２００９年度数学II資料 (理I向け) '09/12/14（月）３限
'09/12/15（火）３限

以下では特に断らなければ K で $\mathbb{R}$ あるいは $\mathbb{C}$ を表す.

問 1. $\mathbb{R}_3[x]$ を x に関する高々 3 次の実係数多項式全体のなす線型空間とし,

$$V = \{f \in \mathbb{R}_3[x] \mid f(1) = 0\},\ W = \{f \in \mathbb{R}_3[x] \mid f(2) = 0\}$$

と置く.

1) $V \cap W$ の基底を一組求めよ．これを $\mathscr{U}$ とする．V, W の基底 $\mathscr{V}, \mathscr{W}$ であって, $\mathscr{U}$ の拡大（延長）となっているものを一組ずつ求めよ.
2) $f \in V$ の時, x に関する多項式 $\varphi(f)$ を $\varphi(f)(x) = f(x-1)$ により定める．$\varphi(f) \in W$ であることと，$\varphi\colon V \to W$ は線型同型写像であることを示せ.
3) 1) で求めた V の基底 $\mathscr{V}$ と W の基底 $\mathscr{W}$ に関する φ の表現行列を求めよ.

問 2. $\mathbb{R}^n$ と標準計量を考える．また，標準的なノルムを $\|\cdot\|$ で表す.

1) $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ が計量を保つ線型写像であれば f は線型同型写像であることを示せ.

※ 以下では $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ は計量を保つ線型写像であるとする.

2) $\forall v \in \mathbb{R}^n,\ \|f(v)\| = \|v\|$ が成り立つことを示せ.
3) $v, w \in \mathbb{R}^n$ とする．v と w のなす角と $f(v)$ と $f(w)$ のなす角は常に等しいことを示せ.
   ※ 証明の書き方に困難を感じる場合には v と w のなす角は 0 以上 π 未満と仮定してもよい.
4) （追加）線型とは限らない写像 $g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ が条件

$$\forall v \in \mathbb{R}^n,\ \|g(v)\| = \|v\|$$

   を充たすとする．このとき g は線型同型写像であることを示せ.
   ヒント：まず g が計量を保つことを示し，次に $\|g(v+w) - g(v) - g(w)\|^2$ を計算してみよ.

問 3. $M_n(K)$ を行列の加法と定数倍により K-線型空間とみなす．$A, B \in M_n(K)$ について $\langle A|B\rangle = \operatorname{tr} A^*B$ と置く．また，e_{ij} を (i,j)-成分が 1 で，ほかの成分は全て 0 であるような $M_n(K)$ の元とする．

1) $\langle\,\cdot\,|\,\cdot\,\rangle$ は $M_n(K)$ の計量であることを示せ．以下では常にこの計量を考える．
2) $\{e_{ij}\}_{1\le i,j\le n}$ は $M_n(K)$ の正規直交基底であることを示せ．
3) $A \in \mathrm{GL}_n(K)$ とし，$f_A\colon M_n(K) \to M_n(K)$ を $f_A(X) = AX$ により定める．f_A は線型同型写像であることを示せ．

   ヒント：f_A の表現行列を用いるのはあまり得策ではない．
4) ${f_A}^*$（f_A の随伴写像）について，${f_A}^*(X)$ を A と X を用いて簡潔に表せ．

   ヒント：f_A や ${f_A}^*$ の表現行列を考えるのは得策ではない．
5) f_A が対称変換（$K = \mathbb{R}$ の場合）あるいはエルミート変換（$K = \mathbb{C}$ の場合）になるための A に関する条件を求めよ．
6) f_A が等長写像になるための A に関する条件を求めよ．

（以上）

２００９年度数学II資料 (理I向け) '10/1/7（木）３限
'10/1/12（火）３限

以下では特に断らなければ K で $\mathbb{R}$ あるいは $\mathbb{C}$ を表す.

定義 1. 直和分解 $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_r$ が直交直和分解であるとは，この直和が直交直和であることを言う.

問 2. 1) $A \in \mathrm{O}_n$ とすると $\det A = \pm 1$ が成り立つことを示せ.

2) $A \in \mathrm{O}_2$ とする.

(a) $\mathbb{R}^2$ のある 1 次元部分線型空間 V であって，A-不変なものが存在したとする．すると $\det A = -1$ であるか，あるいは $A = \pm E_2$ であることを示せ．また，この逆も正しいことを示せ.

