2009 年度数学 II 演習 (火曜４限)
後期 NO.1　筆記演習

「前期の復習」＋「ベクトル空間と線型写像 (1)」
理科一類 37-39 組、10 月 13 日実施
担当教員：中岡宏行
※指定された用紙に解答を記し、演習時間内に提出してください。持込・相談不可です。尚、裏面にレポート問題についての記載があります。

問 1. $\mathbb{R}^3$ の部分集合

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \middle| \ x_1^k + ax_2 + x_3 = c \right\}$$

が部分線型空間となるための自然数 k, 実数 a, c の必要十分条件を求めよ。

問 2. 以下の $\mathbb{R}^2$ の部分集合 V が $\mathbb{R}^2$ の $\mathbb{R}$-部分線型空間ではないことを示せ。

(1) $V = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \middle| \ x_1 + x_2 \geq 0 \right\}$

(2) $V = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \middle| \ \min(x_1^2, x_2^2) = 0 \right\}$

問 3. 次の $\mathbb{R}^3$ のベクトルが $\mathbb{R}$ 上線型従属となる実数 m を求めよ。

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} m+1 \\ 2m \\ 2m \end{pmatrix}, \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ m+4 \\ 2m+4 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 2m \\ 2m+6 \\ 3m+6 \end{pmatrix}.$$

問 4. $\mathbb{R}^3$ において、次の二つの $\mathbb{R}$-線型部分空間 V, W が $\mathbb{R}^3 = V \oplus W$ を満たすことを示せ。

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \middle| \ 3x_2 - x_3 = 0 \right\}, W = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \middle| \ \begin{matrix} x_1 - 2x_2 = 0 \\ x_1 - 2x_3 = 0 \end{matrix} \right\}$$

問 5. U, V, W を線型空間、$f : U \to V$, $g : V \to W$ を線型写像とする。

(1) 一般に、核・像の間に次の関係があることを示せ。

(i) $\mathrm{Ker}(f) \subseteq \mathrm{Ker}(g \circ f)$

(ii) $\mathrm{Im}(g \circ f) \subseteq \mathrm{Im}(g)$

(2) f, g を次のような線型写像とするとき、上の (i), (ii) で等号が成立しない m の値を求めよ。(その値以外で一致する理由も述べよ。)

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2; f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} mx_1 + x_2 \\ 2x_2 \end{pmatrix},$$

$$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2; g\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 - mx_2 \end{pmatrix}.$$

以下はレポート問題とします。提出は次回の演習時です。今回の演習に出席し解答した方の提出は任意ですが、レポート提出によるある程度の加点を行う可能性があります。今回の演習 (満点を 100 点とする) を病欠の場合は 75 点満点、理由なしの欠席の場合は 50 点を満点とし採点を行いますので、欠席者は、今回の演習問題とレポート問題の両方に解答し呈出するようにして下さい。

提出に際し、以下の事項を記載してください。

- 氏名・学籍番号
- 演習の行われた日にち
- 欠席の有無と、欠席の場合はその理由 (証明書類を要求する場合があります)。
- 誰かと協力して解答を作成した場合、協力者全員の氏名。

問 6. k, m を正の整数とする。$\mathbb{R}^m$ の k 個のベクトル $\mathbf{a_1}, \ldots \mathbf{a_k}$ が線型独立であることは、それらを並べてできる行列 $(\mathbf{a_1}, \ldots \mathbf{a_k})$ の階数が k に等しいことに同値であることを示せ。

問 7. U, U', V, V' を線型空間とし、$f : U \to V, g : U' \to V', u : U \to U', v : V \to V'$ を線型写像とする。これらが $v \circ f = g \circ u$ を満たすとき、以下を示せ。

(1) $u(\mathrm{Ker}(f)) \subseteq \mathrm{Ker}(g)$

(2) $v(\mathrm{Im}(f)) \subseteq \mathrm{Im}(g)$

これにより u の $\mathrm{Ker}(f)$ への制限、及び v の $\mathrm{Im}(f)$ への制限として線型写像が

$$u|_{\mathrm{Ker}(f)} : \mathrm{Ker}(f) \to \mathrm{Ker}(g)$$
$$v|_{\mathrm{Im}(f)} : \mathrm{Im}(f) \to \mathrm{Im}(g)$$

と得られる。これらについて以下を示せ。

(3) u が単射のとき、$u|_{\mathrm{Ker}(f)}$ も単射。

(4) u が全射のとき、$v|_{\mathrm{Im}(f)}$ も全射。

2009 年度数学 II 演習 (火曜４限)
後期 NO.1　筆記演習　解答

問 1. $\mathbb{R}^3$ の部分集合

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \middle| \ x_1^k + ax_2 + x_3 = c \right\}$$

が部分線型空間となるための自然数 k, 実数 a, c の必要十分条件を求めよ。

（解答）
V が $\mathbb{R}^3$ の部分線型空間であるとする.
まず, $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c \end{pmatrix} \in V$ であるから, $0\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in V$ が必要. よって $c = 0$.
また, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \in V$ であるから, $2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \in V$ が必要. よって $2^k - 2 = 0$ より $k = 1$.
逆に $k = 1, c = 0$ のとき, $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in V$ より $V \neq \emptyset$. また, $x, x' \in V$ を $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, x' = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix}$ と表すと,
$\forall x, x' \in V, (x_1 + x_1') + a(x_2 + x_2') + (x_3 + x_3') = (x_1 + ax_2 + x_3) + (x_1' + ax_2' + x_3') = 0 \therefore x + x' \in V$,
$\forall x \in V \forall \lambda \in \mathbb{R}, (\lambda x_1) + a(\lambda x_2) + (\lambda x_3) = \lambda(x_1 + ax_2 + x_3) = 0 \therefore \lambda x \in V$.
故に V が $\mathbb{R}^3$ の部分線型空間である. 従って求める必要十分条件は $\underline{k = 1, c = 0}$ (a は任意)

問 2. 以下の $\mathbb{R}^2$ の部分集合 V が $\mathbb{R}^2$ の $\mathbb{R}$-部分線型空間ではないことを示せ。

(1) $V = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \middle| \ x_1 + x_2 \geq 0 \right\}$

(2) $V = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \middle| \ \min(x_1^2, x_2^2) = 0 \right\}$

（解答）V が $\mathbb{R}^2$ の $\mathbb{R}$-部分線型空間であると仮定する.

(1) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in V$ より, $(-1)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \in V$ であるが, $(-1) + (-1) < 0$ より $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \notin V$ となり矛盾.
故に V は $\mathbb{R}^2$ の $\mathbb{R}$-部分線型空間ではない. □

(2) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in V$ より $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in V$ であるが, $\min(1^2, 1^2) = 1 \neq 0$ より $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \notin V$ となり
矛盾. 故に V は $\mathbb{R}^2$ の $\mathbb{R}$-部分線型空間ではない. □

問 3. 次の $\mathbb{R}^3$ のベクトルが $\mathbb{R}$ 上線型従属となる実数 m を求めよ。
$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} m+1 \\ 2m \\ 2m \end{pmatrix}, \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ m+4 \\ 2m+4 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 2m \\ 2m+6 \\ 3m+6 \end{pmatrix}$.

（解答）
$\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ が線型従属であるとは, $\lambda_1\mathbf{a}_1 + \lambda_2\mathbf{a}_2 + \lambda_3\mathbf{a}_3 = 0$ なる $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \neq (0, 0, 0)$ が存在することで,
これは方程式 $(\mathbf{a}_1\, \mathbf{a}_2\, \mathbf{a}_3)\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ が非自明な解をもつことと同値である.

故に求める条件は,

$$\det(\mathbf{a}_1\,\mathbf{a}_2\,\mathbf{a}_3) = \begin{vmatrix} m+1 & -2 & 2m \\ 2m & m+4 & 2m+6 \\ 2m & 2m+4 & 3m+6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} m+1 & -2 & 2m \\ 2m & m+4 & 2m+6 \\ 0 & m & m \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} m+1 & -2m-2 & 2m \\ 2m & -m-2 & 2m+6 \\ 0 & 0 & m \end{vmatrix} = m\begin{vmatrix} m+1 & -2m-2 \\ 2m & -m-2 \end{vmatrix} = m(m+1)(3m-2) = 0 \;\therefore\; \underline{m = -1, 0, \frac{2}{3}}$$

問 4. $\mathbb{R}^3$ において、次の二つの $\mathbb{R}$-線型部分空間 V, W が $\mathbb{R}^3 = V \oplus W$ を満たすことを示せ。

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \;\middle|\; 3x_2 - x_3 = 0 \right\},\ W = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \;\middle|\; \begin{matrix} x_1 - 2x_2 = 0 \\ x_1 - 2x_3 = 0 \end{matrix} \right\}$$

（解答）

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 3x_2 \end{pmatrix} \;\middle|\; x_1, x_2 \in \mathbb{R} \right\},\ W = \left\{ \begin{pmatrix} 2x_3 \\ x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} \;\middle|\; x_3 \in \mathbb{R} \right\}$$ とかけるから,

$p \in V \cap W$ とすると, $\begin{cases} x_1 = 2x_3 \\ x_2 = x_3 \\ 3x_2 = x_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$ より $p = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. $\therefore V \cap W = \{0\}$.

また, $V + W = \{v + w \mid v \in V, w \in W\} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 + 2x_3 \\ x_2 + x_3 \\ 3x_2 + x_3 \end{pmatrix} \;\middle|\; x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R} \right\}$

ここで $\begin{pmatrix} x_1 + 2x_3 \\ x_2 + x_3 \\ 3x_2 + x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ より, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ とおくと,

$\det A = -2 \neq 0$ であるから, $\forall w \in \mathbb{R}^3, \exists v \in \mathbb{R}^3, (w = Av)$. ($v = A^{-1}w$ とすればよい)

故に $V + W = \mathbb{R}^3$. $\therefore \mathbb{R}^3 = V \oplus W$. □

問 5. U, V, W を線型空間、$f : U \to V$, $g : V \to W$ を線型写像とする。

(1) 一般に、核・像の間に次の関係があることを示せ。

(i) $\mathrm{Ker}(f) \subseteq \mathrm{Ker}(g \circ f)$

(ii) $\mathrm{Im}(g \circ f) \subseteq \mathrm{Im}(g)$

(2) f, g を次のような線型写像とするとき、上の (i), (ii) で等号が成立しない m の値を求めよ。(その値以外で一致する理由も述べよ。)

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2; f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} mx_1 + x_2 \\ 2x_2 \end{pmatrix},$$

$$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2; g\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 - mx_2 \end{pmatrix}.$$

（解答）

(1) (i) 任意の $x \in \mathrm{Ker}(f) = \{u \in U \mid f(u) = 0\}$ に対し,

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(0) = 0$ ($\because g$ は線型写像) より $x \in \mathrm{Im}(g \circ f) = \{u \in U \mid g \circ f(u) = 0\}$.

$\therefore \mathrm{Ker}(f) \subseteq \mathrm{Ker}(g \circ f)$. □

(ii) 任意の $y \in \mathrm{Im}(g \circ f) = \{g \circ f(u) \mid u \in U\}$ に対し, $y = g \circ f(x)$ なる $x \in U$ が存在する.
このとき, $y = g(f(x)), f(x) \in V$ であるから,$y \in \mathrm{Im}(g) = \{g(v) \mid v \in V\}$.
$\therefore \mathrm{Im}(g \circ f) \subseteq \mathrm{Im}(g)$. □

(2) (i) $m = -1$ とすると,
$f\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\2\end{pmatrix}$ より $\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} \notin \mathrm{Ker}(f)$ であるが,
$g \circ f\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} = g\begin{pmatrix}-2\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ より $\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(g \circ f)$. $\therefore \mathrm{Ker}(f) \neq \mathrm{Ker}(g \circ f)$
また, $m \neq 1$ のとき, g の表現行列を B とすると, $\det B = -m - 1 \neq 0$ であるから,
$Bv = 0 \Leftrightarrow B^{-1}Bv = v = 0$ より $g(v) = 0 \Leftrightarrow v = 0$.
$\therefore \mathrm{Ker}(g \circ f) = \left\{u \in \mathbb{R}^2 \mid g(f(u)) = 0\right\} = \left\{u \in \mathbb{R}^2 \mid f(u) = 0\right\} = \mathrm{Ker}(f)$. □

(ii) $m = 0$ とすると,
$g\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \in \mathrm{Im}(g)$ であるが, $g \circ f\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3x_2\\x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ をみたす $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$ は存在しない.
$\therefore \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \notin \mathrm{Im}(g \circ f)$. $\therefore \mathrm{Im}(g \circ f) \neq \mathrm{Im}(g)$.
また, $m \neq 0$ のとき, f の表現行列を A とすると, $\det A = 2m \neq 0$ であるから,
$\forall v \in \mathbb{R}^2, \exists u \in \mathbb{R}^2 (v = f(u))$. ($u = A^{-1}w$ とすればよい)
$\therefore \mathrm{Im}(g \circ f) = \left\{g(f(u)) \mid u \in \mathbb{R}^2\right\} = \left\{g(v) \mid v \in \mathbb{R}^2\right\} = \mathrm{Im}(g)$. □

問 6. k, m を正の整数とする。$\mathbb{R}^m$ の k 個のベクトル $\mathbf{a_1}, \dots \mathbf{a_k}$ が線型独立であることは、それらを並べてできる行列 $(\mathbf{a_1}, \dots \mathbf{a_k})$ の階数が k に等しいことに同値であることを示せ。

（解答）$A = (\mathbf{a_1}, \dots \mathbf{a_k})$ とする.

$\mathrm{rank}A = k$ のとき, 適切な左基本変形を施すことにより $\begin{pmatrix}E_k\\O_{m-k,k}\end{pmatrix}$ と変形できる. $v = \begin{pmatrix}v_1\\\vdots\\v_k\end{pmatrix}$ とすると,

$$v_1\mathbf{a_1} + \cdots + v_k\mathbf{a_k} = 0 \Leftrightarrow Av = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix}E_k\\O_{m-k,k}\end{pmatrix}v = \begin{pmatrix}v_1\\\vdots\\v_k\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow v_1 = \cdots = v_k = 0.$$

よって $\mathbf{a_1}, \dots \mathbf{a_k}$ は線型独立である.

$\mathrm{rank}A \neq k$ のとき, $\mathrm{rank}A \leq \min(m, k) \leq k$ より $\mathrm{rank}A < k$. $r = \mathrm{rank}A$ とする.

$m > r$ のとき, 第 $r + 1 (\leq k)$ 行は 0 なので, たとえば第 $(r + 1)$ 成分が 1, 残りは 0 である $v' \in \mathbb{R}^m$ について $Av' = 0$ となるから, v' は $Av = 0$ の非自明な解である.

