数学 IA 講義ノート(No.2) 理科一類 37 組

～はじめに～

数学 IA の講義ノート第 2 弾です.今回は基本事項や定理,問題を一通り提示し,最後に問題の解答を掲載するという形式になっています.つまり,定理の証明については一部を問題として提示するだけにとどめ,基本的には掲載していません.代わりに問題や解説を(前回よりは)充実させてゆきたいと考えています.

…ちなみに全部で 28 ページです.

第 2 章 微分

§2.1 導関数

関数$f:(a,b)\to\mathbb{R}$が点$c\in(a,b)$で微分可能であるとは,

$$f'(c)=\lim_{h\to 0}\frac{f(c+h)-f(c)}{h}$$

が存在するときをいいます.つまり,0 に収束する任意の数列$(h_n)_{n=1}^{\infty}$に対して$\frac{f(c+h_n)-f(c)}{h_n}$が同じ値に収束しなければならないというわけです.従って,微分可能であることの定義は, 0 に収束する任意の数列$(h_n)_{n=1}^{\infty}$に対して極限

$$f'(c)=\lim_{n\to\infty}\frac{f(c+h_n)-f(c)}{h_n}$$

が存在すること,ということもできます.あるいは,

$$^{\forall}\varepsilon>0\,^{\exists}\delta>0\,^{\exists}f'(c)\left[0\neq|h|<\delta\implies\left|\frac{f(c+h)-f(c)}{h}-f'(c)\right|<\varepsilon\right]$$

といってもよいでしょう.このような$f'(c)$を,点cにおけるfの微分係数といいます.

また,関数$y=f(x)$が定義域の全ての点で微分可能であるとき,単に微分可能であるといいます.このとき,各点に対してその微分係数を対応させる関数を導関数とよび,

$$y',f'(x),\frac{dy}{dx},\frac{df}{dx}$$

などと書きます.導関数を求めることを,微分するといいます.

なお,$f:[a,b]\to\mathbb{R}$,すなわち定義域が閉区間のときは,端点での微分係数は

$$f'(a)=\lim_{h\to+0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h},f'(b)=\lim_{h\to-0}\frac{f(b+h)-f(b)}{h}$$

と定めます.記号「$h\to+0$」,「$h\to-0$」は,それぞれ

「hが正の値をとりながら 0 に近づいてゆく」

「hが正の値をとりながら 0 に近づいてゆく」

という意味です.

Ex2.1.1 $f(x)=x^n\ (n=0,1,2)$を定義に従って微分せよ.

Ex2.1.2 $\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=1$を示し,定義に従って$f(x)=\sin x$の導関数を求めよ.

Ex2.1.3 $a>0$のとき$\lim_{t\to 0}\frac{a^t-1}{t}=\log a$を示し,定義に従って$f(x)=a^x$の導関数を求めよ.

Ex2.1.4 次の関数が$x=0$で微分可能でないことを示せ.
(1) $f(x)=|x|$
(2) $f(x)=\sqrt[3]{x}$

関数fが連続な導関数f'をもつとき,fは連続微分可能,あるいはC^1級といいます.同様に,連続なn階導関数$f^{(n)}$をもつとき,fはn階連続微分可能,あるいはC^n級といいます.また,関数fが連続であることを,C^0級ということがあります.さらに,何回でも微分可能な関数をC^∞級といいます.

定理 2.1.1 関数$f(x)$が点cで微分可能ならば,点cで連続である.

定理 2.1.2 $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$が微分可能なとき,次が成り立つ.
(1) $\alpha f+\beta g\ (\alpha,\beta\in\mathbb{R})$も微分可能で,$(\alpha f+\beta g)'=\alpha f'+\beta g'$.
(2) fgも微分可能で,$(fg)'=f'g+fg'$.
(3) $\frac{f}{g}$もgの零点を除いて微分可能で,$\left(\frac{f}{g}\right)'=\frac{f'g-fg'}{g^2}$.

Ex2.1.5(Leibniz の公式) $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$が微分可能なとき,次の等式を証明せよ:

$$(fg)^{(n)}=f^{(n)}g+\binom{n}{1}f^{(n-1)}g'+\binom{n}{2}f^{(n-2)}g''+\cdots+fg^{(n)}.$$

ただし,$\binom{n}{p}$は二項係数[1]である.

定理 2.1.3(合成関数の微分) 関数f,gが微分可能で合成関数$g\circ f$が定義できるとき,$g\circ f$も微分可能で

$$(g\circ f)'=g'(f(x))f'(x).$$

[1] 二項係数は,$\binom{n}{p}=\frac{n!}{p!(n-p)!}$で定義されます.要は組み合わせの数のことですね.${}_nC_p$という表記をよく目にすると思いますが,こちらは local な記法なのであまり使わない方がよいそうです.

定理 2.1.4(逆関数の微分) $f:[a,b]\to\mathbb{R}$が狭義単調増加かつ微分可能で$f'(x)\neq 0$のとき,その逆関数$f^{-1}:[f(a),f(b)]\to[a,b]$は微分可能で,$y=f(x)$とおくと

$$(f^{-1})'(y)=\frac{1}{f'(x)}.$$

定理 2.1.3 及び定理 2.1.4 は,$y=f(x)$, $z=g(y)$とおくと,それぞれ

$$\frac{dz}{dx}=\frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx},$$

$$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{\frac{dy}{dx}}$$

と書けます.まるで分数式の計算のように見えますから,印象に残りやすいでしょう.

Ex2.1.6(逆関数の微分) $a>0, a\neq 1$のとき, $f(x)=\log_a x\ (x>0)$の導関数を求めよ.

Ex2.1.7(対数微分法) 次の関数を微分せよ.

(1) aが定数のとき,$f(x)=x^a\ (x>0)$

(2) $f(x)=x^{\sin x}\ (x>0)$

(3) $f(x)=\frac{x^2(x^2+1)^7(2x+1)^{18}}{(x^3+3x+3)^4}$

§2.2 平均値の定理と Taylor の定理

定理 2.2.1 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$が点$c\in(a,b)$で微分可能かつ最大値[最小値]をとるならば,$f'(c)=0$が成り立つ.

定理 2.2.2(Rolle の定理) $f:[a,b]\to\mathbb{R}$が微分可能かつ$f(a)=f(b)=0$のとき,

$$^{\exists}c\in(a,b)\ [f'(c)=0].$$

定理 2.2.3(平均値の定理) $f:[a,b]\to\mathbb{R}$が微分可能のとき,

$$^{\exists}c\in(a,b)\ \left[\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)\right].$$

Ex2.2.1 次を示せ.