(b) $\det A = -1$ であれば 直交直和分解 $\mathbb{R}^2 = V_1 \oplus V_2$（直交直和）であって，$V_1, V_2$ は共に A-不変であり，かつ $\dim V_1 = \dim V_2 = 1$ であるようなものが存在することを示せ．また，A から自然に定まる $\mathbb{R}^2$ の線型変換（一次変換）を簡潔に図示せよ．その際，線型変換と V_1, V_2 との関係がわかるようにすること.

3) $A \in \mathrm{O}_3$ とする.

(a) 直交直和分解 $\mathbb{R}^3 = V_1 \oplus V_2$ （直交直和）であって，V_1, V_2 は共に A-不変であり，かつ $\dim V_1 = 1$ であるようなものが存在することを示せ.

(b) $\det A = 1$ であれば $\forall v \in V_1,\ f(v) = v$ が成り立つように V_1 を取れることを示せ．また，$\det A = -1$ であれば $\forall v \in V_1,\ f(v) = -v$ が成り立つように V_1 を取れることを示せ.

(c) V_1 を (b) のように取る．このとき $v \in V_2$ について $g(v) = f(v)$ と置けば g は計量を保つ V_2 の線型変換であることを示せ．さらに，V_2 の任意の正規直交基底に関する g の表現行列を B とすれば $B \in \mathrm{O}_2$ かつ $\det B = 1$ が成り立つことを示せ.

(d) A から自然に定まる $\mathbb{R}^3$ の線型変換を，V_1, V_2 との関係がわかるように簡潔に図示せよ.

定義 3. $X \in M_n(K)$ について

$$\exp X = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} X^m$$
$$= E_n + X + \frac{1}{2} X^2 + \cdots + \frac{1}{m!} X^m + \cdots$$

と置いて exp を（行列の）指数函数と呼ぶ．なお，ここでは $X^0 = E_n$ と考える．

注. 1) 本来は上の定義にある級数の収束は大切な問題であるのでなるべく調べてみること．必要であれば教科書などを参照せよ．

2) $\exp X$ には日本語の定まった呼称は無いように思う．

問 4 (収束については気にせず,「項が無限にある多項式」と考えて計算すればよい).

1) $X \in M_n(K)$, $P \in \mathrm{GL}_n(K)$ とすると，$\exp(P^{-1}XP) = P^{-1}(\exp X)P$ が成り立つことを示せ.

2) $X \in M_n(K)$ とすると，${}^t\exp X = \exp {}^tX$，$(\exp X)^* = \exp X^*$ がそれぞれ成り立つことを示せ.

3) $X, Y \in M_n(K)$ が $XY = YX$ を充たせば

$$\exp(X+Y) = (\exp X)(\exp Y) = (\exp Y)(\exp X)$$

が成り立つことを示せ．$XY = YX$ が成り立たない場合には $\exp(X+Y)$, $(\exp X)(\exp Y)$, $(\exp Y)(\exp X)$ のどの二つも一致しないことがある．このような例を挙げよ．

4) $X \in M_n(K)$ であれば $\exp X \in \mathrm{GL}_n(K)$ が成り立つことを示せ．また，$(\exp X)^{-1}$ を求めよ．

5) $X \in \mathfrak{o}_n = \{X \in M_n(\mathbb{R}) \mid X + {}^tX = O_n\}$ ならば $\exp X \in \mathrm{O}_n$ が成り立つことを示せ．また，$X \in \mathfrak{u}_n = \{X \in M_n(\mathbb{C}) \mid X + X^* = O_n\}$ ならば $\exp X \in \mathrm{U}_n$ が成り立つことを示せ．

問 5. $X \in M_n(K)$ とする．$\{\alpha_1, \ldots, \alpha_r\}$ を X の相異なる固有値全体とし，α_i の重複度を p_i とする．

1) $\exp X$ の相異なる固有値全体は $\{e^{\alpha_1}, \ldots, e^{\alpha_r}\}$ であって，e^{α_i} の重複度は p_i であることを示せ．