$m \leq r$ のとき, $m < k$ であるから, A に左基本変形を施したとき, 基本ベクトルとならない列が存在する. それを第 $j_1, \dots, k_{k-r}$ 列とし, また, 基本ベクトルとなる列を第 $i_1, \dots, i_r$ 列とする. このとき各 $v_{j_1}, \dots, v_{j_{k-r}}$ に対し, $Av = 0$ となるような $v_{i_1}, \dots, v_{i_r}$ が一意に定まるから, たとえば $v_{j_1} = \cdots = \dots, v_{j_{k-r}} = 1$ としたときに定まる v は $Av = 0$ の非自明な解である.

$\mathbf{a_1}, \dots \mathbf{a_k}$ が線型従属であることと $Av = 0$ が非自明な解を持つことは同値であるから,$\mathrm{rank}A \neq k$ のとき, $\mathbf{a_1}, \dots \mathbf{a_k}$ は線型従属である.

従って, $\mathbf{a_1}, \dots \mathbf{a_k}$ が線型独立であることと, $\mathrm{rank}(\mathbf{a_1}, \dots \mathbf{a_k}) = k$ は同値である. □

問 7. U, U', V, V' を線型空間とし、$f : U \to V, g : U' \to V', u : U \to U', v : V \to V'$ を線型写像とする。これらが $v \circ f = g \circ u$ を満たすとき、以下を示せ。

(1) $u(\mathrm{Ker}(f)) \subseteq \mathrm{Ker}(g)$

(2) $v(\mathrm{Im}(f)) \subseteq \mathrm{Im}(g)$

これにより u の $\mathrm{Ker}(f)$ への制限、及び v の $\mathrm{Im}(f)$ への制限として線型写像が

$$u|_{\mathrm{Ker}(f)} : \mathrm{Ker}(f) \to \mathrm{Ker}(g)$$
$$v|_{\mathrm{Im}(f)} : \mathrm{Im}(f) \to \mathrm{Im}(g)$$

と得られる。これらについて以下を示せ。

(3) u が単射のとき、$u|_{\mathrm{Ker}(f)}$ も単射。

(4) u が全射のとき、$v|_{\mathrm{Im}(f)}$ も全射。

(1) $\forall x \in \mathrm{Ker}(f),\ g(u(x)) = g \circ u(x) = v \circ f(x) = v(f(x)) = v(0) = 0$ ($\because v$ は線型写像)
$\therefore u(x) \in \mathrm{Ker}(g)$. 故に $u(\mathrm{Ker}(f)) \subseteq \mathrm{Ker}(g)$. $\square$

(2) $\forall x \in U$ (i.e. $\forall f(x) \in \mathrm{Im}(f)$), $v(f(x)) = v \circ f(x) = g \circ u(x) = g(u(x)) \in \mathrm{Im}(g)$.
故に $v(\mathrm{Im}(f)) \subseteq \mathrm{Im}(g)$. $\square$

(3) $\mathrm{Ker}(f) \subseteq U$ であるから, $x \in \mathrm{Ker}(f)$ に対し $u|_{\mathrm{Ker}(f)}(x) = u(x)$.
u が単射, 即ち $u(x) = u(x') \Rightarrow x = x'$ のとき,
$u|_{\mathrm{Ker}(f)}(x) = u|_{\mathrm{Ker}(f)}(x') \Rightarrow u(x) = u(x') \Rightarrow x = x'$ より $u|_{\mathrm{Ker}(f)}$ も単射.$\square$

(4) $\mathrm{Im}(f) \subseteq U$ であるから, $y \in \mathrm{Im}(f)$ に対し, $v|_{\mathrm{Im}(f)}(y) = v(y)$.
u が全射, 即ち $\forall y \in U, \exists x \in U (y = u(x))$ のとき,
$\forall y \in U', \exists x \in U$ (i.e. $\forall g(y) \in \mathrm{Im}(g), \exists f(x) \in \mathrm{Im}(f)$)
($g(y) = g(u(x)) = g \circ u(x) = v \circ f(x) = v(f(x)) = v|_{\mathrm{Im}(f)}(f(x))$) より $v|_{\mathrm{Im}(f)}$ も全射. $\square$

2009 年度数学 II 演習 (火曜４限)
後期 NO.2　筆記演習

「ベクトル空間と線型写像 (2)」＋「基底と次元」
理科一類 37-39 組、10 月 27 日実施
担当教員：中岡宏行
※指定された用紙に解答を記し、演習時間内に提出してください。自筆のノートのみ参照可。相談不可です。尚、裏面にレポート問題についての記載があります。

問 1. V, W を $\mathbb{C}$-線型空間とする。V から W への $\mathbb{C}$ 線型写像全体の集合 $\mathrm{Hom}(V, W)$ が $\mathbb{C}$-線型空間をなすことを示せ。

問 2. V を $\mathbb{C}$-線型空間とし、$f : V \to V$ は $f \circ f = f$ をみたす $\mathbb{C}$-線型写像とする。
$\mathbb{C}$-線型写像 $g : V \to V$ を

$$g(v) = v - f(v) \ (\forall v \in V)$$

により定義する（$i.e.$, $g = \mathrm{id}_V - f$）とき、次を示せ。

(1) $g \circ g = g$, $f \circ g = g \circ f = 0$.

(2) $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Ker}(g)$, $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Im}(g)$

問 3. 次の二つの $\mathbb{R}^4$ の $\mathbb{R}$-線型部分空間 V, W の和空間 $V + W$ 及び 共通部分 $V \cap W$ のそれぞれについて、一組の基底を与え、次元を求めよ。（実際に基底となっていることを示せ。）

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \middle| \begin{array}{l} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{array} \right\}$$

,

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \middle| \begin{array}{l} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 = x_4 \end{array} \right\}$$

.

問 4. 次の $\mathbb{R}$-線型写像 $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ について以下に答えよ。

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 + x_2 + x_3 \\ 5x_1 + 3x_2 + 4x_3 \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 \\ -x_1 + x_2 - 2x_3 \end{pmatrix}$$

(1) 標準基底に関する f の行列表示を求めよ。

(2) $\mathrm{Ker}(f)$, $\mathrm{Im}(f)$ それぞれについて一組の基底を与えよ。（実際に基底となっていることを示せ。）

以下はレポート問題とします。提出は次回の演習時です。今回の演習に出席し解答した方の提出は任意ですが、レポート提出によるある程度の加点を行う可能性があります。今回の演習 (満点を 100 点とする) を病欠の場合は 75 点満点、理由なしの欠席の場合は 50 点を満点とし採点を行いますので、欠席者は、今回の演習問題とレポート問題の両方に解答し呈出するようにして下さい。

提出に際し、以下の事項を記載してください。

- 氏名・学籍番号
- 演習の行われた日にち
- 欠席の有無と、欠席の場合はその理由 (証明書類を要求する場合があります)。
- 誰かと協力して解答を作成した場合、協力者全員の氏名。

問 5. 線型空間と線型写像の図式

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "f"] \arrow[d, "u"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & V \arrow[r, "g"] \arrow[d, "v"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & W \arrow[d, "w"] \\ U' \arrow[r, "f'"'] & V' \arrow[r, "g'"'] & W' \end{tikzcd}$$

において、$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Ker}(g)$, $\mathrm{Im}(f') = \mathrm{Ker}(g')$ が成り立つとする。このとき、以下を示せ。

(1) u, w, f' が単射ならば v も単射。

(2) u, w, g が全射ならば v も全射。

問 6. V を次元 m の $\mathbb{C}$-線型空間、W を次元 n の $\mathbb{C}$-線型空間とする。$\mathbb{C}$-線型空間 $\mathrm{Hom}(V, W)$ の次元が mn となることを示せ。

NO.

DATE . .

No.2

問1 $f, g \in Hom(V, W)$, $\lambda \in \mathbb{C}$ に対し, $(f+g)(x) = f(x)+g(x)$ により $f+g \in Hom(V,W)$ を

$\lambda f(x) = \lambda(f(x))$ により $\lambda f \in Hom(V,W)$ を定める。

$\forall f, g, h \in Hom(V,W)$, $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{C}$

(1) $((f+g)+h)(x) = (f+g)(x)+h(x) = f(x)+g(x)+h(x) = f(x)+(g+h)(x)$

$= (f+(g+h))(x)$ より $(f+g)+h = f+(g+h)$.

(2) $(f+g)(x) = f(x)+g(x) = g(x)+f(x) = (g+f)(x)$ より $f+g = g+f$

(3) $0 \in Hom(V,W)$ を $0(x) = 0$ で定めると $(0+f)(x) = 0(x)+f(x) = f(x)$ より $0+f = f$

(4) $\forall f$ $f' = -f$ とすると $(f+f')(x) = f(x)+f'(x) = 0 = 0(x)$ より $f+f' = 0$

(5) $\lambda(f+g)(x) = \lambda((f+g)(x)) = \lambda(f(x)+g(x)) = \lambda(f(x)) + \lambda(g(x))$

$= \lambda f(x) + \lambda g(x) = (\lambda f + \lambda g)(x)$ より $\lambda(f+g) = \lambda f + \lambda g$.

(6) $(\lambda+\mu)f(x) = (\lambda+\mu)(f(x)) = \lambda(f(x)) + \mu(f(x)) = \lambda f(x)+\mu f(x) = (\lambda f + \mu f)(x)$

より $(\lambda+\mu)f = \lambda f + \mu f$

(7) $(\lambda\mu)f(x) = (\lambda\mu)(f(x)) = \lambda(\mu(f(x))) = \lambda(\mu f(x)) = \lambda(\mu f)(x)$ より $(\lambda\mu)f = \lambda(\mu f)$

(8) $1 \cdot f(x) = 1(f(x)) = f(x)$ より $1 \cdot f = f$

(1)〜(8)により $Hom(V,W)$ は $\mathbb{C}$-線型空間をなす。 □

問 (1)

$g \circ g(v) = g(v - f(v)) = (v - f(v)) - (f(v) - f\circ f(v)) = v - f(v) = g(v)$ $\therefore g \circ g = g$

$f \circ g(v) = f(v - f(v)) = f(v) - f\circ f(v) = 0(v)$ $\therefore f \circ g = 0$

$g \circ f(v) = g(f(v)) = f(v) - f\circ f(v) = 0(v)$ $\therefore g \circ f = 0$

(2) $\forall v \in V$ (i.e. $\forall f(v) \in Im(f)$), $g(f(v)) = g\circ f(v) = 0$ より $f(v) \in Ker(g)$. $\therefore Im(f) \subseteq Ker(g)$

$\forall v \in Ker(g)$, $g(v) = v - f(v) = 0$ より $v = f(v) \in Im(f)$ $\therefore Im(f) \supseteq Ker(g)$

従って $Im(f) = Ker(g)$

同様に $\forall v \in V$ (i.e. $\forall g(v) \in Im(g)$), $f(g(v)) = (f\circ g)(v) = 0$ より $g(v) \in Ker(f)$ $\therefore Ker(f) \supseteq Im(g)$

$\forall v \in Ker(f)$, $g(v) = v - f(v) = v \in Im(g)$ $\therefore Ker(f) \subseteq Im(g)$

従って $Ker(f) = Im(g)$. □

問3　$V = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ -x_1+2x_2 \\ 0 \end{pmatrix} \middle| \, x_1, x_2 \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \middle| \, x_1, x_2 \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ は線型独立なので、これが基底で、$\dim V = 2$

$W = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ -2x_1+2x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} \middle| \, x_1, x_2 \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \middle| \, x_1, x_2 \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ は線型独立なので、これが基底で、$\dim W = 2$

また、$V+W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$。この生成系は線型独立であるからこれが基底で

$\dim(V+W) = 3$

$V \cap W = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$ であるから $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ が基底で $\dim(V \cap W) = 1$

問4　$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 5 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ より　表現行列は $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 5 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 5 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 5 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 8 & -6 \\ 0 & 5 & -3 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 5 & -3 \\ 0 & 4 & -3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

と簡約基本変形される。よって $\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ は線型独立で　$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$

$\mathrm{Im}(f) = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \right\rangle$ であるから、これが $\mathrm{Im}(f)$ の基底である。

また、$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$　より　$\mathrm{Ker}(f) = \{0\}$

よって　$\mathrm{Ker}(f)$ の基底は ϕ

$$\begin{array}{ccccc} U & \xrightarrow{f} & V & \xrightarrow{g} & W \\ \downarrow u & & \downarrow v & & \downarrow w \\ U' & \xrightarrow[f']{} & V' & \xrightarrow[g']{} & W' \end{array}$$

問5 (1)

u, f' が単射 より $f'\circ u$ も単射 ∀ $x_1, x_2 \in U$ $f'\circ u(x_1) = f'\circ u(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

∴ $g'\circ f'\circ u(x_1) = g'\circ f'\circ u(x_2) \Rightarrow g'(x_1) = g'(x_2)$

ところで $\mathrm{Im}(f') = \mathrm{Ker}(g')$ より $g'\circ f' = 0$ であるから $g'\circ f'\circ u = 0$ であるので

$\forall x \in V,\ g'(x) = 0$ ∴ $g' = 0$

w が単射 より、

$w(g(x_1)) = w(g(x_2)) \Rightarrow g(x_1) = g(x_2)$

ところで $g'\circ v = w\circ g = 0$ であるから $\forall x \in V$, $w(g(x)) = 0$ より $g(x) = 0$ ∴ $g = 0$

∴ $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Ker}(g) = V$ より f は全射、

ここで $v\circ f = f'\circ u$ より $v\circ f$ は単射であるから

$\forall x_1, x_2 \in U$ に対して $v\circ f(x_1) = v\circ f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

即ち $f(x_1), f(x_2) \in \mathrm{Im}(f) = V$ に対して $v(f(x_1)) = v(f(x_2)) \Rightarrow x_1 = x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$

$v(y_1) = v(y_2) \Rightarrow y_1 = y_2$

故に v は単射である。 □

(∵ ⇔ $v(y_1 - y_2) \Rightarrow y_1 - y_2 = 0$)

(別) $y \in V$ について $v(y) = 0 \Rightarrow y = 0$ を示せばよい。

$v(y) = 0$ のとき $g'\circ v(y) = w\circ g(y) = 0$ wの単射性より $g(y) = 0$

∴ $y \in \mathrm{Ker}(g) = \mathrm{Im}(f)$ より $y = f(x)$ $(x \in U)$ とかける。

このとき $v(y) = v\circ f(x) = f'\circ u(x) = 0$ であるが、f', u の単射性より $x = 0$

∴ $y = f(x) = 0$ により、示された。

($\because$ $\forall y' \in V'$ について, $y' \in \mathrm{Im}(v)$ を示せばよい,

$y' \in V'$をとる。 g, w の全射性より, $g'(y') = w \circ g(y) = g' \circ v(y)$ なる $y \in V$ が存在する。

