年賀状シケプリ（お年玉問題付き）

明けましておめでとうございます！数 II シケ対の木村です.
シケプリといいつつ授業内容の説明は皆無です☆正規のシケプリはしばしお待ちを...
シケ対からのお年玉ということで問題のプレゼントです！(そこ, 要らないとか言わない！)

（問題）

$\mathbb{R}_3[x]$ を高々3 次の実係数多項式のなす線型空間とする. $f, g \in \mathbb{R}_3[x]$ に対し, $\langle f \mid g \rangle$ を

$$\langle f \mid g \rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx$$

により定めると, $\langle f \mid g \rangle$ は $\mathbb{R}_3[x]$ 上の計量を与える（このことは認めてよい）.

1) $\mathbb{R}_3[x]$ の基底 $\{1, x, x^2, x^3\}$ から正規直交基底を構成せよ.

2) $f(x) = 70x^3 + 15x^2 - 6x + 16$ を (1) で求めた基底の線型結合で表せ.

3) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \{f(x)\}^2 dx$ を求めよ.

（解答）

1) $\{1,x,x^2,x^3\}=\{f_0,f_1,f_2,f_3\}$ とおく. $\|\cdot\|$ を $\langle\cdot\mid\cdot\rangle$ から定まるノルムとする.

Gram-Schmid の直交化法により正規直交基底 $\{g_0,g_1,g_2,g_3\}$ を構成する.

$\|f_0\|^2=\displaystyle\int_{-1}^{1}1dx=2,\ g_0=\frac{f_0}{\|f_0\|}=\frac{1}{\sqrt{2}}.$

$f_1'=f_1-\langle g_0\mid f_1\rangle g_0=x,\ \|f_1'\|^2=\displaystyle\int_{-1}^{1}x^2dx=\frac{2}{3},\ g_1=\frac{f_1'}{\|f_1'\|}=\frac{\sqrt{6}}{2}x.$

$f_2'=f_2-\langle g_0\mid f_2\rangle g_0-\langle g_1\mid f_2\rangle g_1=x^2-\dfrac{1}{3},$

$\|f_2'\|^2=\displaystyle\int_{-1}^{1}\left(x^2-\frac{1}{3}\right)^2dx=\frac{8}{45},\ g_2=\frac{f_2'}{\|f_2'\|}=\frac{\sqrt{10}}{4}(3x^2-1).$

$f_3'=f_3-\langle g_0\mid f_3\rangle g_0-\langle g_1\mid f_3\rangle g_1-\langle g_2\mid f_3\rangle g_2=x^3-\dfrac{3}{5}x,$

$\|f_3'\|^2=\displaystyle\int_{-1}^{1}\left(x^3-\frac{3}{5}x\right)^2dx=\frac{8}{7\cdot 25},\ g_3=\frac{f_3'}{\|f_3'\|}=\frac{\sqrt{14}}{4}(5x^3-3x).$

以上により正規直交基底 $\{g_0,g_1,g_2,g_3\}$ が得られた. □

2) $f(x)=14(5x^3-3x)+5(3x^2-1)+36x+21=\underline{4\sqrt{14}g_3+2\sqrt{10}g_2+12\sqrt{6}g_1+21\sqrt{2}g_0}.$

3) $\{g_0,g_1,g_2,g_3\}$ の正規性および直交性より,

$$\int_{-1}^{1}\{f(x)\}^2dx=(4\sqrt{14})^2\|g_3\|^2+(2\sqrt{10})^2\|g_2\|^2+(12\sqrt{6})^2\|g_1\|^2+(21\sqrt{2})^2\|g_0\|^2$$
$$=4^2\cdot 14+2^2\cdot 10+12^2\cdot 6+21^2\cdot 2=\underline{2010}.$$

（別解）

$$\int_{-1}^{1}\{f(x)\}^2dx=\int_{-1}^{1}(4900x^6+2100x^5-615x^4+2060x^3+516x^2-192x+256)dx$$
$$=2\int_{0}^{1}(4900x^6-615x^4+516x^2+256)dx=2\Big[700x^7-123x^5+172x^3+256x\Big]_0^1=\underline{2010}$$

※一般に $f_n=\sqrt{\dfrac{2n+1}{2}}\cdot\dfrac{1}{2^n n!}\dfrac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$. $P_n(x)=\dfrac{1}{2^n n!}\dfrac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$ を Legendre 多項式という.

$\mathbb{R}_3[x]$ の正規直交基底を構成することにより, f のノルムを求める手続きを, $\mathbb{R}^4$ のベクトルのノルムを標準基底により求めるのと同様に行うことができるというわけです. まぁ今回の場合は素直に計算したほうが早いという説もありますが... Legendre 多項式のような直交多項式は理論上および応用上重要であり, 他には Laguerre 多項式, Hermit 多項式などがあります.

2010 年も皆さんにとって良い年でありますように. 試験にむけて頑張っていきましょう！