ヒント：X を三角化してみよ．

2) $\det \exp X = e^{\mathrm{tr}\, X}$ が成り立つことを示せ．

問 6 ($K=\mathbb{R}$ として考えてもよい).　1) $X \in M_n(K)$ とする．$\mathrm{GL}_n(K)$ に値をとる函数 $F\colon \mathbb{R} \to \mathrm{GL}_n(K)$ を

$$F(t)=\exp(tX),\ t\in\mathbb{R}$$

により定める．このとき $\dfrac{dF}{dt}(t) = X\exp(tX) = (\exp(tX))X$ が成り立つことを示せ．ここで，行列に値をとる函数の微分は行列の各成分を函数とみて微分することにより定める．

2) Y を $M_n(K)$ に値をとる，実数 t に関する函数とする．ここで

$$Z(t)=\exp Y(t)$$

と置く．

(a) $n=1$ とすると

$$\frac{dZ}{dt}(t)=\frac{dY}{dt}(t)Z(t)=Z(t)\frac{dY}{dt}(t)$$

が成り立つことを示せ．

(b) $X \in M_n(K)$ として，$Y(t)=Xt$ と置くと，1) の場合であることを確かめよ．従ってこのときも

$$\frac{dZ}{dt}(t)=\frac{dY}{dt}(t)Z(t)=Z(t)\frac{dY}{dt}(t)$$

が成り立つ．

(c) $m \geq 2$ とすると $\dfrac{dZ}{dt}(t)$, $\dfrac{dY}{dt}(t)Z(t)$, $Z(t)\dfrac{dY}{dt}(t)$ のうちどの二つも一致しないことがあることを例を挙げて示せ．

（以上）

NO.

DATE

問2 1) $A \in O_n$ より ${}^tA A = E$. $(\det {}^tA)(\det A) = \det({}^tAA) = \det E = 1$,

$\det {}^tA = \det A$ より, $\det A = \pm 1$. □

2) $A = [a_1\ a_2] \in O_2$ とすると, $|a_1| = |a_2| = 1$ より

$a_1 = \begin{pmatrix}\cos\theta \\ \sin\theta\end{pmatrix}$, $a_2 = \begin{pmatrix}\cos\varphi \\ \sin\varphi\end{pmatrix}$ とおける. $(\theta, \varphi \in \mathbb{R})$

更に $a_1 \perp a_2$ より ${}^ta_1 a_2 = \cos\theta\cos\varphi + \sin\theta\sin\varphi = \cos(\theta - \varphi) = 0$

∴ $\varphi = \theta - \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow A = \begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta\end{pmatrix}$ $(\det A = -1)$

または $\varphi = \theta + \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow A = \begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$ $(\det A = 1)$ のいずれかである.

(i) $\det A = -1$ のとき

$A = \begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta\end{pmatrix}$ に対し $v_0 = \begin{pmatrix}\cos\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2}\end{pmatrix}$, $V = \langle v_0 \rangle$ とすれば

$v \in V \Rightarrow Av \in V$ が成り立ち, V は A-不変である.

(ii) $\det A = 1$

$A = \begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$ に対し, A-不変であるような $V \subset \mathbb{R}^2$ $(\dim V = 1)$

が存在するような θ の条件を求める. 即ち, $v_0 = \begin{pmatrix}\cos\varphi \\ \sin\varphi\end{pmatrix}$, $V = \langle v_0 \rangle$ とするとき

$v \in V \Rightarrow Av \in V$ なる $\varphi \in \mathbb{R}$ が存在するための θ に関する条件を考える.

$Av_0 = \begin{pmatrix}\cos(\theta + \varphi) \\ \sin(\theta + \varphi)\end{pmatrix}$ より $Av_0 \in V$ となるのは ($|Av_0| = 1$ より)

$Av_0 = v_0 \Leftrightarrow \theta = 2n\pi$ または $Av_0 = -v_0 \Leftrightarrow \theta = (2n+1)\pi$ $(n \in \mathbb{Z})$,

即ち $A = \pm E_2$ が必要である. 逆にこのとき任意の φ をとれば V は A-不変である.

以上により, A-不変な $V \subset \mathbb{R}^2$ $(\dim V = 1)$ が存在することと, $\det A = -1$ または $A = \pm E_2$ であることは同値. □

NO.