$\therefore$ $g'(y') - g' \circ v(y) = g'(y' - v(y)) = 0$ $\therefore$ $y' - v(y) \in \mathrm{Ker}(g') = \mathrm{Im}(f')$

故に $f'(x') = y' - v(y)$ なる $x' \in U'$ が存在する。

また, u の全射性より $x' = u(x)$ なる $x \in U$ が存在する。

よって $f' \circ u(x) = v \circ f(x) = y' - v(y)$ $\therefore$ $y' = v(f(x) + y) \in \mathrm{Im}(v)$

従って 任意の $y' \in V'$ について $y' \in \mathrm{Im}(v)$ となるので v は全射。□

1.7.6 $\dim_{\mathbb{C}} V = m$, $\dim_{\mathbb{C}} W = n$ より, ある同型 v, w が存在して

$v : V \cong \mathbb{C}^m$, $w : W \cong \mathbb{C}^n$ とする,

$f \in \mathrm{Hom}(V, W)$, $g \in \mathrm{Hom}(\mathbb{C}^m, \mathbb{C}^n)$ に対し, $h : \mathrm{Hom}(V, W) \to \mathrm{Hom}(\mathbb{C}^m, \mathbb{C}^n)$ を
$h^{-1} : \mathrm{Hom}(\mathbb{C}^m, \mathbb{C}^n) \to \mathrm{Hom}(V, W)$,
$h(f) = w \circ f \circ v^{-1}$, $h^{-1}(g) = w^{-1} \circ g \circ v$ で定めることにより,

$h \circ h^{-1} = id$, $h^{-1} \circ h = id$ なので $\mathrm{Hom}(V, W) \cong \mathrm{Hom}(\mathbb{C}^m, \mathbb{C}^n)$

また, g の表現行列を考えることにより $\mathrm{Hom}(\mathbb{C}^m, \mathbb{C}^n) \cong M_{n,m}(\mathbb{C})$

$\dim M_{n,m}(\mathbb{C}) = mn$ であるから $\dim \mathrm{Hom}(V, W) = mn$ である。□

2009 年度数学 II 演習

後期 No.3　口頭発表演習 (訂正版)
理科一類 37-39 組、11 月 17 日実施
担当教員：中岡宏行

※訂正：問３ (2) は誤りなので削除します。申し訳ございません。そのため問４ (2) も扱いません。また、問６の前半は重複するので削除しました。

以下の問題のうち、希望する問題を解いて、黒板を用いて発表して下さい (過程についても述べること)。良い質問・コメントが出れば質問者にも加点するので、積極的に発言して下さい。
尚、今回の分のレポートは、このプリントに記載の問題 (問 1 から問 6 まで) とします。

問 1. 次の各組のベクトルが線型従属となるような定数 c の値を求めよ。

(1) $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3 \in \mathbb{R}^3$,

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} c+5 \\ 4 \\ c-5 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ c \\ c-4 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ c-3 \end{pmatrix}$$

(2) $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3 \in \mathbb{R}^3$,

$$\mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} c-6 \\ 2c-10 \\ -4 \end{pmatrix}, \mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ c \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{b}_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ c+2 \end{pmatrix}$$

問 2. 次のベクトル空間 V の基底の一例を挙げ、次元を求めよ。(例として挙げたベクトルの組が、実際に基底になっていることを明示して下さい。)

(1) $V \subseteq \mathbb{R}^3$

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \middle| \; 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 0 \right\}$$

(2) $V \subseteq \mathbb{R}^4$

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \middle| \; \begin{matrix} x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_4 = 0 \end{matrix} \right\}$$

問 3. $m \times n$ 次 $\mathbb{R}$-係数行列全体 $M_{m,n}(\mathbb{R})$ は、行列の和と、$\mathbb{R}$ の元とのスカラー倍により $\mathbb{R}$-線型空間となる。
　$m = n$、すなわち n 次正方行列の場合 (このとき、$M_{n,n}(K)$ は $M_n(K)$ と表す)
　対称行列全体のなす $M_n(\mathbb{R})$ の部分集合

$$\{A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R}) \,|\, \text{任意の } i, j \text{ について } a_{ij} = a_{ji}\}$$

は $M_n(\mathbb{R})$ の $\mathbb{R}$-部分線型空間をなす。

問 4. 問 *3* の線型部分空間に対して、$n = 2, 3$ の場合にそれぞれ、次元と一組の基底を求めよ。また、n が一般の場合を推察せよ。

（余力があれば一般の n で示して頂いて構いません。）

問 5. 次の線型写像を標準基底に関して行列表示し、核・像の次元を決定せよ。

(1) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$,

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 + x_2 + x_3 \\ 5x_1 - 2x_2 + 3x_3 \\ -3x_1 + 3x_2 - 2x_3 \end{pmatrix}.$$

(2) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$,

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ x_2 + 2x_3 \\ x_1 + 2x_3 \\ x_1 + x_2 - x_3 \end{pmatrix}.$$

問 6.

(1) 問 *5* (1) の f の像・核それぞれについて、一組の基底を与えよ。

(2) 問 *5* (2) の f の像・核それぞれについて、一組の基底を与えよ。

2009 年度数学 II 演習

後期 No.3　口頭発表演習 (訂正版) 解答

問 1. 次の各組のベクトルが線型従属となるような定数 c の値を求めよ。

(1) $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3 \in \mathbb{R}^3$,

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} c+5 \\ 4 \\ c-5 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ c \\ c-4 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ c-3 \end{pmatrix}$$

(2) $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3 \in \mathbb{R}^3$,

$$\mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} c-6 \\ 2c-10 \\ -4 \end{pmatrix}, \mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ c \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{b}_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ c+2 \end{pmatrix}$$

（解答）

(1) $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ が線型従属 $\Leftrightarrow \lambda_1 \mathbf{a}_1 + \lambda_2 \mathbf{a}_2 + \lambda_3 \mathbf{a}_3 = 0$ なる $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \neq (0, 0, 0)$ が存在

$\Leftrightarrow$ 方程式 $(\mathbf{a}_1\, \mathbf{a}_2\, \mathbf{a}_3) \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ が非自明な解をもつ

従って求める条件は、

$$\det(\mathbf{a}_1\, \mathbf{a}_2\, \mathbf{a}_3) = \begin{vmatrix} c+5 & 4 & 3 \\ 4 & c & 2 \\ c-5 & c-4 & c-3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c-1 & 4 & 3 \\ 0 & c & 2 \\ -c+1 & c-4 & c-3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c-1 & 4 & 3 \\ 0 & c & 2 \\ 0 & c & c \end{vmatrix} = (c-1) \begin{vmatrix} c & 2 \\ c & c \end{vmatrix}$$

$= c(c-1)(c-2) = 0.\ \therefore \underline{c = 0, 1, 2}$

(2) (1) と同様にして、求める条件は、

$$\det(\mathbf{b}_1\, \mathbf{b}_2\, \mathbf{b}_3) = \begin{vmatrix} c-6 & 1 & 4 \\ 2c-10 & c & 7 \\ -4 & 1 & c+2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c-2 & 0 & -c+2 \\ 2c-10 & c & 7 \\ -4 & 1 & c+2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c-2 & 0 & 0 \\ 2c-10 & c & 2c-3 \\ -4 & 1 & c-2 \end{vmatrix} = (c-2) \begin{vmatrix} c & 2c-3 \\ 1 & c-2 \end{vmatrix}$$

$= (c-1)(c-2)(c-3) = 0 \therefore \underline{c = 1, 2, 3}$

問 2. 次のベクトル空間 V の基底の一例を挙げ、次元を求めよ。（例として挙げたベクトルの組が、実際に基底になっていることを明示して下さい。）

(1) $V \subseteq \mathbb{R}^3$

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \middle|\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 0 \right\}$$

(2) $V \subseteq \mathbb{R}^4$

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \middle|\ \begin{array}{l} x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_4 = 0 \end{array} \right\}$$

（解答）

(1) $V = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 2x_1 + 3x_2 \end{pmatrix} \middle| \, x_1, x_2 \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \middle| \, x_1, x_2 \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle$

$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0$ より, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ は線型独立であるから,

これが V の基底で, $\underline{\dim V = 2}$.

(2) $V = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ -x_1 + 2x_2 \\ 0 \end{pmatrix} \middle| \, x_1, x_2 \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \middle| \, x_1, x_2 \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$

$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0$ より, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ は線型独立であるから,

これが V の基底で, $\underline{\dim V = 2}$.

問 3. $m \times n$ 次 $\mathbb{R}$-係数行列全体 $M_{m,n}(\mathbb{R})$ は、行列の和と、$\mathbb{R}$ の元とのスカラー倍により $\mathbb{R}$-線型空間となる。

$m = n$、すなわち n 次正方行列の場合 (このとき、$M_{n,n}(K)$ は $M_n(K)$ と表す)

対称行列全体のなす $M_n(\mathbb{R})$ の部分集合

$$\{ A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R}) \mid \text{任意の } i, j \text{ について } a_{ij} = a_{ji} \}$$

は $M_n(\mathbb{R})$ の $\mathbb{R}$-部分線型空間をなす。

（解答）

n 次対称行列全体のなす集合を $\mathrm{Sym}_n(\mathbb{R})$ とおく. $O_n \in \mathrm{Sym}_n(\mathbb{R})$ より, $\mathrm{Sym}_n(\mathbb{R}) \neq \emptyset$ である.

$A = (a_{ij}), A' = (a'_{ij}) \in \mathrm{Sym}_n(\mathbb{R})$ とする.

$B = (b_{ij}) = A + A'$ とすると, $(b_{ij}) = (a_{ij} + a'_{ij}) = (a_{ji} + a'_{ji}) = (b_{ji})$ より, $B = A + A' \in \mathrm{Sym}_n(\mathbb{R})$

$\lambda \in \mathbb{R}$ とし, $C = (c_{ij}) = \lambda A$ とすると, $(c_{ij}) = (\lambda a_{ij}) = (\lambda a_{ji}) = (c_{ji})$ より, $C = \lambda A \in \mathrm{Sym}_n(\mathbb{R})$

従って $\mathrm{Sym}_n(\mathbb{R})$ は $M_n(\mathbb{R})$ の $\mathbb{R}$-部分線型空間となる. $\square$

問 4. 問 *3* の線型部分空間に対して、$n = 2, 3$ の場合にそれぞれ、次元と一組の基底を求めよ。また、n が一般の場合を推察せよ。

（余力があれば一般の n で示して頂いて構いません。）

（解答）

$1 \leq k \leq l \leq n$ に対し, $E_{kl} = (e_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ を $e_{ij} = \begin{cases} 1 & ((i,j) = (k,l), (l,k)) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$ で定める. このとき

$\left\{ \displaystyle\sum_{1 \leq k \leq l \leq n} \lambda_{kl} E_{kl} = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \cdots & \lambda_{1n} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \lambda_{1n} & \cdots & \cdots & \lambda_{nn} \end{pmatrix} \middle| \, \lambda_{kl} \in \mathbb{R} \right\} = \mathrm{Sym}_n(\mathbb{R})$ であって,

また, 各 (k,l)-成分に注目することにより $\displaystyle\sum_{1 \leq k \leq l \leq n} \lambda_{kl} E_{kl} = O_n \Rightarrow \lambda_{kl} = 0, {}^\forall k, l$ となる.

故に $\{E_{kl}\}_{1 \leq k \leq l \leq n}$ は $\mathrm{Sym}_n(\mathbb{R})$ の基底で, $\underline{\dim \mathrm{Sym}_n(\mathbb{R}) = \frac{1}{2} n(n+1)}$. $\square$

特に $n = 2, 3$ として $\underline{\dim \mathrm{Sym}_2(\mathbb{R}) = 3}$, $\underline{\dim \mathrm{Sym}_3(\mathbb{R}) = 6}$ を得る.

問 5. 次の線型写像を標準基底に関して行列表示し、核・像の次元を決定せよ。

(1) $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$,

$$f\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2x_1+x_2+x_3\\5x_1-2x_2+3x_3\\-3x_1+3x_2-2x_3\end{pmatrix}.$$

(2) $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$,

$$f\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_1-x_2\\x_2+2x_3\\x_1+2x_3\\x_1+x_2-x_3\end{pmatrix}.$$

（解答）

(1) $f\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2&1&1\\5&-2&3\\-3&3&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$ より, f の行列表示は $\underline{\begin{pmatrix}2&1&1\\5&-2&3\\-3&3&-2\end{pmatrix}}$.

これを $A=(a_1\ a_2\ a_3)$ とおく. A を右基本変形して $A'=\begin{pmatrix}1&5&0\\0&-9&1\\0&0&0\end{pmatrix}$ を得るから,

a_1, a_3 は線型独立, および $a_2=5a_1-9a_3$ となる. 故に

$$\mathrm{Im}(f)=\left\{ f\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3=(x_1+5x_2)a_1+(x_3-9x_2)a_3 \,\middle|\, x_1,x_2,x_3\in\mathbb{R}\right\} = \langle a_1,a_3\rangle$$

$\therefore \underline{\dim \mathrm{Im}(f)=2}.$

$$\mathrm{Ker}(f)=\left\{v\in\mathbb{R}^3 \,\middle|\, A'v=0\right\}=\left\{\lambda_1\begin{pmatrix}-5\\1\\9\end{pmatrix} \,\middle|\, \lambda_1\in\mathbb{R}\right\}=\left\langle\begin{pmatrix}-5\\1\\9\end{pmatrix}\right\rangle \therefore \underline{\dim \mathrm{Ker}(f)=1}.$$

(2) $f\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&2\\1&0&2\\1&1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$ より, f の行列表示は $\underline{\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&2\\1&0&2\\1&1&-1\end{pmatrix}}$.

これを $B=(b_1\ b_2\ b_3)$ とおく. B を右基本変形して $B'=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$ を得るから,

b_1, b_2, b_3 は線型独立となる. 故に

$$\mathrm{Im}(f)=\left\{ f\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3 \,\middle|\, x_1,x_2,x_3\in\mathbb{R}\right\} = \langle b_1,b_2,b_3\rangle \therefore \underline{\dim \mathrm{Im}(f)=3}.$$

$$\mathrm{Ker}(f)=\left\{v\in\mathbb{R}^3 \,\middle|\, B'v=0\right\}=\left\{\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\right\} \therefore \underline{\dim \mathrm{Ker}(f)=0}.$$

問 6.

(1) 問 *5* (1) の f の像・核それぞれについて、一組の基底を与えよ。

(2) 問 *5* (2) の f の像・核それぞれについて、一組の基底を与えよ。

（解答）

(1) 問 *5* より, $\mathrm{Ker}(f)$ の基底は $\underline{\left\{\begin{pmatrix}-5\\1\\9\end{pmatrix}\right\}}$, $\mathrm{Im}(f)$ の基底は $\underline{\left\{\begin{pmatrix}2\\5\\-3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\3\\-2\end{pmatrix}\right\}}$.

