことを示せ.（三角不等式）
（解答）
$|\langle v|w\rangle| \geq \mathrm{re}\,\langle v|w\rangle$ であるから, Cauchy-Schwarz の不等式より,
$\|v + w\|^2 = \|v\|^2 + \langle v|w\rangle + \langle w|v\rangle + \|w\|^2 = \|v\|^2 + 2\,\mathrm{re}\,\langle v|w\rangle + \|w\|^2$
$\leq \|v\|^2 + 2|\langle v|w\rangle| + \|w\|^2 \leq \|v\|^2 + 2\|v\|\,\|w\| + \|w\|^2 = (\|v\| + \|w\|)^2$
が成り立つ. □

5 （正規）直交系・Gram-Schmidt の直交化法

5.1 （正規）直交系・（正規）直交基底

$(V, \langle\cdot\,|\,\cdot\rangle)$ を計量線型空間, $\|\cdot\|$ を $\langle\cdot\,|\,\cdot\rangle$ から定まるノルム とする. $v_1, \ldots, v_r \in V$ が

1) $^\forall i,\ v_i \neq 0$
2) $^\forall i, j, i \neq j \Rightarrow \langle v_i|v_j\rangle = 0$

をみたすとき, $v_1, \ldots, v_r$ を $\langle\cdot\,|\,\cdot\rangle$ に関する**直交系**と呼ぶ. さらに

1′) $^\forall i,\ \|v_i\| = 1$

をみたすとき $v_1, \ldots, v_r$ を**正規直交系**と呼ぶ.

また, $\{v_1, \ldots, v_n\}$ が V の基底であって, $v_1, \ldots, v_n$ が（正規）直交系であるとき,
$\{v_1, \ldots, v_n\}$ を V の**（正規）直交基底**という.

さりげに誤字率が高いそうなので注意. 間違っても直行規定などと書かないように.

5.2 Gram-Schmidt の直交化法

$\{w_1, \ldots, w_n\}$ を V の基底とする $(\dim V = n)$. このとき,

$$\begin{aligned}
v_1 &= \frac{w_1}{\|w_1\|} \\
w_2' &= w_2 - \langle v_1|w_2\rangle v_1,\ v_2 = \frac{w_2'}{\|w_2'\|} \\
&\ \vdots \\
w_n' &= w_n - \langle v_1|w_n\rangle v_1 - \cdots - \langle v_{n-1}|w_n\rangle v_{n-1},\ v_n = \frac{w_n'}{\|w_n'\|}
\end{aligned}$$

により $v_1, \ldots, v_n$ を定めると, $\{v_1, \ldots, v_n\}$ は V の正規直交基底となる. **(Gram-Schmidt の直交化法)**

重要です. 丸暗記でも良いですが, 例えば $n = 2$ のとき実際に直交することを確かめてみましょう.

5.3 例題

正規直交基底の構成は演習で何度となくやって飽きてると思うので, 少しばかり応用をやってみます.

(問題)

$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ とする. このとき, 対角成分が正の実数である上三角行列 $T \in M_3(\mathbb{R})$, および ${}^t\!UU = E$ なる $U \in M_3(\mathbb{R})$ (直交行列) により, $A = UT$ の形であらわせ. **(QR 分解)**

(解答)

$A = (a_1\ a_2\ a_3)$ とする.

$u_1 = \dfrac{a_1}{\|a_1\|} = \dfrac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$,

$a_2' = a_2 - \langle u_1|a_2\rangle u_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, u_2 = \dfrac{a_2'}{\|a_2'\|} = \dfrac{1}{\sqrt{14}}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$,

$a_3' = a_3 - \langle u_1|a_3\rangle u_1 - \langle u_2|a_3\rangle u_2 = \dfrac{1}{7}\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, u_3 = \dfrac{a_3'}{\|a_3'\|} = \dfrac{1}{\sqrt{21}}\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$,

以上の操作により $\mathbb{R}^3$ の正規直交基底 $\{u_1, u_2, u_3\}$ を得る.