(1) $f'\equiv 0 \iff f$は定数

(2) $f'(x)\geq 0\ (^{\forall}x\in[a,b]) \implies f(x)$は$[a,b]$において単調増加

微分係数の定義より,関数$f(x)$の点x_0における接線の式は

$$f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$$

となりますが,これは同時にfの 1 次関数近似を与えていると考えることもできます.
一般に,n階微分可能な関数$f(x)$に対し,Taylor 多項式を

$$T_n(x;x_0)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$
$$=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

と定めると,

$$f^{(k)}(x_0)=T_n{}^{(k)}(x_0;x_0)\ (k=0,1,2,\cdots,n)$$

が成り立ちます(ただし,$0!=1,f^{(0)}=f$).この意味で$T_n(x;x_0)$はfのn次関数近似だといえます.逆に,$k=0,1,2,\cdots,n$に対し,その第k次導関数の$x=x_0$における値が$f^{(k)}(x_0)$と等しくなるような関数は$T_n(x;x_0)$のみであることが知られています.

次の定理は,平均値の定理(定理 2.2.3)をn階微分まで拡張したものです.

定理 2.2.4(Taylor の定理) $f:[a,b]\to\mathbb{R}$がC^n級かつ$f^{(n)}$が(a,b)で微分可能ならば,

$$^\forall x_0\in(a,b)\,^\forall x\in(a,b)\ (x\neq x_0)\,^\exists\xi\in\left(x\text{と}x_0\text{の間}\right)\left[f(x)=T_n(x;x_0)+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}\right].$$

この$(n+1)$次の項を剰余項とよび,しばしばR_nと書きます.
なお,$x_0=0$のときの Taylor の定理を,特に Maclaurin の定理とよぶこともあります.

ここで Landau の記法[2]とよばれるものを導入します.
$x\to 0$のとき,$g(x)=O(x^m)$であるとは,

$$\limsup_{x\to 0}\left|\frac{g(x)}{x^m}\right|<+\infty,$$

すなわち

$$^\exists\delta>0\,^\exists M>0\ [|x|<\delta\implies|g(x)|\leq M|x|^m]$$

となることをいいます. $g(x)=o(x^m)$のように小文字で書くと意味が変わってしまうので注意しましょう.この定義から分かるように, $O(x^m)$は特定の関数を表すものではありませんが,たとえば$f(x)-g(x)=O(x^m)$のとき

$$f(x)=g(x)+O(x^m)$$

と書くことが許されています.なお, $x\to a$や$x\to\pm\infty$の場合にも Landau の記号は同様に定義されますが,ここでは特に断らない限り,Landau の記号を用いるときは$x\to 0$とします.

[2] ここで述べるのは,あくまでもその一部です.実際にはもっといろいろな使い方があります.なお,Landau の記法で用いられるO及びoは,今でこそ「オー」と読まれることもしばしばありますが,もとはギリシャ文字の「オミクロン」です.

定理 2.2.5 $g(x) = O(x^m)$, $h(x) = O(x^n)$ならば,

(1) $g(x) + h(x) = O\left(x^{\min\{m,n\}}\right)$

(2) $g(x)h(x) = O(x^{m+n})$

(3) $h\big(g(x)\big) = O(x^{mn})$ $(n \geq 1)$

Ex2.2.2 定理 2.2.5 を示せ.

この記法を用いると,Taylor の定理は次のように書くことができます:

fが$[a,b]$上C^{n+1}級かつ$x_0 \in [a,b]$のとき,

$$f(x) = T_n(x; x_0) + O((x - x_0)^{n+1}) \ (x \to x_0).$$

ここでの主張は少し弱くなっています.というのは,剰余項の係数が分からないからです.とはいっても,さしあたり剰余項の係数が必要になるということもそれ程ないので,シンプルで使い勝手の良いこちらの定理を用いることが多いです.

また,fがC^{n+1}級,$P(x)$が高々n次多項式のとき

$$f(x) = P(x) + O((x - x_0)^{n+1}) \ (x \to x_0)$$

と表されるならば,$P(x) = T_n(x; x_0)$であることが知られています.

例として,基本的な関数に対して$x_0 = 0$のときの Taylor の定理の適用例を示します:

$$(1 + x)^a = 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2}x^2 + \cdots + \frac{a(a-1)\cdots(a-n+1)}{n!}x^n + O(x^{n+1}),$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + O(x^{n+1}),$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + O(x^{2n+3}),$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + O(x^{2n+2}),$$

$$\log(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n!} + O(x^n).$$

これらの式は丸暗記しておいて損はないと思います.

Ex.2.2.3 $f(x)$が$x = a$の近傍で微分可能であり,その導関数$f'(x)$が$x = a$で微分可能なとき,次を示せ:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) + f(a-h) - 2f(a)}{h^2} = f''(a)$$

Ex2.2.4 次の関数に対し, $x \approx 0$における漸近展開を 6 次の項まで求めよ.

(1) $f(x) = \frac{1}{1-x}$

(2) $f(x) = \frac{x}{1-x-x^2}$

(3) $f(x) = \sin^2 x$

(4) $f(x) = \tan x$

(5) $f(x) = \log(1 + \log(1 + x))$

(6) $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

(7) $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

(8) $f(x) = \frac{e^{\sin x}}{2 + \cos x}$

(9) $f(x) = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^{\sin x}$

Ex2.2.5 次の極限値を求めよ.

(1) $\lim_{x \to +0} x^x$

(2) $\lim_{x \to 0} \frac{e^{3x} - e^{2x} - x}{1 - \cos x}$

(3) $\lim_{x \to 0} \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^{\frac{1}{x^2}}$

(4) $\lim_{x \to \infty} \left\{\log\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x\right\}^x$

§2.3 冪級数

bを定数,$a_n\,(n = 0,1,\cdots)$を定数とする関数項級数

$$a_0 + a_1(x-b) + a_2(x-b)^2 + \cdots + a_n(x-b)^n + \cdots$$

を, bを中心とする冪級数とよび,

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-b)^n$$

などと略記します.ここでは主に$b = 0$の場合を考えます.

冪級数がいつ収束するかを論じる前に,まずはその準備となる定理を並べます.

定理 2.3.1(比較判定条件) 数列$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \{b_n\}_{n=1}^{\infty}$に対し,$a_n \geq 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty$かつ$|b_n| < a_n$が成り立つならば,級数$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$は絶対収束する.

定理 2.3.2 数列$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$が上に有界, $\limsup a_n = \alpha$, $b_n \to b$, $b_n \geq 0$のとき,

(1) $\limsup(a_n + b_n) = \alpha + b$

(2) $\limsup a_n b_n = \alpha b$

定理 2.3.3(Cauchy の判定条件) 級数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$に対して,$\alpha = \limsup_{n\to\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}}$とおく.このとき

$$\alpha > 1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ は絶対収束}, \alpha < 1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ は発散.}$$

定理 2.3.4(d'Alembert の判定条件) 級数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$に対して,$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = r$が存在するとする.