DATE

(ii) $\det A = -1$ より $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$ $(\theta \in \mathbb{R})$ とかける。このAに対し

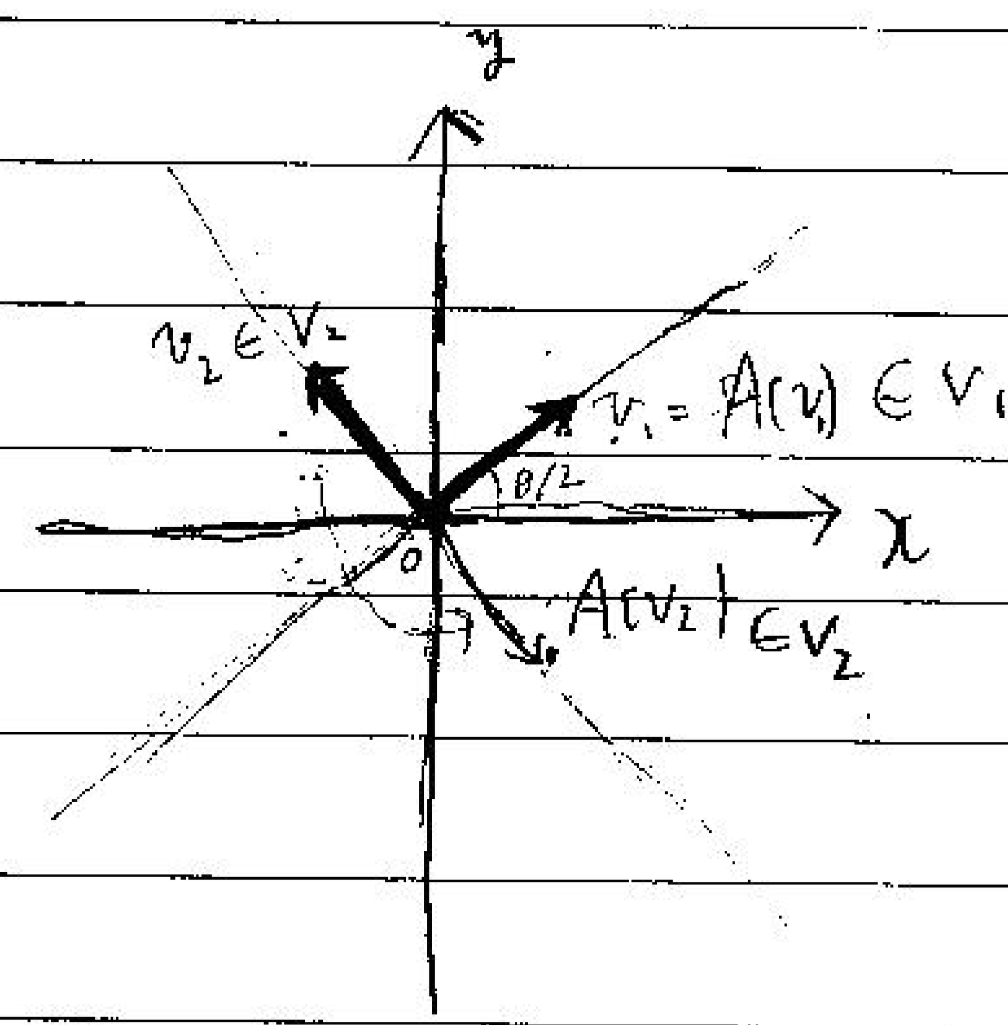
$v_1 = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$, $v_2 \begin{pmatrix} -\sin\frac{\theta}{2} \\ \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$ とし、$V_1 = \langle v_1 \rangle$, $V_2 = \langle v_2 \rangle$ とすれば

$V_1 \oplus V_2 = \mathbb{R}^2$ (直交直和) であって

V_1, V_2 は共にA-不変であり、$\dim V_1 = \dim V_2 = 1$ である。

また、$f(v) = Av$ なる線型変換 $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ を

図示すると右のようになる。



(直線 $y = \left(\tan\frac{\theta}{2}\right)x$ に関する折り返し)

3)(ii) $f(v) = Av$ とする。

• $\det A = 1$ のとき

順番が
逆転しました
ゴメンナサイ m(_ _)m

$\det(E - A) = \det(A\,{}^tA - A) = \det A({}^tA - E) = \det A \cdot \det({}^tA - E)$