従って $U = (u_1\ u_2\ u_3)$ とすると ${}^t\!UU = E$ であって,

$T = {}^t\!UA = \begin{pmatrix} \sqrt{6} & 0 & \sqrt{6} \\ 0 & \sqrt{14} & -8/\sqrt{14} \\ 0 & 0 & \sqrt{3}/\sqrt{7} \end{pmatrix}$ とすれば $A = UT$ となり条件を充たす. □

6 用語の定義

ここでちょっと用語の羅列を挟みます.

6.1 直交行列・対称行列 etc

1) $P \in M_{m,n}(K)$ のとき $P^* = {}^t\overline{P}$ とおき, P を**随伴行列**という.
2) $P \in M_n(\mathbb{R})$ で $P{}^tP = {}^tPP = E_n$ をみたすとき P を**直交行列**とよぶ. 直交行列全体を O_n で表す.
3) $P \in M_n(\mathbb{C})$ で $PP^* = P^*P = E_n$ をみたすとき P を**ユニタリ行列**とよぶ.
   ユニタリ行列全体を U_n で表す.
4) $P \in M_n(K)$ が $P = {}^tP$ をみたすとき, P を**対称行列**という.
5) $P \in M_n(K)$ が $P = P^*$ をみたすとき, P を**エルミート行列**という.
6) $P \in M_n(K)$ が $P = -{}^tP$ をみたすとき, P を**歪対称行列**という.
   歪対称行列全体のなす集合を $\mathfrak{o}_n(K)$ 等であらわす. $\mathfrak{o}_n(\mathbb{R})$ を $\mathfrak{o}_n$ とも表す.
7) $P \in M_n(K)$ が $P = -P^*$ をみたすとき, P を**歪エルミート行列**という.
   歪エルミート行列全体を w_n 等であらわす.

特に重要度が高そうなのは直交行列と対称行列あたりでしょうか. 全て覚えるのに越したことは無いですが.

6.2 直交・直交直和・直交補空間

この辺は重要な概念というよりは, 問題文に出てきて分からないと困るといった感じでしょうか.
この辺の話にも色々な性質とかがあるのですがめんどくs…涙を呑んで割愛します.

- 直交

  $(V, \langle\cdot \mid \cdot\rangle)$ を計量線型空間, $\|\cdot\|$ を $\langle\cdot \mid \cdot\rangle$ から定まるノルム とする.

  1) $\langle v|w\rangle = 0$ のとき, v と w は互いに直交するといい, $v \perp w$ とあらわす.
  2) $v \in V$ とし, $W \subset V$ を部分線型空間とする. ${}^\forall w \in W, \langle v|w\rangle = 0$ が成り立つとき, v と W は互いに直交するといい, $v \perp W$ とあらわす.
  3) $W_1, W_2 \subset V$ を部分線型空間とする. ${}^\forall w_1 \in W_1, {}^\forall w_2 \in W_2, \langle w_1|w_2\rangle = 0$ が成り立つとき, W_1 と W_2 は互いに直交するといい, $W_1 \perp W_2$ とあらわす.

  適宜座標空間などでイメージするとよいかも（3) は厳しいが）. 定義なので飲み込んでください.

- 直交直和

  $W_1, W_2 \subset V$ を部分線型空間とする. このとき, $W_1 \perp W_2 \Rightarrow W_1 \cap W_2 = \{0\}$. 特に $W_1 + W_2$ は直和である. これを $W_1 \oplus W_2$（直交直和） で表す.

- 直交補空間

  $W \subset V$ を部分空間とする. W の V における補空間 U であって $(V = W \oplus U)$ $W \perp U$ が成り立つものを, W の（V における）直交補空間と呼び, $V^\perp$ で表す.

頭の片隅に入れておいて下さいとしか言えません. 定義されてるものは仕方ない.