このとき

$$r < 1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ は絶対収束}, r > 1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ は発散.}$$

定理 2.3.5(Weierstrass の M テスト) $M_n > 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} M_n < +\infty$, $f_n: [a, b] \to \mathbb{R}$, $\sup_x |f_n(x)| \leq M$,かつ$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$が絶対収束するとき,

(1) 各f_nが連続ならば, Fも連続.

(2) 各f_nが微分可能かつ$^{\exists}M_n{}'$ $[\sup_x |f_n(x)| \leq M_n{}'$, $\sum_{n=1}^{\infty} M_n{}' < +\infty]$ならば, Fも微分可能で

$$F'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x).$$

さて,いよいよ冪級数の収束についての話です.冪級数に対して Cauchy の判定条件(定理 2.3.3) を適用してみましょう. $\limsup_{n\to\infty} |a_n x^n|^{\frac{1}{n}} = \left(\limsup_{n\to\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}}\right)|x|$ となりますから,$R = \left(\limsup_{n\to\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}}\right)^{-1}$ とおくと,

$$|x| < R \implies \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \text{ は絶対収束}, |x| > R \implies \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \text{ は発散}$$

が成り立ちます.この意味で,Rを冪級数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$の収束半径とよびます.

なお, $\limsup_{n\to\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} = 0$のとき$R = +\infty$,$\limsup_{n\to\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} = +\infty$のとき$R = 0$とします.

Ex2.3.1(収束半径) 次の冪級数の収束半径を求めよ.

(1) $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n$

(2) $\sum_{n=0}^{\infty} x^{n^2}$

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\log(n+1)} x^n$

定理 2.3.6 冪級数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$に対し $R = \limsup_{n\to\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}}$とおくと, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$は$(-R, R)$において連続かつ何回でも微分可能で,

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}.$$

このことを,項別微分可能とよびます.

Ex.2.3.2 $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$とおくと,この冪級数の収束半径は$+\infty$で,$f'(x) = f(x)$及び$f(x+y) = f(x)f(y)$が成り立つことを示せ.

Ex2.3.3 次の級数の和を求めよ(数学好きな人だけどうぞ).

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{16^n}\left(\frac{4}{8n+1} - \frac{2}{8n+4} - \frac{1}{8n+5} - \frac{1}{8n+6}\right)$$

Column ～複素数の世界へ～

小学校以来の算数や数学の授業で,実数における加減乗除及び指数,対数,三角関数の計算法を学びました.正の整数に始まり 0 が加わって,負の数が登場して有理数が…という具合に数の体系がどんどん拡大されていったわけです.僕等が知っている中で一番大きい数の体系は複素数で,すでにその加減乗除は計算できます.ここでは複素数に対する指数,対数,三角関数及び冪乗関数の定義やその応用を紹介します.

…とはいっても,それらはいろいろな基礎(複素数列の極限とか,複素級数の収束とか,複素関数の微積分とか)の上に成り立つものなので,紙面の都合上(というか自分でも説明できるかどうか怪しいから)厳密性をほぼ無視して感覚で突き進みます.「砂上の楼閣」なんて言わないで下さい.きっと数学ってそんな風に発展してきた部分も多いと思うのです.

ちなみに,複素数は平面(2 次元)の上に表すことができます(数Ⅱ演習でやりましたね)から,複素関数(=複素数から複素数への対応)を実関数と同じ感覚でグラフにしようとすると,2+2=4 次元(!)の空間が必要となります.普通の人間には 4 次元なんて理解不能ですから,複素関数を視覚化するときには「複素平面上の図形が,関数によりどのような図形に移されるか」を表現します.ここでは解説しませんが.

Ex3.2.2 より

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad ({}^{\forall}x \in \mathbb{R})$$

が成り立ちます.右辺はxが複素数のときにも意味を持ちそうですから,複素変数の指数関数e^zを

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \tag{C.1}$$

と定義します.任意の$z \in \mathbb{C}$に対し,右辺の複素級数がある複素数に収束することが分かっています.実数のときと同様の指数法則が成り立つことも証明できますが,ここでは暗黙に了解しておきます.

さて,Taylor の定理(定理 2.2.4)より

$$\sin x = \sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} + \frac{(-1)^{N+1}\sin\xi}{(2N+3)!} x^{2N+3} \quad ({}^{\exists}\xi)$$

ですが, xを固定すると剰余項は

$$\left| \frac{(-1)^{N+1}\sin\xi}{(2N+3)!} x^{2N+3} \right| \leq \frac{|x|^{2N+3}}{(2N+3)!} \to 0 \ (N \to \infty)$$

となりますから,

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} \quad ({}^{\forall}x \in \mathbb{R})$$

が成り立ちます.同様に

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} \quad ({}^{\forall}x \in \mathbb{R})$$

も成り立ちます.そこで先程と同様に,複素変数の三角関数$\sin z$,$\cos z$を

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}, \tag{C.2}$$

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n} \tag{C.3}$$

と定義します.ここでも任意の$z \in \mathbb{C}$に対し,右辺の複素級数がある複素数に収束することが示せます.加法定理も成り立ちます.

これで指数関数と三角関数の定義ができました.とはいっても,複素級数の形で定義されたところで,あまり親しみが湧かないでしょう.そこで,指数関数e^zに$z = x + iy$ $\left(i = \sqrt{-1}\right)$を代入すると,(C.1)式より

$$e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iy)^n}{n!} = e^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} y^{2n} + i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} y^{2n+1} \right).$$

よって,(C.2)及び(C.3)式より

$$e^{x+iy} = e^x (\cos y + i \sin y) \tag{C.4}$$

が成り立ちます.これでやっと「指数関数が計算できた!」という気持ちになると思います.

(C.4)式の特別な場合として,

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i \sin\theta \tag{C.5}$$

が分かります.これが Euler の公式です.$\theta = \pi$のときの

$$e^{i\pi} = -1$$

はあまりにも有名ですね.

(C.4)式を見て明らかなように,指数関数は虚数軸に沿って見ると周期関数になっています.この事実は複素変数の対数関数を考えるときに厄介になります.

再び(C.4)式($x, y \in \mathbb{C}$でも成り立つことに注意!)より

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z,$$

$$e^{-iz} = e^{i(-z)} = \cos(-z) + i \sin(-z) = \cos z - i \sin z$$

が成り立つことを考えると,

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

となります.ここで,議論を簡単にするために双曲線関数とよばれるものを導入します.

双曲線正弦関数及び双曲線余弦関数とは,次式で定義される関数です(いきなり複素変数で定義しています).

$$\sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$

先程の式と似ていますね.実は

$$\sin iz = i\sinh z\ ,\cos iz = \cosh z$$

が成り立っています.三角関数のときと同様に,双曲線関数にも他に正接,余接,正割,余割があります.なぜ双曲線関数という名前がついているのかというと,点$(\cosh t\,,\sinh t)$が双曲線$x^2 - y^2 = 1$上にあるからです.つまり

$$\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1$$

が成り立ちます(簡単な指数計算です).また,形を見て分かる通り,

$$\frac{d}{dz}\sinh z = \cosh z\ ,\frac{d}{dz}\cosh z = \sinh z$$

となります(従って漸近展開が非常にきれいな形となるので,実は§2.2 の練習問題でも取り上げています).