$= \det A \cdot \det {}^t({}^tA - E) = \det A \cdot \det(A - E)$

$= \det A \cdot (-1)^3 \det(E - A) = -\det(E - A)$

$\therefore \det(E - A) = 0$, よって Aは固有値1をもつから、固有値1に属する固有空間を V_1 とすれば

$\forall v \in V_1$, $f(v) = v$ が成り立つ。

• $\det A = -1$ のとき

$\det(E + A) = \det(A\,{}^tA + A) = \det A({}^tA + E) = \det A \cdot \det({}^tA + E)$

$= \det A \cdot \det {}^t({}^tA + E) = \det A \cdot \det(A + E) = -\det(E + A)$

$\therefore \det(E + A) = 0$ よって Aは固有値 -1 をもつから、

固有値 -1 の属する固有空間を V_1 とすれば $\forall v \in V_1$, $f(v) = -v$ が成り立つ。 □

(a)

Aの固有方程式の実数解(のうちの1つ)を α とすると (固有方程式は3次なので少なくとも1つ実解をもつ)、

ある0でない $v_0 \in \mathbb{R}^3$ について $Av_0 = \alpha v_0$ が成り立つ。

$v_1 = \dfrac{v_0}{\|v_0\|}$ とし、また $v_2, v_3 \in \mathbb{R}^3$ を $\{v_1, v_2, v_3\}$ が正規直交基底となるようにとる。

(::3)(a)の方針)　このとき，$\{Av_1, Av_2, Av_3\}$ は再び $\mathbb{R}^3$ の正規直交基底である．

（∵ $U = (v_1\ v_2\ v_3)$ とすると $U \in O_3$ であって，
$AU\,{}^t(AU) = A(U\,{}^tU){}^tA = A\,{}^tA = E$ より $AU \in O_3$ であることが分かる）

いま，$V_1 = \langle v_1 \rangle$，$V_2 = \langle v_2, v_3 \rangle$ とすると，$\mathbb{R}^3 = V_1 \oplus V_2$（直交直和）であって，

特に V_2 は V_1 の直交補空間（$V_2 = V_1^{\perp}$）である．

$v \in V_1$ を $v = \lambda_1 v_1$ ($\lambda_1 \in \mathbb{R}$) とおくと，$Av = \alpha\lambda_1 v_1 \in V_1$ より V_1 は A-不変である．

また，$v' \in V_2$ を $v' = \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3$ とおくと，$Av' = \lambda_2(Av_2) + \lambda_3(Av_3)$ であって，

$Av_2 \perp Av_1$，$Av_3 \perp Av_1$，$Av_1 = \alpha v_1$ より $Av' \perp v_1$．従って $Av' \in V_1^{\perp} = V_2$ より

V_2 もまた A-不変である．$\dim V_1 = 1$ であったから V_1, V_2 が題意をみたす．□

(c)　g の随伴行列を ${}^tg$ とすると，$g(v) = {}^tAv$．

よって $\forall v, w \in V_2$ に対して　（∵ $A \in O_3$ より ${}^tAA = E_3$）

$$\langle g(v) \mid g(w) \rangle = \langle {}^tg[g(v)] \mid w \rangle = \langle {}^tA(Av) \mid w \rangle = \langle v \mid w \rangle$$

故に g は V_2 の計量を保つ．また，$v_2, v_3 \in \mathbb{R}^3$ を (a) と同様に定めるとき

$$g(v_2) = b_{11}v_2 + b_{21}v_3,\quad g(v_3) = b_{12}v_2 + b_{22}v_3 \text{ とすると，}$$

$B = (b_1\ b_2) = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$ は g の $\{v_2, v_3\}$ に関する表現行列である．

$g(v_2)$ と $g(v_3)$，即ち Av_2 と Av_3 は直交するから，${}^t(g(v_2))g(v_3) = b_{11}b_{12} + b_{21}b_{22} = {}^tb_1 b_2 = 0$，
（${}^tv_2v_3 = 0$；${}^tv_2v_2 = {}^tv_3v_3 = 1$ に注意）