7　行列の対角化

やっと対角化か…ここテストに出ます！(誰でもわかる)
線型変換の対角化等については割愛します．線型変換は表現行列に帰着して議論することとなります．

7.1　固有値・固有空間・固有ベクトル・固有多項式・固有方程式

$A \in M_n(\mathbb{C})$ とする．
$V(\alpha) = \{v \in \mathbb{C} \mid Av = \alpha v\} \neq \{0\}$ であるような $\alpha \in \mathbb{C}$ を A の**固有値**という．
$V(\alpha)$ を α に属する A の**固有空間**, $V(\alpha)$ の $\underline{0\text{ でない元}}$ を α に属する**固有ベクトル**と呼ぶ．

$F_A(\lambda) = \det(\lambda E_n - A)$ を A の**固有多項式**といい, $F_A(\lambda) = 0$ を A の**固有方程式**という．
$\alpha \in \mathbb{C}$ が A の固有値であることと, α が固有方程式の解である $(F_A(\alpha) = 0)$ ことは同値である．

重要な用語群です．そして最後の一文の性質は大事です．

7.2　その他用語・定理・性質

- 重複度

  n 次多項式 $P(\lambda) = (\lambda - \alpha_1)^{p_1} \cdots (\lambda - \alpha_r)^{p_r}$ $(p_1 + \cdots + p_r = n)$ について, p_i を α_i の**重複度**とよぶ．

  $A \in M_n(\mathbb{C})$, α を A の固有値とするとき, $F_A(\lambda) = 0$ の解としての α の重複度を固有値 α の重複度とする．

  この辺の話においては, 用語のための用語といった感じでしょうか．

- 三角化

  $A \in M_n(K)$ とすると, ${}^{\exists}P \in GL_n(K), P^{-1}AP$ は上三角行列 が成り立つ．

  このとき $P^{-1}AP$ の対角成分には A の固有値が重複度の数だけ並ぶ．

  $K = \mathbb{C}$ のとき $P \in U_n$, $K = \mathbb{R}$ かつ固有値が全て実数のとき $P \in O_n$ とできる．

  任意の正方行列が三角化可能であるという事実は, 種々の定理の証明に使える便利な性質です．

- Cayley-Hamilton の定理

  $A \in M_n(\mathbb{C})$ とする．F_A を A の固有多項式とすると, $F_A(A) = O_n$ が成り立つ．

  $(F_A(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n$ のとき $F_A(A) = A^n + a_1 A^{n-1} + \cdots + a_n E_n)$

  2 次の場合は高校でお馴染みの定理です．

7.3　対角化

$A \in M_n(\mathbb{C})$ に対し, ある $P \in GL(K')$ が存在して, $P^{-1}AP$ が対角行列となるとき, A は K' 上**対角化可能**であるという ($K = K'$ とは限らない)．$A \in M_n(K)$ が ($\mathbb{C}$ 上) 対角化可能であるための必要十分条件は, A の固有値 α_i に属する固有空間を $V(\alpha_i)$ とするとき, $(i = 1, \ldots, r)$
$\dim V(\alpha_1) + \cdots + \dim V(\alpha_r) = n$
が成り立つことである．$A \in M_n(\mathbb{R})$ が $\mathbb{R}$ 上対角化可能であるためには, この条件に加えて A の固有値が全て実数であることが必要十分である．

このとき, $V(\alpha_1), \ldots, V(\alpha_r)$ のそれぞれの基底を並べた行列を P とすれば対角行列 $P^{-1}AP$ が得られる．

他にも同値な条件は色々ありますが, とりあえずこれで十分だと思います．

7.4 性質

- 正規行列 ($AA^* = A^*A$ なる $A \in M_n(\mathbb{C})$) はユニタリ行列で対角化可能である.
- 実対称行列は直交行列により対角化可能である.

これらの行列に関しては, 対角化する行列の種類が指定される場合があります. いずれも固有ベクトルを正規直交化すれば良いはずです.

7.5 例題

後期第 6 回演習の問題を題材にしてみます.

（問題）

$A = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 10 \\ 1 & 4 & 5 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{C})$ が対角化可能であれば対角化せよ.

（解答）

$\det(\lambda E - A) = (\lambda - 1)(\lambda - 2)^2$ より A の固有値は $\lambda = 1, 2$.