双曲線関数の性質はこのくらいにして,本論に戻りましょう.三角関数の加法定理より,

$$\sin(x+iy) = \sin x\cos iy + \cos x\sin iy = \sin x\cosh y + i\cos x\sinh y,$$

$$\cos(x+iy) = \cos x\cos iy - \sin x\sin iy = \cos x\cosh y - i\sin x\sinh y$$

が成り立ちます.やっと三角関数が「計算」できました.

それでは,対数関数の定義です.実数のときは$y = \log x \iff x = e^y$と定義されました.そこでは指数関数の単調性が重要だったわけです.しかし,先程述べた通り,複素変数の指数関数は周期性を持っていて,ひとつの$z \in \mathbb{C}$に対して$z = e^w$となるwが無限に存在するのです.しょうがないので,0 でない複素数zに対し,$z = e^w$となるwすべてを対応させる関数(無限多価関数!)として複素変数の対数関数を定義します.$\log(x+iy)$を計算するとひどいことになるので,まず極形式というものを定義します.

極形式とは,複素数を極座標のように表示したものです.複素数の絶対値と偏角については既習(これも数Ⅱ演習でやりました)とします.複素数$z(\neq 0)$の絶対値をr,偏角をθとすると,

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) \tag{C.6}$$

と書けますが,Euler の公式(C.5)より

$$z = re^{i\theta} \tag{C.7}$$

が成り立ちます.(C.6)と(C.7)はどちらも極形式とよばれますが,ここでは(C.7)を考えます.

実数の場合と同じつもりで計算すると

$$\log re^{i\theta} = \mathrm{Log}\, r + i\theta \tag{C.8}$$

となります.ただし,Log は実変数の対数関数です.偏角の一つをθ_0とすれば,$\theta_0 + 2n\pi\ (n \in \mathbb{Z})$のすべてが$\theta$の候補となりますから,確かにこの式は無限個の数を与えています.無限を扱うのは難しいので,実用上細かく分割して考えます.

$-(n+1)\pi < \theta \leq n\pi$の範囲で偏角はただ一つに定まりますから,対数関数は 1 価関数

$$f_n(z) = \mathrm{Log}\, r + i\theta\ (-(n+1)\pi < \theta \leq n\pi)$$

の集まりとみなすことができます.$f_n(z)$をそれぞれ対数関数の分枝とよびます.とくに

$$f_0(z) = \mathrm{Log}\, r + i\theta\ (-\pi < \theta \leq \pi)$$

を主値といい,$\mathrm{Log}\, z$で表します.この対数関数の主値は,zが正の実数値をとるとき実変数の

対数関数に一致しますから,(C.8)式で用いたものとは何の不整合も生じません.
最後に冪乗関数ですが,指数関数と対数関数が既に定義されていますから

$$z^\alpha = e^{\alpha \log z}$$

と定義します.例としてi^iを計算してみましょう.$|i| = 1$, $\arg i = \frac{\pi}{2} + 2n\pi\ (n \in \mathbb{Z})$より

$$\log i = \left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) i$$

ですから,

$$i^i = e^{i \log i} = e^{-\frac{\pi}{2} - 2n\pi}$$

となります(実数になっている!).

これで指数,対数,三角関数と冪乗関数の定義は終わりです.だいぶ複素数に親近感を覚えられたと思います. 興味のある人は,逆三角関数とか逆双曲線関数とかも考えてみてください.「複素数の計算ができても所詮は机上の空論,何の役にも立たないのではないか」とか言われたら困るので,その応用上の話をしたいのですが,いつのまにかColumnだけで4ページも使ってしまったのでそれは次回にして,あと少し別の話題を紹介します.

指数関数e^zは,実数軸に沿って見ると発散しますが,虚数軸に沿うと周期関数になると言いました.逆に三角関数$\sin z$や$\cos z$は,実数軸に沿って見ると周期関数ですが,虚数軸に沿うと発散することが確認できます.では,実数軸と虚数軸の両方に沿って周期関数となるような関数はあるでしょうか? …実をいうと,そのような性質を持つ関数は,高校までに習う範囲だと定数関数しかありません.
一般に,$\mathbb{C}$上定義された有理型関数$f(u)$が,$\mathbb{R}$上 1 次独立な複素数ω_1, ω_2を周期とするとき,$f(u)$は 2 重周期ω_1, ω_2を持つ楕円関数であるといいます.有理型関数というのは,まだ定義するのに足る知識がないので,とりあえず「あまり変な関数ではない」くらいの捉え方でいいです.よく知られているものとしては,Weierstrassの$\wp$関数やJacobiの楕円関数があります.名前の由来ですが,元は楕円の弧長を求める積分の逆関数として定義されたことによるようです.この楕円関数について研究するのが楕円関数論という分野で,その応用は広いです.数学では 5 次方程式の解の公式や,かの有名な Fermat の最終定理(On Campus の Session 4 でやりましたね)で活躍し,物理でも単振子の周期(こちらは力学で)などで登場します.

…そろそろ試験勉強に戻りましょうか.ここまでたどり着いた人に,少しでも「複素数の世界」の雰囲気を味わうことができたと思ってもらえたならうれしい限りです.

付録 問題の解答

この講義ノートでとりあげた問題の解答です.ほとんど筆者が勝手に加えた問題なので,おかしいところがあったらそれとなく教えて下さい.あまり試験を意識して作った問題がないので,F 君と Y 君が作ってくれる問題集に期待しましょう.あと,先生の HP にあるサンプル問題の解答を A 君に作ってもらう予定です.

(Ex2.1.1)

(1) $n=0$のとき

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1-1}{h}=0=0\cdot x^{0-1}.$$

(2) $n=1$のとき

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)-x}{h}=1=1\cdot x^{1-1}.$$

(3) $n\geq 2$のとき

二項定理より

$$\begin{aligned}f'(x)&=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}h^k-x^n}{h}\\&=\lim_{h\to 0}\left(nx^{n-1}+\frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h+\cdots+h^{n-1}\right)=nx^{n-1}.\end{aligned}$$

(1)～(3)より,題意は示された.

★通例$x^0=1$と定めます.なぜわざわざこんなことを断るのかというと,$x=0$のとき$x^0=0^0$(ゼロのゼロ乗)となり定義されないからです.