(2) 問 *5* より, $\mathrm{Ker}(f)$ の基底は $\underline{\{\emptyset\}}$, $\mathrm{Im}(f)$ の基底は $\underline{\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\2\\2\\-1\end{pmatrix}\right\}}$.

2009 年度数学 II 演習 (火曜４限)
後期 NO.4　筆記演習

「線型写像と基底変換」＋「計量線型空間」
理科一類 37-39 組、12 月 1 日実施
担当教員：中岡宏行
※指定された用紙に解答を記し、演習時間内に提出してください。自筆のノートのみ参照可。相談不可です。尚、裏面にレポート問題についての記載があります。

問 1. $\mathbb{R}^3$ の部分線型空間

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; 4x_1 - x_2 + 3x_3 = 0 \right\}$$

を考える。$\mathcal{V} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$, $\mathcal{V}' = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ はそれぞれ V の基底であることを示し、$\mathcal{V}$ から $\mathcal{V}'$ への基底の変換行列を求めよ.

問 2. $\mathbb{C}^2$ の間の $\mathbb{C}$-線型写像

$$\mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2 \; ; \; f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x_1 - 2\sqrt{-1}x_1 + 3\sqrt{-1}x_2 \\ 3x_1 + 2\sqrt{-1}x_2 - x_2 \end{pmatrix}$$

を考える。

(1) 標準基底に関する f の表現行列を求めよ。

(2) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 + \sqrt{-1} \\ \sqrt{-1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sqrt{-1} \\ 1 - \sqrt{-1} \end{pmatrix} \right\}$ は $\mathbb{C}^2$ の基底であることを示せ。

(3) (2) の基底に関する f の表現行列をもとめよ。

問 3. $M_{m,n}(\mathbb{R})$ で $m \times n$-実行列全体のなす線型空間を表す。$A, B \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ に対し $\langle A \mid B \rangle$ を以下で定義するとき。$\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ は $M_{mn}(\mathbb{R})$ 上の計量を与えることを示せ。

$$\langle A \mid B \rangle = \mathrm{tr}({}^t AB)$$

但し、tr はトレースを表す。

問 4. $\mathbb{R}^4$ を標準計量で計量線型空間とみなす。$\mathbb{R}^4$ の $\mathbb{R}$-部分線型空間 V が以下のように生成されるとき、グラム・シュミットの直交化法を用いて正規直交基底を構成せよ。

$$V = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

問 5.
$\mathbb{C}^3$ を標準計量で計量線型空間とみなす。$\mathbb{C}^3$ の $\mathbb{C}$-部分線型空間 V が以下のように生成されるとき、グラム・シュミットの直交化法を用いて正規直交基底を構成せよ。

$$V = \left\langle \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ -\sqrt{-1} \\ \sqrt{-1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2\sqrt{2} \\ 3+\sqrt{-1} \\ -1+\sqrt{-1} \end{pmatrix} \right\rangle$$

以下はレポート問題とします。提出は次回の演習時です。今回の演習に出席し解答した方の提出は任意ですが、レポート提出によるある程度の加点を行う可能性があります。今回の演習 (満点を 100 点とする) を病欠の場合は 75 点満点、理由なしの欠席の場合は 50 点を満点とし採点を行いますので、欠席者は、今回の演習問題とレポート問題の両方に解答し呈出するようにして下さい。
提出に際し、以下の事項を記載してください。

- 氏名・学籍番号
- 演習の行われた日にち
- 欠席の有無と、欠席の場合はその理由 (証明書類を要求する場合があります)。
- 誰かと協力して解答を作成した場合、協力者全員の氏名。

問 6. V, W を $\mathbb{C}$ 上の線型空間、$f : V \to W$ を単射線型写像、$\langle \cdot \mid \cdot \rangle_W$ を W 上のエルミート計量とする。$u, v \in V$ に対して $\langle \cdot \mid \cdot \rangle_V$ を

$$\langle u \mid v \rangle_V = \langle f(u) \mid f(v) \rangle_W$$

で定義するとき、$\langle \cdot \mid \cdot \rangle_V$ は V 上のエルミート計量を与えることを示せ。
問 7. V を区間 $[-\pi, \pi]$ 上の実数値連続関数全体のなす $\mathbb{R}$-線型空間とする。$f, g \in V$ に対して $\langle f \mid g \rangle$ を

$$\langle f \mid g \rangle = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) g(x) dx$$

で定義するとき、以下を示せ。

(1) $\langle \cdot \mid \cdot \rangle_V$ は V 上の計量を与える。

(2) 任意の正の整数 n に対し、

$$\{\frac{1}{\sqrt{2}}, \cos x, \sin x, \ldots, \cos nx, \sin nx\}$$

は (1) の計量に対する正規直交系をなす。

2009 年度数学 II 演習 (火曜４限)
後期 NO.4　筆記演習解答

問 1. $\mathbb{R}^3$ の部分線型空間

$$V=\left\{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3\ \middle|\ 4x_1-x_2+3x_3=0\right\}$$

を考える。$\mathcal{V}=\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\2\\2\end{pmatrix}\right\}$, $\mathcal{V}'=\left\{\begin{pmatrix}2\\-1\\-3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\4\\0\end{pmatrix}\right\}$ はそれぞれ V の基底であることを示し、$\mathcal{V}$ から $\mathcal{V}'$ への基底の変換行列を求めよ.

（解答）

$$\begin{aligned}V&=\left\{\begin{pmatrix}x_1\\4x_1+x_3\\x_3\end{pmatrix}\ \middle|\ x_1,x_3\in\mathbb{R}\right\}=\left\{x_1\begin{pmatrix}1\\4\\0\end{pmatrix}+x_3\begin{pmatrix}0\\3\\1\end{pmatrix}\ \middle|\ x_1,x_3\in\mathbb{R}\right\}\\&=\left\{(2x_1+x_3)\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}+(x_1+x_3)\begin{pmatrix}-1\\2\\2\end{pmatrix}\ \middle|\ x_1,x_3\in\mathbb{R}\right\}=\left\langle\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\2\\2\end{pmatrix}\right\rangle\\&=\left\{-\frac{x_3}{3}\begin{pmatrix}2\\-1\\-3\end{pmatrix}+(x_1+\frac{2}{3}x_3)\begin{pmatrix}1\\4\\0\end{pmatrix}\ \middle|\ x_1,x_3\in\mathbb{R}\right\}=\left\langle\begin{pmatrix}2\\-1\\-3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\4\\0\end{pmatrix}\right\rangle\end{aligned}$$

($\because \det\begin{pmatrix}2&1\\1&1\end{pmatrix}\neq 0,\det\begin{pmatrix}0&-1/3\\1&2/3\end{pmatrix}\neq 0$ より,

$\forall\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}z_1\\z_2\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2,\exists\begin{pmatrix}x_1\\x_3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}x_1'\\x_3'\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2, s.t.\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2x_1+x_3\\x_1+x_3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}z_1\\z_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-x_3'/3\\x_1'+(2/3)x_3'\end{pmatrix}$)

また, $\lambda_1\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}+\lambda_2\begin{pmatrix}-1\\2\\2\end{pmatrix}=0\Rightarrow\lambda_1=\lambda_2=0,\mu_1\begin{pmatrix}2\\-1\\-3\end{pmatrix}+\mu_2\begin{pmatrix}1\\4\\0\end{pmatrix}=0\Rightarrow\mu_1=\mu_2=0$ より

$\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\2\\2\end{pmatrix}$, および $\begin{pmatrix}2\\-1\\-3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\4\\0\end{pmatrix}$ はそれぞれ線型独立な組である. 故に $\mathcal{V},\mathcal{V}'$ は共に V の基底であって,

$\begin{pmatrix}2\\-1\\-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-1\\2\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\4\\0\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\2\\2\end{pmatrix}$ より, $\mathcal{V}$ から $\mathcal{V}'$ への基底の変換行列は $\underline{\begin{pmatrix}1&2\\-1&1\end{pmatrix}}$.

（編註：カッコ内のくだりは答案では不要だと思います.）

問 2. $\mathbb{C}^2$ の間の $\mathbb{C}$-線型写像

$$\mathbb{C}^2\to\mathbb{C}^2\ ;\ f\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3x_1-2\sqrt{-1}x_1+3\sqrt{-1}x_2\\3x_1+2\sqrt{-1}x_2-x_2\end{pmatrix}$$

を考える。

(1) 標準基底に関する f の表現行列を求めよ。

(2) $\left\{\begin{pmatrix}1+\sqrt{-1}\\\sqrt{-1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-\sqrt{-1}\\1-\sqrt{-1}\end{pmatrix}\right\}$ は $\mathbb{C}^2$ の基底であることを示せ。

(3) (2) の基底に関する f の表現行列をもとめよ。

（解答）

(1) $f\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3-2\sqrt{-1}&3\sqrt{-1}\\3&2\sqrt{-1}-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$ より,

標準基底に関する f の表現行列は $\underline{\begin{pmatrix}3-2\sqrt{-1}&3\sqrt{-1}\\3&2\sqrt{-1}-1\end{pmatrix}}$.

(2) $\{a_1, a_2\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1+\sqrt{-1} \\ \sqrt{-1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sqrt{-1} \\ 1-\sqrt{-1} \end{pmatrix} \right\}$, $A = (a_1\ a_2)$ とおく.

$\langle a_1, a_2 \rangle = \{\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 \mid \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}\} = \left\{ A\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} \,\middle|\, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C} \right\} = \mathbb{C}^2$

($\because \det A \neq 0$ より, 任意の $\begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$ に対し, $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix}$ とすれば $\begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}$.)

また, 再び $\det A \neq 0$ より, a_1, a_2 は線型独立. 従って $\{a_1, a_2\}$ は $\mathbb{C}^2$ の基底である. □

(3) $f(a_1) = \begin{pmatrix} 2+\sqrt{-1} \\ 1+2\sqrt{-1} \end{pmatrix} = a_1 + \sqrt{-1}a_2, f(a_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = a_1 + a_2.$

従って $\{a_1, a_2\}$ に関する f の表現行列は $\underline{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \sqrt{-1} & 1 \end{pmatrix}}$.

問 3. $M_{m,n}(\mathbb{R})$ で $m \times n$-実行列全体のなす線型空間を表す。$A, B \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ に対し $\langle A \mid B \rangle$ を以下で定義するとき。$\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ は $M_{mn}(\mathbb{R})$ 上の計量を与えることを示せ。

$$\langle A \mid B \rangle = \mathrm{tr}({}^t\!AB)$$

但し、tr はトレースを表す。

（解答）

1) $\langle A_1 + A_2 | B \rangle = \mathrm{tr}({}^t(A_1 + A_2)B) = \mathrm{tr}(({}^tA_1 + {}^tA_2)B) = \mathrm{tr}({}^tA_1B) + \mathrm{tr}({}^tA_2B) = \langle A_1|B\rangle + \langle A_2|B\rangle$,

$\langle A|B_1 + B_2\rangle = \mathrm{tr}({}^tA(B_1 + B_2)) = \mathrm{tr}({}^tAB_1 + {}^tAB_2) = \mathrm{tr}^t(AB_1) + \mathrm{tr}^t(AB_2) = \langle A|B_1\rangle + \langle A|B_2\rangle$

$({}^\forall A, A_1, A_2, B, B_1, B_2 \in M_{m,n}(\mathbb{R}))$

2) $\langle A|\lambda B\rangle = \mathrm{tr}^t(A(\lambda B)) = \mathrm{tr}(\lambda({}^tAB)) = \lambda\mathrm{tr}({}^tAB) = \lambda\langle A|B\rangle$,

$\langle \mu A|B\rangle = \mathrm{tr}({}^t(\mu A)B) = \mathrm{tr}(\mu({}^tAB)) = \mu\mathrm{tr}({}^tAB) = \mu\langle A|B\rangle (= \bar{\mu}\langle A|B\rangle)$ $({}^\forall A, B \in M_{m,n}(\mathbb{R}), {}^\forall\lambda, \mu \in \mathbb{R})$

3) $\langle A|B\rangle = \mathrm{tr}({}^tAB) = \mathrm{tr}({}^t({}^tAB)) = \mathrm{tr}(A{}^tB) = \mathrm{tr}({}^tBA) = \langle B|A\rangle (= \overline{\langle B|A\rangle})$ $({}^\forall A, B \in M_{m,n}(\mathbb{R}))$

4) $A = (a_{ij}) \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ に対し,

$$\langle A|A\rangle = \mathrm{tr}({}^tAA) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} a_{ij}^2 \geq 0,\ \langle A|A\rangle = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} a_{ij}^2 = 0 \Leftrightarrow a_{ij} = 0\ ({}^\forall i, j) \Leftrightarrow A = O_{m,n}$$

1)〜4) より, $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ は $M_{m,n}(\mathbb{R})$ 上の計量を与える. □

問 4. $\mathbb{R}^4$ を標準計量で計量線型空間とみなす。$\mathbb{R}^4$ の $\mathbb{R}$-部分線型空間 V が以下のように生成されるとき、グラム・シュミットの直交化法を用いて正規直交基底を構成せよ。

$$V = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

（解答）

$V = \langle w_1, w_2, w_3 \rangle$ とする.

$$v_1 = \frac{w_1}{\|w_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$w_2' = w_2 - \langle v_1|w_2\rangle v_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$, $v_2 = \dfrac{w_2'}{\|w_2'\|} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$.

$w_3' = w_3 - \langle v_1|w_3\rangle v_1 - \langle v_2|w_3\rangle v_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\\-1\end{pmatrix}$, $v_3 = \dfrac{w_3'}{\|w_3'\|} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\-1\end{pmatrix}$.

以上の操作により, V の正規直交基底 $\{v_1, v_2, v_3\}$ が得られた. □

問 5.

$\mathbb{C}^3$ を標準計量で計量線型空間とみなす。$\mathbb{C}^3$ の $\mathbb{C}$-部分線型空間 V が以下のように生成されるとき、グラム・シュミットの直交化法を用いて正規直交基底を構成せよ。

$$V = \left\langle \begin{pmatrix}\sqrt{2}\\-\sqrt{-1}\\\sqrt{-1}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\sqrt{2}\\3+\sqrt{-1}\\-1+\sqrt{-1}\end{pmatrix} \right\rangle$$

（解答）

$V = \{w_1, w_2\}$ とする.

$v_1 = \dfrac{w_1}{\|w_1\|} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}\sqrt{2}\\-\sqrt{-1}\\\sqrt{-1}\end{pmatrix}$.