(i) $\lambda = 1$ のとき

$$E - A = \begin{pmatrix} -3 & -4 & -10 \\ -1 & -3 & -5 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ と左基本変形されるから,

$$V(1) = \{ v \mid (E - A)v = 0 \} = \left\langle \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

(ii) $\lambda = 2$ のとき

$$2E - A = \begin{pmatrix} -2 & -4 & -10 \\ -1 & -2 & -5 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ と左基本変形されるから,

$$V(2) = \{ v \mid (2E - A)v = 0 \} = \left\langle \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

従って $P = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -5 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ とすれば $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ と対角化される. □

8 二次形式

この辺については本当に必要最小限やっときます．エルミート二次形式等も端折る感じで．

8.1 定義

$q : K^n \to K$ が**二次形式**であるとは，ある $a_{ij} \in K$ $(1 \leq i, j \leq n)$ が存在して，${}^t(x_1, \ldots, x_n) \in K^n$ に対し，
$q({}^t(x_1, \ldots, x_n)) = \displaystyle\sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{ij} x_i x_j$
が成り立つことをいう．
A を n 次対称行列とするとき，$A[v]$ で $v \in K^n$ に対して ${}^t v A v$ を与える二次形式を表す．

うーむ，覚えてくださいとしか...

8.2 標準形・符号

二次形式 $q(v) = {}^t v A v$ に適当な変換 $v = Pw$ $(w \in \mathbb{R}^n)$ を施すことにより
$q(v) = w_1^2 + \cdots + w_r^2 - w_{r+1}^2 - \cdots - w_{r+s}^2$ $(1 \leq {}^\exists r, s \leq n)$
と変形することができる．この形を q の（シルヴェスター）**標準形**という．
このとき，(r, s) を q の**符号**という．

定義覚えゲー．後半になるにつれ手抜…妥協してきた感が出てるな（汗

8.3 例題

標準形の求め方を述べます．(Lagrange の方法というようですが，そんなに一般的な呼称ではないようです.)
基本的には平方完成を行いますが，平方項がなくなった場合は $x' = \dfrac{x+y}{2}, y' = \dfrac{x-y}{2}$ などと置換します．
例題を見てもらったほうが早いと思います．

（問題）
二次形式 $Q = x_1^2 + x_2^2 + 4x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 5x_2x_3 + 2x_2x_4 + 4x_3x_4$ の標準形および符号を求めよ．

（解答）
$Q = (x_1 + x_2 + 2x_3)^2 + x_2x_3 + 2x_2x_4 + 4x_3x_4$.
$y_1 = x_1, y_2 = \dfrac{x_2 + x_3}{2}, y_3 = \dfrac{x_2 - x_3}{2}, y_4 = x_4$ として，

$$\begin{aligned} Q &= (y_1 + 3y_2 - y_3)^2 + y_2^2 - y_3^2 + 6y_2y_4 - 2y_3y_4 \\ &= (y_1 + 3y_2 - y_3)^2 + (y_2 + 3y_4)^2 - y_3^2 - 9y_4^2 - 2y_3y_4 \\ &= (y_1 + 3y_2 - y_3)^2 + (y_2 + 3y_4)^2 - (y_3 + y_4)^2 - (2\sqrt{2}y_4)^2. \end{aligned}$$

従って $z_1 = y_1 + 3y_2 - y_3, z_2 = y_2 + 3y_4, z_3 = y_3 + y_4, z_4 = 2\sqrt{2}y_4$ として，
$Q = z_1^2 + z_2^2 - z_3^2 - z_4^2$ となりこれが標準形で，符号は (2,2) である．□

9 おわりに

思ったより大変だった…．一応試験範囲を網羅したつもりです．10 ページ以内に抑えてやろうという野望のもと作ってたのですが，（表紙をページ数に数えないのであれば）なんとか達成できました．夏学期に比べると定義の羅列な感が増してる気がしますが，定義覚えてなんぼな気がするので致し方ないかなと．いよいよ理系必修科目ラッシュですね．皆さん頑張りましょう！ 文責：木村