(Ex2.1.2)

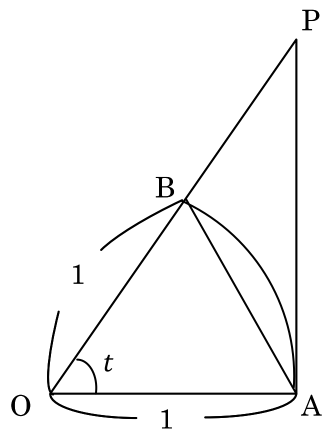
[証明] 右図のような,OA=1,∠AOP=t,∠OAP=$\frac{\pi}{2}$の直角三角形 OAPを考える.辺OP上にOB=1 となるように点Bをとると

$$\Delta\mathrm{OAB}=\frac{1}{2}\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OB}\sin t=\frac{1}{2}\sin t.$$

また

$$(\text{扇形 OAB})=\frac{1}{2}\mathrm{OA}^2t=\frac{1}{2}t.$$

さらに,$\mathrm{AP}=\tan t$より



$$\Delta\mathrm{OAP} = \frac{1}{2}\mathrm{OA}\cdot\mathrm{AP} = \frac{1}{2}\tan t.$$

ここで,面積の大小関係は

$$\Delta\mathrm{OAB} < (\text{扇形 OAB}) < \Delta OAP$$

であるから,

$$\frac{1}{2}\sin t < \frac{1}{2}t < \frac{1}{2}\tan t$$

が成り立つ.各辺を$\frac{1}{2}\sin t\ (\neq 0)$で割ると

$$1 < \frac{t}{\sin t} < \frac{\tan t}{\sin t} = \frac{1}{\cos t}$$

となり,

$$\lim_{t\to+0}\frac{1}{\cos t} = 1$$

であるから,はさみうちの原理(定理 1.2.3)より

$$\lim_{t\to+0}\frac{\sin t}{t} = \lim_{t\to+0}\frac{1}{\frac{t}{\sin t}} = 1.$$

一方$t \to -0$のとき,$t = -u$とおくと$u \to +0$であるから

$$\lim_{t\to-0}\frac{\sin t}{t} = \lim_{u\to+0}\frac{\sin(-u)}{-u} = \lim_{u\to+0}\frac{\sin u}{u} = 1$$

も成り立つ.以上より

$$\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t} = 1$$

が示された. (Q.E.D.)

上で示した極限及び$\cos x$の連続性より,$f(x) = \sin x$に対し

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h) - \sin x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{2\cos\left(x + \frac{h}{2}\right)\sin\frac{h}{2}}{h} = \lim_{h\to 0}\cos\left(x + \frac{h}{2}\right)\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} = \cos x.$$

★$\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t} = 1$の証明で用いた面積の大小関係は,図形の包含関係から明らかです.よく目にするのは“長さの大小関係から不等式を作ってはさみうちの原理に持ち込む”という方法ですが,一方の曲線が他方を含むなどといった「分かりやすい」関係がなければ,一般に長さの大小関係を判断することは難しいです.

また,§2.2 で学ぶように$\sin x$の漸近展開は$\sin x = x + O(x^3)$ですから,

$$\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{t+O(t^3)}{t}=1$$

とすればよいと思うかも知れませんが,$\sin x$の漸近展開の漸近展開を求めるためには$\sin x$の導関数,ひいてはこの極限が必要となるので論理の循環が生じ,マズイことになります.

(Ex2.1.3)

[証明] $a=1$のときは明らかであるから,$a\neq 1$の場合を示せばよい.$a^t=1+u$とおく.$t\neq 0$のとき$u\neq 0$に注意する.両辺の自然対数をとると

$$t\log a=\log(1+u)$$

であるから

$$\frac{t}{u}\log a=\frac{1}{u}\log(1+u)=\log(1+u)^{\frac{1}{u}}$$

$$\therefore \frac{u}{t}=\frac{\log a}{\log(1+u)^{\frac{1}{u}}}.$$

ここで$t\to 0$とすると,指数関数の連続性より$u=a^t-1\to 0$となり,さらに対数関数の連続性より$\log(1+u)^{\frac{1}{u}}\to\log e=1$となる.すなわち

$$\lim_{t\to 0}\frac{a^t-1}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{u}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{\log a}{\log(1+u)^{\frac{1}{u}}}=\log a.$$

よって示された.　(Q.E.D.)

従って,$f(x)=a^x$に対し

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{a^{x+h}-a^x}{h}=\lim_{h\to 0}a^x\frac{a^h-1}{h}=a^x\log a.$$

(Ex2.1.4)

(1) **[証明]** 右微分係数$f'_+(0)$と左微分係数$f'_-(0)$をそれぞれ計算すると

$$f'_+(0)=\lim_{h\to +0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to +0}\frac{h}{h}=1,$$

$$f'_-(0)=\lim_{h\to -0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to -0}\frac{-h}{h}=-1.$$

よって$f'_+(0)\neq f'_-(0)$だから,$x=0$で微分可能でない.　(Q.E.D.)

(2) **[証明]**

$$\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\frac{\sqrt[3]{h}}{h}=h^{-\frac{2}{3}}\to+\infty\ (h\to 0).$$

よって$x=0$で微分可能でない.　(Q.E.D.)

(Ex2.1.5)

[証明] nに関する数学的帰納法で示す.

(Ⅰ) $n=1$のとき

$$(\text{左辺})=(fg)'=f'g+fg'=(\text{右辺}).$$

よって与式は成り立つ.

(Ⅱ) $n=k\ (k\in\mathbb{N})$のとき与式の成立を仮定すると, $n=k+1$のとき

$$(\text{左辺})=(fg)^{(k+1)}=\left(f^{(k)}g+\binom{k}{1}f^{(k-1)}g'+\binom{k}{2}f^{(k-2)}g''+\cdots+fg^{(k)}\right)'.$$

$f^{(k-r+1)}g^{(r)}$の係数が$\binom{k+1}{r}$であることを示せばよい.この項は$f^{(k-r)}g^{(r)}$及び$f^{(k-r+1)}g^{(r-1)}$の項を微分したとき,またそのときだけ現れるから,その係数は

$$\binom{k}{r}+\binom{k}{r-1}=\frac{k!}{r!\,(k-r)!}+\frac{k!}{(r-1)!\,(k-r+1)!}=\frac{k!}{r!\,(k-r+1)!}\left((k-r+1)+r\right)$$
$$=\frac{(k+1)!}{r!\,(k-r+1)!}=\binom{k+1}{r}.$$

よって与式は成り立つ.

(Ⅰ),(Ⅱ)より,$^\forall n\in\mathbb{N}$で与式は成り立つ. (Q.E.D.)

★解答の中で

$$\binom{k}{r}+\binom{k}{r-1}=\binom{k+1}{r}$$

という等式を示しました.知っている人も多いと思いますが,これは次のような事実を考えれば明らかです.