$w_2' = w_2 - \langle v_1|w_2\rangle v_1 = \begin{pmatrix}\sqrt{2}-\sqrt{-2}\\2+2\sqrt{-1}\\0\end{pmatrix}$, $v_2 = \dfrac{w_2'}{\|w_2'\|} = \dfrac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1-\sqrt{-1}\\\sqrt{2}+\sqrt{-2}\\0\end{pmatrix}$.

以上の操作により V の正規直交基底 $\{v_1, v_2\}$ が得られた. □

問 6. V, W を $\mathbb{C}$ 上の線型空間、$f: V \to W$ を単射線型写像、$\langle\cdot \mid \cdot\rangle_W$ を W 上のエルミート計量とする。$u, v \in V$ に対して $\langle\cdot \mid \cdot\rangle_V$ を

$$\langle u \mid v\rangle_V = \langle f(u) \mid f(v)\rangle_W$$

で定義するとき、$\langle\cdot \mid \cdot\rangle_V$ は V 上のエルミート計量を与えることを示せ。

（解答）

1) $\langle u_1+u_2|v\rangle_V = \langle f(u_1+u_2)|f(v)\rangle_W = \langle f(u_1)+f(u_2)|f(v)\rangle_W = \langle f(u_1)|f(v)\rangle_W + \langle f(u_2)|f(v)\rangle_W = \langle u_1|v\rangle_V + \langle u_2|v\rangle_V$,
$\langle u|v_1+v_2\rangle_V = \langle f(u)|f(v_1+v_2)\rangle_W = \langle f(u)|f(v_1)+f(v_2)\rangle_W = \langle f(u)|f(v_1)\rangle_W + \langle f(u)|f(v_2)\rangle_W = \langle u|v_1\rangle_V + \langle u|v_2\rangle_V$. $({}^\forall u, u_1, u_2, v, v_1, v_2 \in V)$

2) $\langle u|\lambda v\rangle_V = \langle f(u)|f(\lambda v)\rangle_W = \langle f(u)|\lambda f(v)\rangle_W = \lambda\langle f(u)|f(v)\rangle_W = \langle u|v\rangle_V$,
$\langle \mu u|v\rangle_V = \langle f(\mu u)|f(v)\rangle_W = \langle \mu f(u)|f(v)\rangle_W = \bar{\mu}\langle f(u)|f(v)\rangle_W = \bar{\mu}\langle u|v\rangle$ $({}^\forall u, v \in V, {}^\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R})$

3) $\langle u|v\rangle_V = \langle f(u)|f(v)\rangle_W = \overline{\langle f(v)|f(u)\rangle}_W = \overline{\langle u|v\rangle}$ $({}^\forall u, v \in V)$

4) $\langle v|v\rangle_V = \langle f(v)|f(v)\rangle_W \geq 0$.
また, $\langle v|v\rangle_V = 0 \Leftrightarrow \langle f(v)|f(v) = 0 \Leftrightarrow f(v) = 0 \Leftrightarrow v = 0$. ($\because f$ は単射)
1)〜4) より, $\langle\cdot \mid \cdot\rangle$ は $M_{m,n}(\mathbb{R})$ 上の計量を与える. □

問 7. V を区間 $[-\pi, \pi]$ 上の実数値連続関数全体のなす $\mathbb{R}$-線型空間とする。$f, g \in V$ に対して $\langle f \mid g\rangle$ を

$$\langle f \mid g\rangle = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx$$

で定義するとき、以下を示せ。

(1) $\langle \cdot \mid \cdot \rangle_V$ は V 上の計量を与える。

(2) 任意の正の整数 n に対し、

$$\{\frac{1}{\sqrt{2}}, \cos x, \sin x, \ldots, \cos nx, \sin nx\}$$

は (1) の計量に対する正規直交系をなす。

（解答）

(1) 1) $\langle f_1 + f_2 | g\rangle = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f_1 + f_2)(x)g(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f_1(x) + f_2(x))g(x)dx$
$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f_1(x)g(x) + f_2(x)g(x))dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f_1(x)g(x)dx + = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f_2(x)g(x)dx = \langle f_1|g\rangle + \langle f_2|g\rangle,$
$\langle f|g_1 + g_2\rangle = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)(g_1 + g_2)(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)(g_1(x) + g_2(x))dx$
$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f(x)g_1(x) + f(x)g_2(x))dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)g_1(x)dx + = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)g_2(x)dx = \langle f|g_1\rangle + \langle f|g_2\rangle.$
$({}^\forall f, f_1, f_2, g, g_1, g_2 \in V)$

2) $\langle f|\lambda g\rangle = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)(\lambda g)(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\lambda \cdot f(x)g(x)dx = \lambda\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)g(x)dx = \lambda\langle f|g\rangle,$
$\langle \mu f|g\rangle = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\mu f)(x)g(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mu \cdot f(x)g(x)dx = \mu\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)g(x)dx = \mu\langle f|g\rangle(= \bar{\mu}\langle f|g\rangle).$
$({}^\forall f, g \in V, \lambda, \mu \in \mathbb{R})$

3) $\langle f|g\rangle = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)g(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g(x)f(x)dx = \langle g|f\rangle(= \overline{\langle g|f\rangle}).$ $({}^\forall f, g \in V)$

4) ${}^\forall f \in V, \langle f|f\rangle = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f(x))^2dx \geq 0$. $(\because (f(x))^2 \geq 0)$

また, f の連続性より f^2 も連続なので, $\langle f|f\rangle = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f(x))^2dx = 0 \Leftrightarrow (f(x))^2 = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0.$

1)〜4) より, $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ は V 上の計量を与える. □

(2) (正規性) $\langle \frac{1}{\sqrt{2}}|\frac{1}{\sqrt{2}}\rangle = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2dx = 1,$

$1 \leq m \leq n$ なる m に対し,

$\langle \cos mx|\cos mx\rangle = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 mxdx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1 + \cos 2mx}{2}dx = \frac{1}{\pi}\left[\frac{x}{2} + \frac{\sin 2mx}{4m}\right]_{-\pi}^{\pi} = 1.$

$\langle \sin mx|\sin mx\rangle = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 mxdx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1 - \cos 2mx}{2}dx = \frac{1}{\pi}\left[\frac{x}{2} - \frac{\sin 2mx}{4m}\right]_{-\pi}^{\pi} = 1,$

(直交性) $1 \leq m \leq n$ なる m に対し,

$\langle \frac{1}{\sqrt{2}}|\cos mx\rangle = \langle \cos mx|\frac{1}{\sqrt{2}}\rangle = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos mx}{\sqrt{2}}dx = \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin mx}{\sqrt{2}m}\right]_{-\pi}^{\pi} = 0,$

$\langle \frac{1}{\sqrt{2}}|\sin mx\rangle = \langle \sin mx|\frac{1}{\sqrt{2}}\rangle = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin mx}{\sqrt{2}}dx = \frac{1}{\pi}\left[-\frac{\cos mx}{\sqrt{2}m}\right]_{-\pi}^{\pi} = 0.$

$1 \leq l, m \leq n, l \neq m$ なる l, m に対し,

$$\langle \sin lx | \sin mx \rangle = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin lx \sin mx dx = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\{\cos(l+m)x - \cos(l-m)x\}dx$$
$$= -\frac{1}{2\pi}\left[\frac{\sin(l+m)x}{l+m} - \frac{\sin(l-m)x}{l-m}\right]_{-\pi}^{\pi} = 0,$$
$$\langle \sin lx | \cos mx \rangle = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin lx \cos mx dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\{\sin(l+m)x + \sin(l-m)x\}dx$$
$$= \frac{1}{2\pi}\left[-\frac{\cos(l+m)x}{l+m} - \frac{\cos(l-m)x}{l-m}\right]_{-\pi}^{\pi} = 0,$$
$$\langle \cos lx | \cos mx \rangle = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos lx \cos mx dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\{\cos(l+m)x + \cos(l-m)x\}dx$$
$$= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{\sin(l+m)x}{l+m} + \frac{\sin(l-m)x}{l-m}\right]_{-\pi}^{\pi} = 0.$$

以上により, 任意の正整数 n について $\{\frac{1}{\sqrt{2}}, \cos x, \sin x, \ldots, \cos nx, \sin nx\}$ は正規直交系をなす. □

問 6　V, W を $\mathbb{C}$ 上の線型空間，$f : V \to W$ を単射線型写像，$\langle \cdot | \cdot \rangle_W$ を W 上のエルミート計量とする．

u, $v \in V$ に対して $\langle u | v \rangle_V$ を

$$\langle u | v \rangle_V = \langle f(u) | f(v) \rangle_W$$

により定義するとき，$\langle \cdot | \cdot \rangle_V$ は V 上のエルミート計量を与えることを示せ.

解答例

$\langle \cdot | \cdot \rangle_V$ がエルミート計量の条件を充たすことを示す.

(ｉ) 正値性，正則性

$\forall u \in V$ について，$\langle \cdot | \cdot \rangle_W$ がエルミート計量であるので $\langle u | u \rangle_V = \langle f(u) | f(u) \rangle_W \geq 0$ が成り立つ.

また，$\langle u | u \rangle_V = \langle f(u) | f(u) \rangle_W = 0$ であるとき，W がエルミート計量なので $f(u) = 0$ である．そして f は単射線型写像だから $f(u)=0 \Leftrightarrow u = 0$ であり(注)，つまり $\langle u | u \rangle_V = 0 \Leftrightarrow u = 0$ が成り立つ.

(ⅱ) 線型性
$\forall u_1, u_2, v \in V$，$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$ について，W がエルミート計量であり f は線型写像なので

$$\langle \alpha u_1 + \beta u_2 | v \rangle_V = \langle f(\alpha u_1 + \beta u_2) | f(v) \rangle_W = \langle \alpha f(u_1) + \beta f(u_2) | f(v) \rangle_W = \overline{\alpha} \langle f(u_1) | f(v) \rangle_W + \overline{\beta} \langle f(u_2) | f(v) \rangle_W$$
$$= \overline{\alpha} \langle u_1 | v \rangle_V + \overline{\beta} \langle u_2 | v \rangle_V$$

が成り立つ.
(ⅲ) エルミート対称性
$\forall u, v \in V$ について，W がエルミート計量なので

$$\langle u | v \rangle_V = \langle f(u) | f(v) \rangle_W = \overline{\langle f(v) | f(u) \rangle_W} = \overline{\langle v | u \rangle_V}$$ が成り立つ.

以上(ｉ)(ⅱ)(ⅲ)より，$\langle \cdot | \cdot \rangle_V$ は V 上のエルミート計量である．□

(注) f が線型写像のとき，$f(x) = f(x+0) = f(x) + f(0)$ より $f(0) = 0$ である．さらに f が単射ならば $f(x) = f(0) \Rightarrow x = 0$ が成り立ち，$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ がいえる.
　　　↑　単射の定義 $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ に $x_2=0$ を代入.

問 7　V を，区間 $[-\pi,\pi]$ 上の実数値連続関数全体のなす $\mathbb{R}$ －線型空間とする． $f,g\in V$ に対して

$\langle f|g\rangle$ を $\langle f|g\rangle=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}f(x)g(x)dx$ で定義するとき，以下を示せ．

(1) $\langle\cdot|\cdot\rangle$ は V 上の計量を与える．

(2) 任意の正の整数 n に対し，$\left\{\dfrac{1}{\sqrt{2}},\cos x,\sin x,\cdots,\cos nx,\sin nx\right\}$ は(1)の計量に関する正規直交系をなす．

解答例

(1)　中岡さんがとばしてもいいと言ったので省略．でもそんなに難しくない気がします．

(2)

（ｉ）正規性

まず，$\left\|\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right\|=\sqrt{\left\langle\dfrac{1}{\sqrt{2}}\middle|\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right\rangle}=\sqrt{\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2dx}=\sqrt{\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\dfrac{dx}{2}}=\sqrt{\dfrac{1}{\pi}\cdot\dfrac{2\pi}{2}}=1$ である．

m を $1\le m\le n$ を満たす自然数とする．このとき，

$$\langle\cos mx|\cos mx\rangle=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 mx dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1+\cos 2mx}{2}dx=\frac{1}{\pi}\left[\frac{x}{2}+\frac{\sin 2mx}{4m}\right]_{-\pi}^{\pi}=\frac{1}{\pi}\cdot\left(\frac{2\pi}{2}+0\right)=1$$

$$\langle\sin mx|\sin mx\rangle=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 mx dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1-\cos 2mx}{2}dx=\frac{1}{\pi}\left[\frac{x}{2}-\frac{\sin 2mx}{4m}\right]_{-\pi}^{\pi}=\frac{1}{\pi}\cdot\left(\frac{2\pi}{2}-0\right)=1$$

($\because$ m は自然数なので $\sin(\pm 2m\pi)=\cos(\pm 2m\pi)=0$)

であるから，$\|\cos mx\|=\sqrt{\langle\cos mx|\cos mx\rangle}=1$ ，$\|\sin mx\|=\sqrt{\langle\sin mx|\sin mx\rangle}=1$ である．

つまり，$\left\{\dfrac{1}{\sqrt{2}},\cos x,\sin x,\cdots,\cos nx,\sin nx\right\}$ の各元のノルムは 1 である．

（ⅱ)直交性

l，m を $1\le l\le n$，$1\le m\le n$，$l\ne m$ なる自然数とする．内積を計算していく．

$$\left\langle\frac{1}{\sqrt{2}}\middle|\sin mx\right\rangle=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin mx}{\sqrt{2}}dx=\frac{1}{\sqrt{2}\pi}\left[-\frac{\cos mx}{m}\right]_{-\pi}^{\pi}=0$$ ，($\because$ l，m は自然数)

$$\left\langle\frac{1}{\sqrt{2}}\middle|\cos mx\right\rangle=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos mx}{\sqrt{2}}dx=\frac{1}{\sqrt{2}\pi}\left[\frac{\sin mx}{m}\right]_{-\pi}^{\pi}=0.$$

さらに

$$\left\langle \sin lx \middle| \sin mx \right\rangle = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin lx \sin mx \, dx = \frac{-1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \{\cos(l+m)x - \cos(l-m)x\} dx$$

（∵ $l+m,\ l-m$ は自然数）

$$= \frac{-1}{2\pi}\left[\frac{\sin(l+m)x}{l+m} - \frac{\sin(l-m)x}{l-m}\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{-1}{2\pi}(0-0) = 0$$

$$\left\langle \sin lx \middle| \cos mx \right\rangle = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin lx \cos mx \, dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \{\sin(l+m)x + \sin(l-m)x\} dx = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{-\cos(l+m)x}{l+m} + \frac{-\cos(l-m)x}{l-m}\right]_{-\pi}^{\pi} = 0$$

$$\left\langle \cos lx \middle| \cos mx \right\rangle = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos lx \cos mx \, dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \{\cos(l+m)x + \cos(l-m)x\} dx = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{\sin(l+m)x}{l+m} + \frac{\sin(l-m)x}{l-m}\right]_{-\pi}^{\pi} = 0$$