また，g が計量を保つことから $|b_1| = |b_2| = 1$　∴ $B \in O_2$

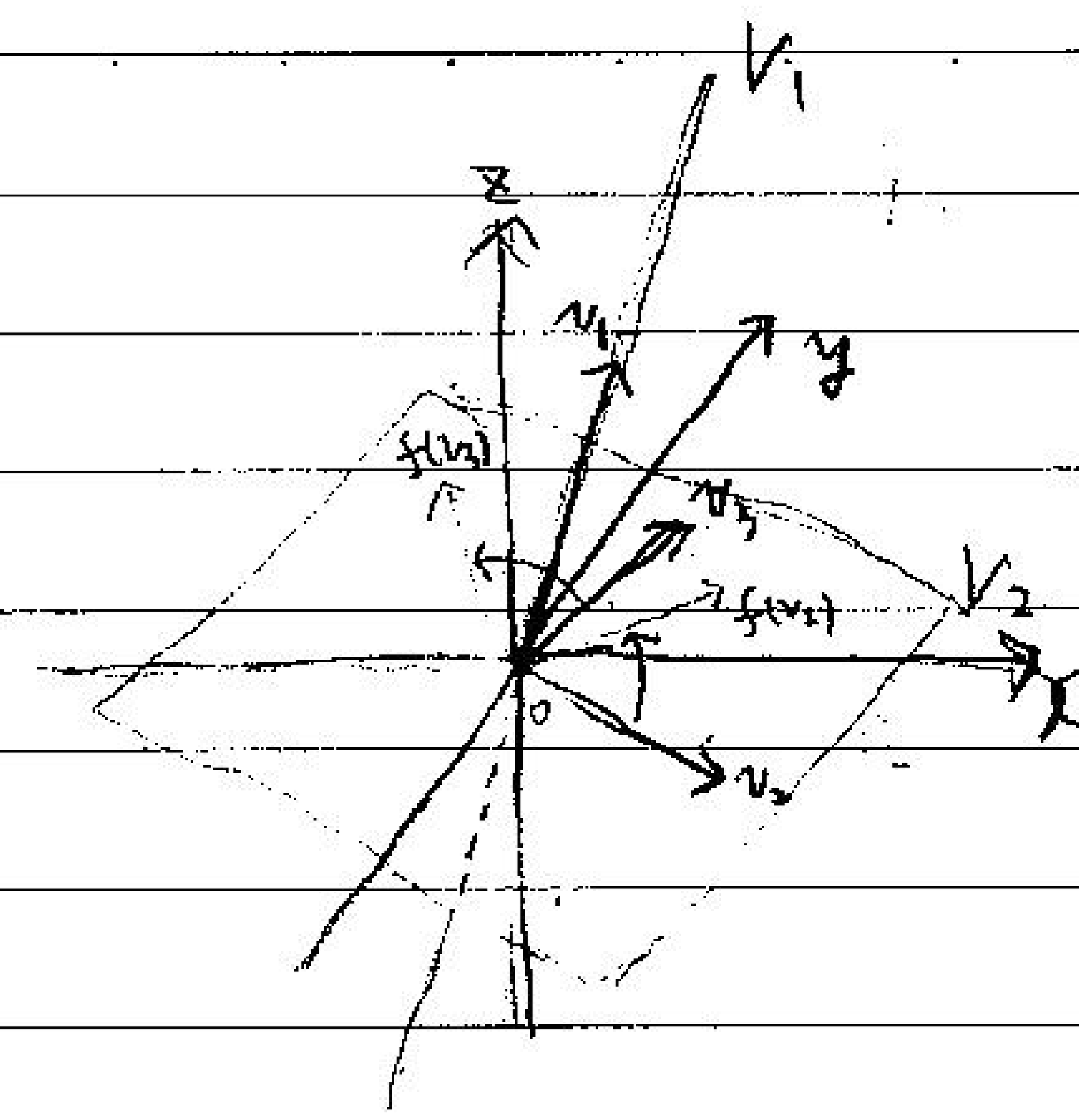
$$AU = \begin{pmatrix} f(v_1) & f(v_2) & f(v_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\det A)v_1 & g(v_2) & g(v_3) \end{pmatrix} = U\begin{pmatrix} \det A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \text{ より}$$

$$\det A = \det U^{-1}AU = \det\begin{pmatrix} \det A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} = \det A \cdot \det B \quad \therefore\ \det B = 1 \quad \square$$

NO.

DATE

(d) $f(v)=Av$ なる線型写像 $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ を図示すると右のようになる。



($\vec{v}_1$ 方向の直線に関する回転 と、$\det A=-1$ のとき、
さらに $\vec{v}_2,\vec{v}_3$ の張る平面に関する反転 を表す)