$(k+1)$人の集団からr人の代表者を選ぶ.集団の構成員の一人をTとすると,選び方の総数は次の2つの場合の数の和である:

・Tを除いたk人の中からr人を選ぶ.

・Tをあらかじめ代表者として選出しておいて,他のk人の中から残りの$(r-1)$人を選ぶ.

従って,緑色の部分の計算は書かなくても大丈夫だと思います.たぶん.

(Ex2.1.6)

$y=f(x)=\log_a x$の逆関数は,指数関数$x=a^y$であるから

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=\frac{1}{a^y\log a}=\frac{1}{x\log a}.$$

★高校でも学んだと思いますが,

$$\frac{d\log_a|x|}{dx}=\frac{1}{x\log a}\ (x\neq 0)$$

が成り立つことに注意しましょう.

(Ex2.1.7)

(1) 両辺は共に正だから,自然対数をとると

$$\log f(x)=\log x^a=a\log x\ \ (\because\ x>0).$$

xで微分して

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{a}{x}$$

$$\therefore f'(x)=\frac{a}{x}f(x)=ax^{a-1}.$$

★対数の定義域は(実関数では)正の実数でしたから,対数をとる前に両辺が正だということを確認しておくのが正しいです.$\log f(x)$の微分については,合成関数の微分法を用います.
aは任意の実数ですから,これで分数,無理関数だけでなく「無理数乗」の関数も微分できるというわけです.

(2) 両辺は共に正だから,自然対数をとると

$$\log f(x)=\log x^{\sin x}=\sin x\log x\ \ (\because\ x>0).$$

xで微分して

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\cos x\log x+\frac{\sin x}{x}$$

$$\therefore f'(x)=\left(\cos x\log x+\frac{\sin x}{x}\right)f(x)=x^{\sin x}\left(\cos x\log x+\frac{\sin x}{x}\right).$$

(3) 両辺は共に正だから,自然対数をとると

$$\log f(x)=2\log|x|+7\log(x^2+1)+18\log|2x+1|-4\log|x^3+3x+3|.$$

xで微分して

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{2}{x}+7\cdot\frac{2x}{x^2+1}+18\cdot\frac{2}{2x+1}+4\cdot\frac{3x^2+3}{x^3+3x+3}$$

$$=\frac{102x^6+33x^5+332x^4+328x^3+237x^2+183x+21}{x(x^2+1)(2x+1)(x^3+3x+3)}$$

$$\therefore f'(x)=\frac{x(x^2+1)^6(2x+1)^{17}(102x^6+33x^5+332x^4+328x^3+237x^2+183x+21)}{(x^3+3x+3)^5}.$$

★$\log x^2 = 2\log|x|$などに注意しましょう.それと,解答では頑張って通分しましたが,このように答えがきれいにならない場合が多いので,しなくてもよいと思います.

(Ex2.2.1)

(1) **[証明]** ($\Longleftarrow$) 自明である.

($\Longrightarrow$) 平均値の定理(定理 2.2.3)より,任意の実数x, y $(x < y)$に対して

$$^\exists z \in (x, y)\ [f(y) - f(x) = f'(z)(y - x)]$$

$$\therefore f(y) - f(x) = 0\ (\because f'(z) = 0).$$

よってfは定数である. (Q.E.D.)

(2) **[証明]** 平均値の定理(定理 2.2.3)より,任意の$x, y \in [a, b]$ $(x < y)$に対して

$$^\exists z \in (x, y)\ [f(y) - f(x) = f'(z)(y - x)]$$

$$\therefore f(y) - f(x) \geq 0\ (\because f'(z) \geq 0\,, x < y).$$

よってfは$[a, b]$において単調増加である. (Q.E.D.)

★(2)の逆は成り立ちません.というのは,単調増加でも微分係数が存在しない場合があるからです.

(Ex2.2.2)

(1) **[証明]** $m \leq n$としても一般性を失わない.このとき

$$\limsup_{x\to 0}\left|\frac{g(x)+h(x)}{x^m}\right| \leq \limsup_{x\to 0}\left(\left|\frac{g(x)}{x^m}\right| + \left|\frac{h(x)}{x^n}\right|\cdot|x|^{n-m}\right) < +\infty.$$

よって$g(x) + h(x) = O\left(x^{\min\{m,n\}}\right)$. (Q.E.D.)

(2) [証明]

$$\limsup_{x\to 0}\left|\frac{g(x)h(x)}{x^{m+n}}\right| \leq \limsup_{x\to 0}\left(\left|\frac{g(x)}{x^m}\right|\left|\frac{h(x)}{x^n}\right|\right) < +\infty.$$

よって$g(x)h(x) = O(x^{m+n})$. (Q.E.D.)

(3) **[証明]** $g(x) = O(x^m)\,, h(x) = O(x^n)$より

$$^\exists\delta_1 > 0\,^\exists M_1 > 0\ [|x| < \delta_1 \implies |g(x)| \leq M_1|x|^m],$$

$$^\exists\delta_2 > 0\,^\exists M_2 > 0\ [|x| < \delta_2 \implies |h(x)| \leq M_2|x|^n].$$

$\delta > 0$を十分小さくとれば,$\delta < \delta_1$で同時に$|x| < \delta \implies |g(x)| \leq \delta_2$とできるから

$$|x| < \delta \implies \left|h\big(g(x)\big)\right| \leq M_2|g(x)|^n \leq M_2(M_1|x|^m)^n = {M_1}^n M_2|x|^{mn}.$$

よって$h\big(g(x)\big) = O(x^{mn})$. (Q.E.D.)

★(1)より,$g(x) = O(x^m)\,, h(x) = O(x^m)$のとき$g(x) - h(x) = O(x^m)$です. $g(x) - h(x) = 0$などとしないよう

にしましょう.

(Ex2.2.3)

[証明] 条件より,Taylor の定理を適用すると

$$f(a+h)=f(a)+f^{'}(a)h+\frac{f^{''}(a)}{2}h^2+O(h^3) \tag{A.1}$$

と書ける.同様に

$$f(a-h)=f(a)-f^{'}(a)h+\frac{f^{''}(a)}{2}h^2+O(h^3) \tag{A.1}$$

が成り立つ.従って

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)+f(a-h)-2f(a)}{h^2}=\lim_{h\to 0}\frac{f^{''}(a)h^2+O(h^3)}{h^2}=f^{''}(a).$$

よって示された. (Q.E.D.)

★この極限値を広義の 2 階微分係数といいます.これに関しては興味深い例があります.次の関数を考えましょう:

$$f(x)=\begin{cases}|x|\sin\dfrac{1}{x}\ (x\neq 0)\\[2ex] 0\ (x=0)\end{cases}$$

この関数は$x=0$において広義の 2 階微分係数 0 を持ちますが,1 階微分可能ではありません.つまり,1 階をとびこして 2 階に直接入るというわけです.