である．

つまり，$\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}, \cos x, \sin x, \cdots, \cos nx, \sin nx\right\}$ の全ての元は互いに直交している．

(ⅰ)(ⅱ)より，$\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}, \cos x, \sin x, \cdots, \cos nx, \sin nx\right\}$ は (1) の計量に関して正規直交系をなす．□

解説(てきとう)

【問 6】 *Ask* の板書にも出てきた問題．与えられた演算 <·｜·> が計量の定義を満たすことを示すだけなので，計量の定義って何だっけ？となってなければ大丈夫．私は板書をまともにとってないので *Ask* 流を良く知りませんが，計量(内積)は常識的には以下のような定義です．

定義

体 K を実数体 R または複素数体 C （あるいは四元数体 H）とする．K 上のベクトル空間 V に対して，内積とは以下の性質を満たす 2 変数の関数 $<\cdot, \cdot> : V \times V \to K$ のことである：

1. V の任意の元 x に対して，$<x, x>$ は非負の実数で，$<x, x> = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ．
2. 任意のスカラー α，$\beta \in K$ と V の任意のベクトル x_1, x_2, y に対して，
$<\alpha x_1 + \beta x_2, y> = \alpha <x_1, y> + \beta <x_2, y>$ ．
3. $<x, y> = <y, x>$

性質 1 の前半を正値性あるいは正定値性といい，後半を正則性という．性質 2 は内積が第一の変数について線型であるということである．性質 3 は対称性といわれ，これと性質 2 から，内積は第二の変数についても線型となることがわかる（つまり内積は双線型写像である）．

係数体が複素数体 C （あるいは四元数体 H）であるとき，性質 3 の代わりに
エルミート対称性: $<x, y> = <y, x>^*$ （ "*" は複素共役（あるいは四元数の共役））
を満たすなら，エルミート内積（あるいは四元数のエルミート内積）という．エルミート内積を単に内積と呼ぶことも多い． by Wikipedia

ちょっと分かりにくいですが要するに計量とは　線型空間Vの２つの元に対してある１つの値を与える関数fで, 次のような３つの性質をもったものです. 今回のような問題ではこの３つを示せば十分かと.
(詳しくは各自教科書で確認を･･･)

（ｉ）任意の$x \in V$に対して $f(x,x) \geq 0$ であり, $f(x,x)=0 \Leftrightarrow x=0$

（ⅱ）$\forall x,y,z \in V \ \ \forall \alpha,\beta \in \mathrm{K},\ f(\alpha x+\beta y,z)=\overline{\alpha} f(x,z)+\overline{\beta} f(y,z)$　(但し K は係数体)

（ⅲ）　$\forall x,y \in V,\ f(x,y)=\overline{f(y,x)}$　(エルミート計量の場合)

(ⅲ)は係数体が R だったりするときは共役をとらなくてもいい気がします.
あと,（ⅱ)(ⅲ)より　$f(x,\alpha y+\beta z)=\alpha f(x,y)+\beta f(x,z)$ となる事に注意.

【問 7】
(1)はぶっちゃけあのお兄さんが言うほどややこしくなる要素が見つからないのですが, 果たして何か見落としているのか･･･
(2)は正規直交系の定義に沿って示すだけ. 数Ⅱ≒定義覚えゲー.
ノルムとかに言及せずに激しく大雑把に言うと,
$\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$ が 計量 <･｜･>について正規直交系をなす$\Leftrightarrow \langle x_i | x_j \rangle=\delta_{ij}=\begin{cases} 1 & (i=j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}$　です.

間違いとかあったら生暖かくスルーして修正してくださいな. (終)

2009 年度数学 II 演習 (火曜４限)
後期 NO.5　筆記演習

「固有値と対角化」＋「前回の復習」
理科一類 37-39 組、12 月 15 日実施
担当教員：中岡宏行

※指定された用紙に解答を記し、演習時間内に提出してください。自筆のノートのみ参照可。相談不可です。尚、裏面にレポート問題についての記載があります。

問 1. *2* 次正方行列 $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C})$ に対して、以下の問いに答えよ。

(1) t を変数とし、多項式 $\Phi(t) = \det(tI_2 - A)$ を計算せよ。これを A の**固有多項式**という。但し、I_2 は *2* 次の単位行列。
(2) $\Phi(t)$ の解 λ_1, λ_2 を求めよ。これらは A の**固有値**と呼ばれるものになる。
(3) $i = 1, 2$ それぞれについて、$Ax_i = \lambda_i x_i$ を満たす 0 でないベクトル $x_i \in \mathbb{C}^2$ を一つずつ求めよ。x_i を、λ_i に対応する**固有ベクトル**という。
(4) $P \in M_2(\mathbb{C})$ を $P = (x_1, x_2)$ と定義し、$P^{-1}AP$ を計算せよ。（得られる行列は対角行列で、対角成分が固有値となることを観察しましょう。**行列の対角化**。）

問 2. $\mathbb{C}^2$ の間の $\mathbb{C}$-線型写像

$$f : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2 \ ; \ f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1 + 9\sqrt{-1}x_1 + 9x_2 - \sqrt{-1}x_2 \\ 8x_1 + 5\sqrt{-1}x_1 + 3x_2 - 9\sqrt{-1}x_2 \end{pmatrix}$$

を考える。

(1) 標準基底に関する f の表現行列を求めよ。
(2) $\left\{ \begin{pmatrix} 2 - \sqrt{-1} \\ -2\sqrt{-1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 + 3\sqrt{-1} \\ 2 + 3\sqrt{-1} \end{pmatrix} \right\}$ は $\mathbb{C}^2$ の基底であることを示せ。
(3) (2) の基底に関する f の表現行列をもとめよ。

問 3. $\mathbb{R}_3[x]$ を x に関する高々*3* 次の実係数多項式全体のなす線型空間とし、

$$V = \{\, f \in \mathbb{R}_3[x] \mid f(-1) = 0 \} \, , W = \{\, f \in \mathbb{R}_3[x] \mid f(-2) = 0 \}$$

とおく。

(1) $V \cap W$ の基底を一組求めよ。これを $\mathcal{U}$ とする。V, W の基底 $\mathcal{V}, \mathcal{W}$ であって、$\mathcal{U}$ の拡大となっているものを一組ずつ求めよ。
(2) $f \in V$ のとき、x に関する多項式 $\varphi(f)$ を $(\varphi(f))(x) = f(x+1)$ により定める。$\varphi(f) \in W$ であることと、$\varphi : V \to W$ は線型写像であることを示せ。
(3) (2) の φ の逆写像を求めよ。（尚、逆写像の線型性は確かめなくてよい。）
(4) (1) で求めた基底 $\mathcal{V}, \mathcal{W}$ に関する φ の表現行列を求めよ。

以下はレポート問題とします。提出は次回の演習時です。今回の演習に出席し解答した方の提出は任意ですが、レポート提出によるある程度の加点を行う可能性があります。今回の演習 (満点を 100 点とする) を病欠の場合は 75 点満点、理由なしの欠席の場合は 50 点を満点とし採点を行いますので、欠席者は、今回の演習問題とレポート問題の両方に解答し呈出するようにして下さい。

提出に際し、以下の事項を記載してください。

- 氏名・学籍番号
- 演習の行われた日にち
- 欠席の有無と、欠席の場合はその理由 (証明書類を要求する場合があります)。
- 誰かと協力して解答を作成した場合、協力者全員の氏名。

4. 集合 V に対し、V 上の実数値二変数関数 d

$$d: V \times V \to \mathbb{R}$$

（すなわち、任意の $x, y \in V$ に対し、実数値 $d(x, y)$ が一つ対応する）が次を満たすとき、d を V 上の距離という。

(1) $d(x, y) \geq 0\ (\forall x, y \in V)$
(2) $d(x, y) = d(y, x)\ (\forall x, y \in V)$
(3) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
(4) （三角不等式）$d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z)\ (\forall x, y, z \in V)$

V を $\mathbb{C}$ 上の線型空間、$\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ を V 上のエルミート計量とするとき、d を

$$d(x, y) = \|x - y\|\ (\forall x, y \in V)$$

と定義すると、d は V 上の距離となることを示せ。但し、$\| \cdot \|$ は計量 $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ から定まるノルムとする。

5. $\mathbb{C}^4$ を標準計量で計量線型空間とみなす。$\mathbb{C}^4$ の $\mathbb{C}$-部分線型空間 V が以下のように生成されるとき、グラム・シュミットの直交化法を用いて正規直交基底を構成せよ。

$$V = \left\langle \begin{pmatrix} \sqrt{-1} \\ 1 \\ \sqrt{-1} \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2\sqrt{-1} \\ -1 \\ 2\sqrt{-1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ \sqrt{-1} \\ -4 \\ \sqrt{-1} \end{pmatrix} \right\rangle$$

2009 年度数学 II 演習 (火曜４限)
後期 NO.5　筆記演習解答

問 1. *2* 次正方行列 $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C})$ に対して、以下の問いに答えよ。

(1) t を変数とし、多項式 $\Phi(t) = \det(tI_2 - A)$ を計算せよ。これを A の**固有多項式**という。但し、I_2 は *2* 次の単位行列。

(2) $\Phi(t)$ の解 λ_1, λ_2 を求めよ。これらは A の**固有値**と呼ばれるものになる。

(3) $i = 1, 2$ それぞれについて、$Ax_i = \lambda_i x_i$ を満たす 0 でないベクトル $x_i \in \mathbb{C}^2$ を一つずつ求めよ。x_i を、λ_i に対応する**固有ベクトル**という。

(4) $P \in M_2(\mathbb{C})$ を $P = (x_1, x_2)$ と定義し、$P^{-1}AP$ を計算せよ。(得られる行列は対角行列で、対角成分が固有値となることを観察しましょう。**行列の対角化**。)

（解答）

(1) $\Phi(t) = \begin{vmatrix} t-4 & -1 \\ 2 & t-1 \end{vmatrix} = \underline{t^2 - 5t - 6}.$

(2) $\Phi(t) = (t-2)(t-3) = 0.\ \therefore \underline{\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 3}$

(3) $Ax_1 = \lambda_1 x_1 \Leftrightarrow (A - 2E)x_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} x_1,\ Ax_2 = \lambda_2 x_2 \Leftrightarrow (A - 3E)x_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} x_2$ より,

これをみたす $x_1, x_2 \neq 0$ の一つとして $\underline{x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, x_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}}$ がとれる.

(4) $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}}.$

問 2. $\mathbb{C}^2$ の間の $\mathbb{C}$-線型写像

$$f : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2\ ;\ f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1 + 9\sqrt{-1}x_1 + 9x_2 - \sqrt{-1}x_2 \\ 8x_1 + 5\sqrt{-1}x_1 + 3x_2 - 9\sqrt{-1}x_2 \end{pmatrix}$$

を考える。

(1) 標準基底に関する f の表現行列を求めよ。

(2) $\left\{ \begin{pmatrix} 2 - \sqrt{-1} \\ -2\sqrt{-1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 + 3\sqrt{-1} \\ 2 + 3\sqrt{-1} \end{pmatrix} \right\}$ は $\mathbb{C}^2$ の基底であることを示せ。

(3) (2) の基底に関する f の表現行列をもとめよ。

（解答）

(1) $f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 + 9\sqrt{-1} & 9 - \sqrt{-1} \\ 8 + 5\sqrt{-1} & 3 - 9\sqrt{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ より,

標準基底に関する f の表現行列は $\underline{\begin{pmatrix} -1 + 9\sqrt{-1} & 9 - \sqrt{-1} \\ 8 + 5\sqrt{-1} & 3 - 9\sqrt{-1} \end{pmatrix}}.$

(2) $\{a_1, a_2\} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 - \sqrt{-1} \\ -2\sqrt{-1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 + 3\sqrt{-1} \\ 2 + 3\sqrt{-1} \end{pmatrix} \right\}$, $A = (a_1\ a_2)$ とおく.

$\langle a_1, a_2 \rangle = \{ \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 \mid \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C} \} = \left\{ A\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} \middle| \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C} \right\} = \mathbb{C}^2$

($\because \det A \neq 0$ より, 任意の $\begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$ に対し, $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix}$ とすれば $\begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}$.)

また, 再び $\det A \neq 0$ より, a_1, a_2 は線型独立. 従って $\{a_1, a_2\}$ は $\mathbb{C}^2$ の基底である. □

(3) $f(a_1) = \begin{pmatrix} 5+\sqrt{-1} \\ 3-4\sqrt{-1} \end{pmatrix} = a_1 - \sqrt{-1}a_2, f(a_2) = \begin{pmatrix} -4+4\sqrt{-1} \\ 2+5\sqrt{-1} \end{pmatrix} = -a_1 + a_2.$

従って $\{a_1, a_2\}$ に関する f の表現行列は $\underline{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -\sqrt{-1} & 1 \end{pmatrix}}$.

問 3. $\mathbb{R}_3[x]$ を x に関する高々3 次の実係数多項式全体のなす線型空間とし、

$$V = \{\, f \in \mathbb{R}_3[x] \mid f(-1) = 0\} \, , W = \{\, f \in \mathbb{R}_3[x] \mid f(-2) = 0\}$$

とおく。

(1) $V \cap W$ の基底を一組求めよ。これを $\mathcal{U}$ とする。V, W の基底 $\mathcal{V}, \mathcal{W}$ であって、$\mathcal{U}$ の拡大となっているものを一組ずつ求めよ。
(2) $f \in V$ のとき、x に関する多項式 $\varphi(f)$ を $(\varphi(f))(x) = f(x+1)$ により定める。$\varphi(f) \in W$ であることと、$\varphi\colon V \to W$ は線型写像であることを示せ。
(3) (2) の φ の逆写像を求めよ。(尚、逆写像の線型性は確かめなくてよい。)
(4) (1) で求めた基底 $\mathcal{V}, \mathcal{W}$ に関する φ の表現行列を求めよ。

(解答)

(1) $\mathcal{U} = \{x(x+1)(x+2), (x+1)(x+2)\}$,
$\mathcal{V} = \{x(x+1)(x+2), (x+1)(x+2), x+1\}$,
$\mathcal{W} = \{x(x+1)(x+2), (x+1)(x+2), x+2\}$.