(Ex2.2.4)

(1) $f^{(n)}(x)=\frac{n!}{(1-x)^n}$だから,Taylor の定理より

$$f(x)=\sum_{n=0}^{6}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+O(x^7)=1+x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6+O(x^7)$$
$$\therefore f(x)\approx 1+x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6.$$

★$f^{(n)}(x)=\frac{n!}{(1-x)^n}$については,本来数学的帰納法で示した上で用いるべきですが,ここでは計算を重視するため省略させて頂きました.この結果は非常によく使われるので,覚えておきましょう.$|x|<1$のときに成り立つ無限等比級数の和

$$\sum_{n=0}^{\infty}x^n=\frac{1}{1-x}$$

を考えるとよいです.

(2) $y=x+x^2$とおくと

$$\frac{1}{1-y}=1+y+y^2+\cdots+y^5+O(y^6)=1+(x+x^2)+(x+x^2)^2+\cdots+(x+x^2)^5+O(x^6)$$

$$=1+(x+x^2)+(x^2+2x^3+x^4)+\left(x^3+3x^4+3x^5+O(x^6)\right)$$
$$+\left(x^4+4x^5+O(x^6)\right)+\left(x^5+O(x^6)\right)+O(x^6)$$
$$=1+x+2x^2+3x^3+5x^4+8x^5+O(x^6)$$

$$\therefore f(x)=\frac{x}{1-y}\approx x+x^2+2x^3+3x^4+5x^5+8x^6.$$

★(1)と同様にn階導関数を求めてももちろん答えは求まりますが,かなり骨が折れると思います.解答例のような方法を身につけましょう(以降さんざん練習します).
ちなみに,この関数の漸近展開において,n次の項の係数は Fibonacci 数列の第n項と一致します.

(3)

$$f(x)=\sin^2 x=\left(x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+O(x^7)\right)^2=x^2-\frac{x^4}{3}+\frac{2}{45}x^6+O(x^8)$$

$$\therefore f(x)\approx x^2-\frac{x^4}{3}+\frac{2}{45}x^6.$$

(4) $\frac{1}{\cos x}=\frac{1}{1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+O(x^8)}$であるから,$y=\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{24}+O(x^6)$とおくと

$$\frac{1}{\cos x}=\frac{1}{1-y}=1+y+y^2+O(y^3)=1+\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{24}+O(x^6)\right)+\left(\frac{x^4}{4}+O(x^6)\right)+O(x^6)$$

$$=1+\frac{x^2}{2}+\frac{5}{24}x^4+O(x^6).$$

よって

$$\tan x=\sin x\cdot\frac{1}{\cos x}=\left(x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+O(x^7)\right)\left(1+\frac{x^2}{2}+\frac{5}{24}x^4+O(x^6)\right)$$

$$=x+\frac{x^3}{3}+\frac{2}{15}x^5+O(x^7)$$

$$\therefore f(x)\approx x+\frac{x^3}{3}+\frac{2}{15}x^5.$$

(5) $\log(1+y)=y-\frac{y^2}{2}+\frac{y^3}{3}-\frac{y^4}{4}+\frac{y^5}{5}-\frac{y^6}{6}+O(y^7)$より,$g(x)=\log(1+x)$とおくと

$$f(x)=g(g(x))=\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^6}{6}+O(x^7)\right)$$

$$-\frac{1}{2}\left(x^2-x^3+\frac{11}{12}x^4-\frac{5}{6}x^5+\frac{137}{180}x^6+O(x^7)\right)$$

$$+\frac{1}{3}\left(x^3-\frac{3}{2}x^4+\frac{7}{4}x^5-\frac{15}{8}x^6+O(x^7)\right)-\frac{1}{4}\left(x^4-2x^5+\frac{17}{6}x^6+O(x^7)\right)$$

$$+\frac{1}{5}\left(x^5-\frac{5}{2}x^6+O(x^7)\right)-\frac{1}{6}\left(x^6+O(x^7)\right)+O(x^7)$$

$$=x-x^2+\frac{7}{6}x^3-\frac{35}{24}x^4+\frac{19}{10}x^5-\frac{917}{360}x^6+O(x^7)$$

$$\therefore f(x)\approx x-x^2+\frac{7}{6}x^3-\frac{35}{24}x^4+\frac{19}{10}x^5-\frac{917}{360}x^6.$$

(6) $e^x = 1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}+\frac{x^5}{120}+\frac{x^6}{720}+O(x^7)$より

$$f(x)=\frac{1}{2}\left(\left(1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}+\frac{x^5}{120}+\frac{x^6}{720}+O(x^7)\right)\right.$$

$$\left.-\left(1-x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}-\frac{x^5}{120}+\frac{x^6}{720}+O(x^7)\right)\right)= x+\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+O(x^7)$$

$$\therefore f(x)\approx x+\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}.$$

★この関数は双曲線正弦関数$\sinh x$です.

(7) $f(x)=\frac{2x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{60}+O(x^7)}{2+x^2+\frac{x^4}{12}+O(x^6)}=\frac{x+\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+O(x^7)}{1+\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+O(x^6)}$であるから,$y=-\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{24}+O(x^6)$とおくと

$$\frac{1}{1-y}=1+y+y^2+O(y^3)=1+\left(-\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{24}+O(x^6)\right)+\left(\frac{x^4}{4}+O(x^6)\right)+O(x^6)$$

$$=1-\frac{x^2}{2}+\frac{5}{24}x^4+O(x^6).$$

よって

$$f(x)=\left(x+\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+O(x^7)\right)\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{5}{24}x^4+O(x^6)\right)=x-\frac{x^3}{3}+\frac{2}{15}x^5+O(x^7)$$

$$\therefore f(x) \approx x - \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5.$$

★この関数は双曲線正接関数$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$です.

(8) $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + O(x^7)$, $e^y = 1 + y + \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{6} + \frac{y^4}{24} + \frac{y^5}{120} + \frac{y^6}{720} + O(y^7)$より

$$\begin{aligned} e^{\sin x} &= 1 + \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + O(x^7)\right) + \frac{1}{2}\left(x^2 - \frac{1}{3}x^4 + \frac{2}{45}x^6 + O(x^7)\right) + \frac{1}{6}\left(x^3 - \frac{x^5}{2} + O(x^7)\right) \\ &\quad + \frac{1}{24}\left(x^4 - \frac{2}{3}x^6 + O(x^8)\right) + \frac{1}{120}\left(x^5 + O(x^7)\right) + \frac{1}{720}\left(x^6 + O(x^8)\right) + O(x^7) \\ &= 1 + x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{15}x^5 - \frac{1}{240}x^6 + O(x^7). \end{aligned}$$

また$\frac{1}{2+\cos x} = \frac{1}{3 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} O(x^8)} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{72} - \frac{x^6}{2160} + O(x^8)}$であるから, $z = \frac{x^2}{6} - \frac{x^4}{72} + \frac{x^6}{2160} + O(x^8)$と