(2) $f \in V$ のとき, $(\varphi(f))(-2) = f(-1) = 0$ より $\varphi(f) \in W$ である. また,
$^\forall f, g \in V$, $(\varphi(f+g)(x) = (f+g)(x+1) = f(x+1) + g(x+1) = \varphi(f)(x) + \varphi(g)(x) = (\varphi(f) + \varphi(g))(x))$. $\therefore \varphi(f+g) = \varphi(f) + \varphi(g)$.
$^\forall f \in V, ^\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $(\varphi(\lambda f))(x) = (\lambda f)(x+1) = \lambda(f(x+1)) = \lambda((\varphi(f))(x)) = (\lambda\varphi(f))(x)$. $\therefore \varphi(f+g) = \varphi(f) + \varphi(g)$.
よって $\varphi\colon V \to W$ は線型写像である. □

(3) $f \in W$ に対し, 多項式 $\psi(f)$ を $(\psi(f))(x) = f(x-1)$ により定めると, $\psi \circ \varphi = \mathrm{id}_V, \varphi \circ \psi = \mathrm{id}_W$ であるから, $\psi\colon W \to V$ は求める逆写像である. □

(4) $\mathcal{V} = \{f_1, f_2, f_3\}, \mathcal{W} = \{g_1, g_2, g_3\}$ とおく.
$\varphi(f_1) = (x+1)(x+2)(x+3) = g_1 + 3g_2$,
$\varphi(f_2) = (x+2)(x+3) = g_2 + 2g_3$,
$\varphi(f_3) = x+2 = g_3$.
従って $\mathcal{V}, \mathcal{W}$ に関する f の表現行列は $\underline{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}}$.

問 4. 集合 V に対し、V 上の実数値二変数関数 d

$$d\colon V \times V \to \mathbb{R}$$

(すなわち、任意の $x, y \in V$ に対し、実数値 $d(x,y)$ が一つ対応する) が次を満たすとき、d を V 上の距離という。

(1) $d(x,y) \geq 0$ $(\forall x, y \in V)$
(2) $d(x,y) = d(y,x)$ $(\forall x, y \in V)$
(3) $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
(4) (三角不等式) $d(x,y) + d(y,z) \geq d(x,z)$ $(\forall x, y, z \in V)$

V を $\mathbb{C}$ 上の線型空間、$\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ を V 上のエルミート計量とするとき、d を

$$d(x,y) = \|x - y\| \ (\forall x, y \in V)$$

と定義すると、d は V 上の距離となることを示せ。但し、$\|\cdot\|$ は計量 $\langle\cdot\mid\cdot\rangle$ から定まるノルムとする。

（解答）

(1) $d(x,y)=\sqrt{\langle x-y|x-y\rangle}\geq 0\ ({}^{\forall}x,y\in V)$,

(2) $d(x,y)=\sqrt{\langle x-y|x-y\rangle}=\sqrt{(-1)^2\langle y-x|y-x\rangle}=d(y,x)\ ({}^{\forall}x,y\in V)$,

(3) $d(x,y)=\sqrt{\langle x-y|x-y\rangle}=0\Leftrightarrow\langle x-y|x-y\rangle=0\Leftrightarrow x-y=0\Leftrightarrow x=y$,

(4) ${}^{\forall}x,y,z\in V$,

$$\begin{aligned}
\|x-z\|^2 &= \langle x-z|x-z\rangle=\langle(x-y)+(y-z)|(x-y)+(y-z)\rangle\\
&= \langle x-y|x-y\rangle+\langle x-y|y-z\rangle+\langle y-z|x-y\rangle+\langle y-z|y-z\rangle\\
&= \langle x-y|x-y\rangle+\langle x-y|y-z\rangle+\overline{\langle x-y|y-z\rangle}+\langle y-z|y-z\rangle\\
&= \langle x-y|x-y\rangle+2\,\mathrm{re}\langle x-y|y-z\rangle+\langle y-z|y-z\rangle\\
&\leq \langle x-y|x-y\rangle+2|\langle x-y|y-z\rangle|+\langle y-z|y-z\rangle\\
&\quad \text{Cauchy-Shwarz の不等式より,}\\
&\leq \|x-y\|^2+2\|x-y\|\,\|y-z\|+\|y-z\|^2\\
&= (\|x-y\|+\|y-z\|)^2.
\end{aligned}$$

$\therefore \|x-y\|+\|y-z\|\geq\|x-z\|\Leftrightarrow d(x,y)+d(y,z)\geq d(x,z)$.

(1)〜(4) より, d は V 上の距離となる. □

問 5. $\mathbb{C}^4$ を標準計量で計量線型空間とみなす。$\mathbb{C}^4$ の $\mathbb{C}$-部分線型空間 V が以下のように生成されるとき、グラム・シュミットの直交化法を用いて正規直交基底を構成せよ。

$$V=\left\langle\begin{pmatrix}\sqrt{-1}\\1\\\sqrt{-1}\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\sqrt{-1}\\-1\\2\sqrt{-1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\\sqrt{-1}\\-4\\\sqrt{-1}\end{pmatrix}\right\rangle$$

（解答）

$V=\{w_1,w_2,w_3\}$ とする.

$v_1=\dfrac{w_1}{\|w_1\|}=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}\sqrt{-1}\\1\\\sqrt{-1}\\1\end{pmatrix}$.

$w_2'=w_2-\langle v_1|w_2\rangle v_1=\begin{pmatrix}1\\2\sqrt{-1}\\-1\\2\sqrt{-1}\end{pmatrix}-2\sqrt{-1}\cdot\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}\sqrt{-1}\\1\\\sqrt{-1}\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\\sqrt{-1}\\0\\\sqrt{-1}\end{pmatrix}$, $v_2=\dfrac{w_2'}{\|w_2'\|}=\dfrac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}2\\\sqrt{-1}\\0\\\sqrt{-1}\end{pmatrix}$.

$w_3'=w_3-\langle v_1|w_3\rangle v_1-\langle v_2|w_3\rangle v_2=\begin{pmatrix}2\\\sqrt{-1}\\4\\\sqrt{-1}\end{pmatrix}-2\sqrt{-1}\cdot\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}\sqrt{-1}\\1\\\sqrt{-1}\\1\end{pmatrix}-\sqrt{6}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}2\\\sqrt{-1}\\0\\\sqrt{-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-\sqrt{-1}\\-3\\-\sqrt{-1}\end{pmatrix}$,

$v_3=\dfrac{w_3'}{\|w_3'\|}=\dfrac{1}{2\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\-\sqrt{-1}\\-3\\-\sqrt{-1}\end{pmatrix}$. 以上の操作により V の正規直交基底 $\{v_1,v_2,v_3\}$ が得られた. □

2009 年度数学 II 演習 (火曜４限)
後期 NO.6　筆記演習

「固有値・最小多項式・固有空間」
理科一類 37-39 組、1 月 12 日実施
担当教員：中岡宏行

※指定された用紙に解答を記し、演習時間内に提出してください。自筆のノートのみ参照可。相談不可です。尚、裏面にレポート問題についての記載があります。

以下、n は正の整数とする。

問 1. A を $\mathbb{C}$-係数 n 次正方行列とし、k を任意の正の整数とする。固有値の定義に戻り、以下を示せ。

(∗) A の任意の固有値λに対し、λ^kは A^kの固有値となる。

問 2. *3* 次正方行列

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 10 \\ 1 & 4 & 5 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{C})$$

に対して、以下の問に答えよ。

(1) A の固有値を求めよ。
(2) (1) で求めたそれぞれの固有値に対し、それに属する固有空間の次元を求めよ。必要なら次元公式を用いてよい。
(3) (1) で求めたそれぞれの固有値に対し、それに属する固有空間のひと組の基底を与えよ。(実際にそれが基底となっていることも示して下さい。)

<u>最小多項式</u>

A を $\mathbb{C}$-係数 n 次正方行列とする。$\mathbb{C}$-係数多項式

$$f(t) = \sum_{i=0}^{d} a_i t^i \ (a_i \in \mathbb{C})$$

に対し、$f(A)$ を

$$f(A) = \sum_{i=0}^{d} a_i A^i$$

で定義する。但し、$A^0 = E_n$ (単位行列)。

A の**最小多項式** $\varphi_A(t)$ とは、$f(A) = 0$ を満たす $\mathbb{C}$-係数多項式 $f(t)$ のうち、最高次係数が 1 で次数が最小のものをいう。
最小多項式 $\varphi_A(t)$ に対し、

[1] $\varphi_A(t)$ は固有多項式 $F_A(t)$ を割り切る
[2] $\varphi_A(t)$ と $F_A(t)$ の根は、重複を除き集合として一致する

ことが知られている。以下の全ての設問でこれらを用いてよい。

問 3.

$$A = \begin{pmatrix} 2c+3 & -2 & 4c+2 \\ 2c+2 & -2 & 4c+1 \\ -c-2 & 1 & -2c-2 \end{pmatrix}$$

に対して、以下の問に答えよ。但し、c は定数 $(c \in \mathbb{C})$ とする。

(1) A の固有多項式を求めよ。
(2) $c = 0, 1$ それぞれの場合に A の最小多項式を求めよ。

問 4. $\mathbb{C}$-係数 n 次正方行列 A に対し、以下が同値であることを示せ。必要なら問 1 の結果を用いてよい。

(1) $A^n = 0$.
(2) A の固有値は全て 0.

以下はレポート問題とします。提出は次回の演習時です。今回の演習に出席し解答した方の提出は任意ですが、レポート提出によるある程度の加点を行う可能性があります。今回の演習 (満点を 100 点とする) を病欠の場合は 75 点満点、理由なしの欠席の場合は 50 点を満点とし採点を行いますので、欠席者は、今回の演習問題とレポート問題の両方に解答し呈出するようにして下さい。

提出に際し、以下の事項を記載してください。

- 氏名・学籍番号
- 演習の行われた日にち
- 欠席の有無と、欠席の場合はその理由 (証明書類を要求する場合があります)。
- 誰かと協力して解答を作成した場合、協力者全員の氏名。

問 5. A を $\mathbb{C}$-係数 n 次正方行列とする。$n = n_1 + n_2$ なる正の整数 n_1, n_2 及び $A_1 \in M_{n_1}(\mathbb{C}),\ A_2 \in M_{n_2}(\mathbb{C}),\ B \in M_{n_1,n_2}(\mathbb{C})$ が存在して A が

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & B \\ O & A_2 \end{pmatrix}$$

と分割されるとき、A, A_1, A_2 の固有多項式 F_A, F_{A_1}, F_{A_2} の間に

$$F_A = F_{A_1} \cdot F_{A_2}$$

なる関係が成立することを示せ。

問 6. 複素数からなる数列 $x = \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を考える。(但し $\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$ とする。)
以下に答えよ。

(1) 漸化式 $x_{n+2} = 3n + 1 - 2x_n$ を満たす $x = \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ 全体の集合を V とすると、V は自然に $\mathbb{C}$ 上の線型空間となることを示せ。
(2) $v = \{v_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を $v_1 = 1, v_2 = 0$ を満たす V の元、$w = \{w_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を $w_1 = 0, w_2 = 1$ を満たす V の元とするとき、$\{v, w\}$ は V の基底をなすことを示せ。
(3) V から V への「添字を 1 ずらす写像」$T : V \to V$; $(T(x))_n = x_{n+1}$ を考える。T は線型写像となることを示し、基底 $\{v, w\}$ に関する表現行列を求めよ。
(4) T の固有値 λ_1, λ_2 と、それぞれに属する固有ベクトル x_1, x_2 の一例を求めよ。さらに、$\{x_1, x_2\}$ は V の基底となることを示せ。
(5) (4) を用いて、漸化式 $x_{n+2} = 3x_{n+1} - 2x_n$ の定める数列の一般解を求めよ。

NO.
DATE

第6回 演習

問1. $\lambda \in \mathbb{C}$ をAの固有値とすると、$\det(\lambda E_n - A) = 0$ である。

$k=1$のとき主張は自明。$k \geq 2$とする。

このとき、$\det(\lambda^k E_n - A^k) = \det\{(\lambda E_n - A)(\lambda^{k-1}E_n + \lambda^{k-2}A + \cdots + A^{k-1})\}$

$$= \det(\lambda E_n - A) \cdot \det(\lambda^{k-1}E_n + \lambda^{k-2}A + \cdots + A^{k-1}) = 0$$

であるから、λ^k は A^k の固有値である。□

問2. (1)
$$\det(\lambda E_n - A) = \begin{vmatrix} \lambda-4 & -4 & -10 \\ -1 & \lambda-4 & -5 \\ 1 & 2 & \lambda+3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda-4 & -4 & -10 \\ -1 & \lambda-4 & -5 \\ 0 & \lambda-2 & \lambda-2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda-4 & 6 & -10 \\ -1 & \lambda+1 & -5 \\ 0 & 0 & \lambda-2 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda-2)\begin{vmatrix} \lambda-4 & 6 \\ -1 & \lambda+1 \end{vmatrix} = (\lambda-1)(\lambda-2)^2$$

より、Aの固有値は $\underline{\lambda = 1, 2}$

(2) 固有値λに属する固有空間を $V(\lambda)$とし、行列Pの表す線型写像を f_P とする。

$V(1)$について考える。

$E - A = \begin{pmatrix} -3 & -4 & -10 \\ -1 & -3 & -5 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ を行基本変形して $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ を得るから、

$\dim V(1) = \dim \mathrm{Ker} f_{E-A} = \dim \mathrm{Ker} f_B = 3 - \dim \mathrm{Im} f_B$ (次元公式)

ここで $\dim \mathrm{Im} f_B = \mathrm{rank}\, B = 2$ であるから、$\underline{\dim V(1) = 1}$.

$V(2)$についても同様に、

$2E - A = \begin{pmatrix} -2 & -4 & -10 \\ -1 & -2 & -5 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ を行基本変形して $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ を得るから、

$\underline{\dim V(2) = 3 - \mathrm{rank}\, C = 2}$.

(3) $V(1) = \mathrm{Ker} f_B = \left\langle \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ であるから、$\left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ は $V(1)$ の基底である。

また、$V(2) = \mathrm{Ker} f_C = \left\langle \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ で、$\lambda_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0$ より

$\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ は線型独立であるから、$\left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ は $V(2)$ の基底である。

(1)

$$\det(\lambda E_3 - A) = \begin{vmatrix} \lambda-2c-1 & 2 & -4c-2 \\ -2c-2 & \lambda+2 & -4c-1 \\ c+2 & -1 & \lambda+2c+2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda+1 & 0 & 2\lambda+2 \\ 2 & \lambda & 2\lambda+3 \\ c+2 & -1 & \lambda+2c+2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda+1 & 0 & 0 \\ 2 & \lambda & 2\lambda-1 \\ c+2 & -1 & \lambda-2 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda+1)\begin{vmatrix} \lambda & 2\lambda-1 \\ -1 & \lambda-2 \end{vmatrix} = (\lambda+1)^2(\lambda-1)$$

(2) 最小多項式は固有多項式を割り切り、また それぞれの根が一致するので、

Aの最小多項式は $(t+1)(t-1)$, $(t+1)^2(t-1)$ のいずれかである。

・$c=0$ のとき

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad A^2 - E_3 = O_3$$ より、Aの最小多項式は $(t+1)(t-1)$

・$c=1$ のとき

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 6 \\ 4 & -2 & 5 \\ -3 & 1 & -4 \end{pmatrix}, \quad A^2 - E_3 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -4 \\ -3 & 0 & -6 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \neq O_3$$ より、$(t+1)(t-1)$ は最小多項式でない。

一方 Hamilton-Cayley の定理 より $(A+E_3)^2(A-E_3) = O_3$ であるので、Aの最小多項式は

$(t+1)^2(t-1)$.

問.4.

(1)⇒(2)

$A^n = 0$ より、A^nの固有多項式は $\det(\lambda E_n - A^n) = \lambda^n$ であるから、A^nの固有値は全て0。

もし A が固有値 $\alpha \neq 0$ を持つとすると、問1により A^n が固有値 $\alpha^n \neq 0$ をもつことになり矛盾。

よって Aの固有値は全て 0 である。

(2)⇒(1)

Aの固有値が全て0とすると、Aの固有多項式は λ^n となるから、

Hamilton-Cayley の定理 より $A^n = 0$ が従う。//

NO.

DATE

問5. $F_A = \det(\lambda E_n - A) = \det\begin{pmatrix} \lambda E_{n_1} - A_1 & -B \\ 0 & \lambda E_{n_2} - A_2 \end{pmatrix} = \det(\lambda E_{n_1} - A_1)\cdot\det(\lambda E_{n_2} - A_2) = F_{A_1}\cdot F_{A_2}$. □

問6. (1) $x = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}},\ y = \{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in V,\ \lambda\in\mathbb{C}$ に対し、$x+y,\ \lambda x \in V$ を

$x+y = \{x_n + y_n\}_{n\in\mathbb{N}},\ \lambda x = \{\lambda x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ で定めると $\forall x, y, z \in V,\ \lambda, \mu \in \mathbb{C}$,

(1) $(x+y)+z = \{(x_n+y_n)+z_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{x_n+(y_n+z_n)\}_{n\in\mathbb{N}} = x+(y+z)$

(2) $x+y = \{x_n+y_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{y_n+x_n\}_{n\in\mathbb{N}} = y+x$

(3) $0 = \{0\}_{n\in\mathbb{N}}$ とすると、$0+x = \{0+x_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} = x$

(4) $x' = \{-x_n\}$ とすると、$x+x' = \{x_n+(-x_n)\}_{n\in\mathbb{N}} = \{0\}_{n\in\mathbb{N}} = 0$

(5) $\lambda(x+y) = \{\lambda(x_n+y_n)\} = \{\lambda x_n + \lambda y_n\} = \lambda x + \lambda y$

(6) $(\lambda+\mu)x = \{(\lambda+\mu)x_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{\lambda x_n + \mu x_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \lambda x + \mu x$

(7) $(\lambda\mu)x = \{(\lambda\mu)x_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{\lambda(\mu x_n)\}_{n\in\mathbb{N}} = \lambda(\mu x)$

(8) $1\cdot x = \{1\cdot x_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} = x$

(1)〜(8) より V は線型空間となる。□

(2) $u_1 = \lambda_1,\ u_2 = \lambda_2$ なる $u = \{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in V$ に対し、

$u = \lambda_1 v + \lambda_2 w$ と表せる。

また、$\lambda_1 v + \lambda_2 w = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0$ より v, w は線型独立、

従って $\{v, w\}$ は V の基底をなす。□

NO.

DATE

$\forall x, y \in V,\ \lambda \in \mathbb{C}$

(3) $(T(x+y))_n = (x+y)_{n+1} = x_{n+1} + y_{n+1} = (T(x))_n + (T(y))_n$

$(T(\lambda x))_n = (\lambda x)_{n+1} = \lambda \cdot x_{n+1} = \lambda (T(x))_n$

より T は線形写像であって,

$(T(v))_1 = v_2 = 0,\ (T(v))_2 = v_3 = -2$ より $\quad T(v) = -2w$

$(T(w))_1 = w_2 = 1,\ (T(w))_2 = w_3 = 3$ より $\quad T(w) = v + 3w$

従って 基底 $\{v, w\}$ に関する T の表現行列は $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$

(4) T の表現行列を A として T の固有多項式は

$\det(\lambda E_2 - A) = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 2 & \lambda - 3 \end{vmatrix} = \lambda^2 - 3\lambda + 2 = (\lambda - 1)(\lambda - 2)$

これより, T の固有値は $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 2$ である.

また $(E_2 - A)v_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} v_1 = 0,\ (2E_2 - A)v_2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} v_2 = 0$ なる v_1, v_2 として

$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},\quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ をとると,

$x_1 = \{(x_1)_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を $(x_1)_1 = 1,\ (x_1)_2 = 1$, $x_2 = \{(x_2)_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を $(x_2)_1 = 1,\ (x_2)_2 = 2$ で定め

x_1, x_2 は それぞれ 固有値 λ_1, λ_2 に属する V の固有ベクトルである. また,

$\langle x_1, x_2 \rangle = \{p_1 x_1 + p_2 x_2 \mid p_1, p_2 \in \mathbb{C}\} = \left\{ y \in V \,\middle|\, \begin{array}{l} y_1 = p_1 + p_2, \\ y_2 = p_1 + 2p_2 \end{array} \right\} = V$

$\left(\because\ \forall \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2,\quad \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} \text{ とすれば } \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 + p_2 \\ p_1 + 2p_2 \end{pmatrix} \right)$

$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \neq 0$ より,

また $y = p_1 x_1 + p_2 x_2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = p_1 + p_2 = 0 \\ y_2 = p_1 + 2p_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow p_1 = p_2 = 0$ より x_1, x_2 は線形独立.

したがって $\{x_1, x_2\}$ は V の基底である. □

(5) $T^n(x) \in V \ (n=0,1,2)$ を $T^n(x) = T(T^{n-1}(x))$ ， $T^0(x) = x$ により帰納的に定める.

$T^{n-1}(x) = p_n v + q_n w$ で表す.

$$x_n = (T(x))_{n-1} = \cdots = (T^{n-1}(x))_1 = (p_n v + q_n w)_1$$

$$= p_n v_1 + q_n w_1 = p_n$$

$$\begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} p_{n-1} \\ q_{n-1} \end{pmatrix} = \cdots = A^{n-1} \begin{pmatrix} p_1 \\ q_1 \end{pmatrix} = A^{n-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

但し $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ は Tの表現行列.

ここで $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ とおくと, $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ より $P^{-1}A^{n-1}P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^{n-1} \end{pmatrix}$

$$\therefore \ A^{n-1} = \begin{pmatrix} 2-2^{n-1} & -1+2^{n-1} \\ 2-2^n & -1+2^n \end{pmatrix}$$ であるから,

$$\begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix} = A^{n-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (2-2^{n-1})x_1 + (-1+2^{n-1})x_2 \\ (2-2^n)x_1 + (-1+2^n)x_2 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \ x_n = p_n = \underline{(2-2^{n-1})x_1 + (-1+2^{n-1})x_2}$$

2009 年度数学 II 演習 (火曜４限)
後期 NO.7　筆記演習

「二次形式　変数変換と標準形」
理科一類 37-39 組、1 月 26 日実施
担当教員：中岡宏行

※今回は特に採点は行いません。また、提出の必要もありません。

二次形式

問 1. n 個の変数 $x_1, \ldots, x_n$ に対し、二次同次式

$$(1) \quad Q = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j \ (a_{ij} \in \mathbb{R})$$

を、$x_1, \ldots, x_n$ に関する (実) 二次形式という。$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}$ とおくとき、ある n 次実対称行列 $T = (t_{ij})$ が存在して (1) は

$$(2) \quad \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j = {}^t x T x$$

と表せる。
実際、t_{ij} を

$$t_{ij} = \begin{cases} a_{ii} & (i = j) \\ \frac{1}{2}(a_{ij} + a_{ji}) & (i \neq j) \end{cases}$$

と定義すると (2) を満たすことを示せ。

問 2. 二次形式

$$(3) \quad Q = 2x_1^2 + 2x_2^2 - x_3^2 - 8x_1x_2 + 4x_1x_3 - 4x_2x_3$$

を、実対称行列 T を用いて (2) のように表せ。

二次形式の変数変換

問 3. P を n 次正則行列とし、$x = Py\,(x, y \in \mathbb{R})$ という変数変換を考える。このとき、(1) を y に関して

$$Q = {}^t y T' y$$

と表すことができる。
$T' = {}^t P T P$ であることを示せ。

問 4. 任意の実 n 次対称行列は直交行列を用いて対角化可能である。問 *2* で求めた対称行列 T に対し、それを対角化する直交行列 U を以下の手順で求めよ。

(1) T の固有ベクトルからなる $\mathbb{R}^n$ の正規直交基底 $\{u_1, \ldots, u_n\}$ を一つ与えよ。
(2) $U = (u_1, \ldots, u_n)$ とおくと、${}^U TU$ は対角行列となることを示せ。

二次形式の標準形

問 5. 問 *1* のように二次形式

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j = {}^t xTx$$

を考える。

問 *4* のように T を対角化する直交行列 U をとるとき、変数変換 $x = Uy$ により次のように変換されることを示せ。但し、$\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ はそれぞれ $u_1, \ldots, u_n$ の属する固有値とする。

$$Q = \lambda_1 y_1^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2$$

U の第 i 列 u_i を $\frac{1}{\sqrt{\lambda_i}}$ 倍し、さらに適当に列を入れ替えた正則行列 P をとると、$x = Pz$ $(z \in \mathbb{R}^n)$ により次のように変換されることを示せ。これをこの二次形式の標準形という。

$$Q = z_1^2 + \cdots + z_s^2 - z_{s+1}^2 - \cdots - z_t^2 \ (1 \leq {}^\exists s \leq {}^\exists t \leq n)$$

問 6. 問 *4* を用いて、問 *2*(3) を標準形に直せ。

第7回 計算演習

問1.

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j = \sum_{k=1}^{n} a_{kk} x_k^2 + \sum_{i\neq j}^{n} a_{ij} x_i x_j$$

$$= \sum_{k=1}^{n} a_{kk} x_k^2 + \sum_{i<j}^{n} (a_{ij}+a_{ji}) x_i x_j$$

一方 ${}^t x T x = \left(\sum_{i=1}^{n} t_{i1} x_i \cdots \sum_{i=1}^{n} t_{in} x_i \right) x$

$$= \sum_{j=1}^{n} x_j \left(\sum_{i=1}^{n} t_{ij} x_i \right) = \sum_{i,j=1}^{n} t_{ij} x_i x_j$$

$$= \sum_{k=1}^{n} t_{kk} x_k^2 + \sum_{i\neq j}^{n} t_{ij} x_i x_j$$

$$= \sum_{k=1}^{n} t_{kk} x_k^2 + \sum_{i<j}^{n} 2 t_{ij} x_i x_j$$

よって $t_{ij} = \begin{cases} a_{ii} & (i=j) \\ \frac{1}{2}(a_{ij}+a_{ji}) & (i\neq j) \end{cases}$ とすれば

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j = {}^t x T x \quad . \square$$

問2.

$$Q = (x_1\ x_2\ x_3) \begin{pmatrix} 2 & -4 & 2 \\ -4 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

問3.

$$Q = {}^t(Py)\, T\, (Py) = {}^t y ({}^t P T P) y$$

$$\therefore T' = {}^t P T P \quad . \square$$

問4、 $\det|\lambda E_3 - T| = \begin{vmatrix} \lambda-2 & 4 & -2 \\ 4 & \lambda-2 & 2 \\ -2 & 2 & \lambda+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda+2 & 4 & -2 \\ 0 & \lambda-2 & 2 \\ -2\lambda-4 & 2 & \lambda+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda+2 & 4 & -2 \\ 0 & \lambda-2 & 2 \\ 0 & 10 & \lambda-3 \end{vmatrix}$

$= (\lambda+2)\begin{vmatrix} \lambda-2 & 2 \\ 10 & \lambda-3 \end{vmatrix} = (\lambda+2)^2(\lambda-7)$

$7E_3 - T = \begin{pmatrix} 5 & 4 & -2 \\ 4 & 5 & 2 \\ -2 & 2 & 8 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ と基本変形される

$\therefore V(7) = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$, 正規化して $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$-2E_3 - T = \begin{pmatrix} -4 & 4 & -2 \\ 4 & -4 & 2 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ と基本変形される。

$\therefore V(-2) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\rangle$ （注：都合よく選んだ）

$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, 正規化して $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

よって $\underline{U = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}}$.

(2) ${}^tUTU = \begin{pmatrix} -2 & & \\ & -2 & \\ & & 7 \end{pmatrix}$.

NO.

DATE . .

問5.

$$ {}^t x T x = {}^t(Uy)\,T\,(Uy) $$
$$ = {}^t y({}^t U T U) y $$
$$ = {}^t y \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} y $$
$$ = \begin{pmatrix} \lambda_1 y_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n y_n \end{pmatrix} y = \lambda_1 y_1^2 + \cdots + \lambda_n y_n $$

$$ {}^t x T x = {}^t(Pz)\,T\,(Pz) $$
$$ = {}^t z({}^t P T P) z $$
$$ = {}^t z\left({}^t(UQ)\,T\,(UQ)\right) z $$
$$ = {}^t z\left({}^t Q \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \cancel{Q}\right) z $$
$$ = {}^t z \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & -1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} z $$
$$ = z_1^2 + \cdots + z_s^2 - z_{s+1}^2 - \cdots - z_t^2 $$

λ_iから成る第i列を移し,
$\lambda_{i_1}, \dots, \lambda_{i_s} > 0$ なる $i_1, \dots, i_s$ 列を $1, \dots, s$ 列に
$\lambda_{i_{s+1}}, \dots, \lambda_{i_t} < 0$ なる $i_{s+1}, \dots, i_t$ 列を $s+1, \dots, t$ 列に,
$\lambda_{i_{t+1}}, \dots, \lambda_{i_n} = 0$ なる $i_{t+1}, \dots, i_n$ 列を $t+1, \dots, n$ 列に
移す右基本変形を表す行列を Q とし,
$P = UQ$ と表す。

問6.

$$ P = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} & & 1/\sqrt{7} \\ & 1/\sqrt{2} & \\ 1/\sqrt{2} & & \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} & 1/\sqrt{7} \\ -\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 2/\sqrt{7} \\ 1/\sqrt{2} & -\sqrt{2} & 2/\sqrt{7} \end{pmatrix} $$ として, $x = Pz$ とおくと

$$ {}^t x T x = {}^t(Pz)\,T\,Pz = {}^t z \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{pmatrix} z = z_1^2 - z_2^2 - z_3^2 $$