おくと

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-z} &= 1 + z + z^2 + z^3 + O(z^4) \\ &= 1 + \left(\frac{x^2}{6} - \frac{x^4}{72} + \frac{x^6}{2160} + O(x^8)\right) + \left(\frac{x^4}{36} - \frac{x^6}{216} + O(x^8)\right) + \left(\frac{x^6}{216} + O(x^8)\right) \\ &\quad + O(x^8) = 1 + \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{72} + \frac{x^6}{2160} + O(x^8). \end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{3}\left(1 + x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{15}x^5 - \frac{1}{240}x^6 + O(x^7)\right)\left(1 + \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{72} + \frac{x^6}{2160} + O(x^8)\right) \\ &= \frac{1}{3} + \frac{1}{3}x + \frac{2}{9}x^2 + \frac{1}{18}x^3 - \frac{1}{108}x^4 - \frac{19}{1080}x^5 - \frac{19}{3240}x^6 + O(x^7) \end{aligned}$$

$$\therefore f(x) \approx \frac{1}{3} + \frac{1}{3}x + \frac{2}{9}x^2 + \frac{1}{18}x^3 - \frac{1}{108}x^4 - \frac{19}{1080}x^5 - \frac{19}{3240}x^6.$$

(9) $g(x) = \log f(x) = \sin x \log \frac{e^x + e^{-x}}{2}$とおくと, $f(x) = e^{g(x)}$である.

$\log \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \log\left(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + O(x^6)\right)$であるから,$y = \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + O(x^6)$とおくと

$$\log(1+y)=y-\frac{y^2}{2}+O(y^3)=\left(\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+O(x^6)\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{x^4}{4}+O(x^6)\right)+O(x^6)$$
$$=\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{12}+O(x^6).$$

よって

$$g(x)=\left(x-\frac{x^3}{6}+O(x^7)\right)\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{12}+O(x^6)\right)=\frac{x^3}{2}-\frac{x^5}{4}+O(x^7).$$

従って, $e^z = 1+z+\frac{z^2}{2}+O(z^3)$より

$$f(x)=1+\left(\frac{x^3}{2}-\frac{x^5}{4}+O(x^7)\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{x^6}{4}+O(x^8)\right)+O(x^9)=1+\frac{x^3}{2}-\frac{x^5}{4}+\frac{x^6}{8}+O(x^7)$$
$$\therefore f(x)\approx 1+\frac{x^3}{2}-\frac{x^5}{4}+\frac{x^6}{8}.$$

★$f(x)^{g(x)}$の形の関数の漸近展開を求めたいときは,このように対数をとるとうまくいきます.
これくらい練習すれば試験に必要な漸近解析の技術はほぼ身に付くと思いますが,注意すべき点を一つ.漸近展開を求めるために,既知の展開式を別の式に代入するという操作をするわけですが,その際必要最低限の次数の展開式を用いるようにしましょう.一歩間違えると結構時間を無駄にします.

(Ex2.2.5)

(1) tが十分大きいとき,

$$e^t>2^t\geq 2^{\lfloor t\rfloor}=(1+1)^{\lfloor t\rfloor}=\sum_{k=0}^{\lfloor t\rfloor}\binom{\lfloor t\rfloor}{k}>\binom{\lfloor t\rfloor}{2}=\frac{\lfloor t\rfloor(\lfloor t\rfloor-1)}{2}>\frac{(t-1)(t-2)}{2}$$

より

$$0<\frac{t}{e^t}<\frac{2t}{(t-1)(t-2)}$$

が成り立つ($\lfloor\cdot\rfloor$は Gauss 記号).ここで

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{2t}{(t-1)(t-2)}=\lim_{t\to+\infty}\frac{2}{t-3+\frac{2}{t}}=0$$

であるから,はさみうちの原理(定理 1.2.3)より

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{t}{e^t}=0.$$

さて,$x=e^{-t}$とおくと $x\to+0$のとき$t\to+\infty$であるから

$$\lim_{x\to+0}x\log x=\lim_{t\to+\infty}\left(-\frac{t}{e^t}\right)=0$$

$$\therefore \lim_{x\to+0} x^x = \lim_{x\to+0} e^{x\log x} = e^0 = 1 \left(\because \text{指数関数の連続性}\right).$$

★L'Hospital の定理を使うと

$$\lim_{x\to+0} x\log x = \lim_{x\to+0}\frac{\log x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+0}\frac{(\log x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} = \lim_{x\to+0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to+0}(-x) = 0$$

ですが,講義では証明していないので使わない方がいいかも知れません.

ただし, § 2.3 の結果を用いて

$$e^t = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!} > 1 + t + \frac{t^2}{2}$$

から$\lim_{t\to+\infty}\frac{t}{e^t} = 0$を導くのは構わないでしょう.

(2)

$$(\text{与式}) = \lim_{x\to0}\frac{\left(1+(3x)+\frac{(3x)^2}{2}+O(x^3)\right)-\left(1+(2x)+\frac{(2x)^2}{2}+O(x^3)\right)-x}{1-\left(1-\frac{x^2}{2}+O(x^4)\right)}$$

$$= \lim_{x\to0}\frac{\frac{5}{2}x^2+O(x^3)}{\frac{x^2}{2}+O(x^4)} = \lim_{x\to0}\frac{\frac{5}{2}+\frac{O(x^3)}{x^2}}{\frac{1}{2}+\frac{O(x^4)}{x^2}} = 5.$$

(3) 指数関数の連続性を考え

$$(\text{与式}) = \lim_{x\to0} e^{\frac{1}{x^2}\log\frac{e^x+e^{-x}}{2}} = \lim_{x\to0} e^{\frac{1}{x^2}\left(\frac{x^2}{2}+O(x^4)\right)} = \lim_{x\to0} e^{\frac{1}{2}+\frac{O(x^4)}{x^2}} = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}.$$

★面倒だったので, $\log\frac{e^x+e^{-x}}{2}$の漸近展開は Ex2.2.4 (9)の結果を使いました.

(4) $x = \frac{1}{t}$とすると$t\to+\infty$のとき$t\to+0$であり, $f(t) = \left\{\log\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right\}^x = \left\{\log(1+t)^{\frac{1}{t}}\right\}^{\frac{1}{t}}$とおくと

$$\log f(t) = \frac{1}{t}\log\left(\frac{1}{t}\log(1+t)\right) = \frac{1}{t}\log\left(\frac{t-\frac{t^2}{2}+O(t^3)}{t}\right) = \frac{1}{t}\log\left(1-\frac{t}{2}+O(t^2)\right)$$

$$= \frac{\left(-\frac{t}{2}+O(t^2)\right)+O(t^2)}{t} = -\frac{1}{2}+O(t).$$

$$\therefore (\text{与式}) = \lim_{t\to+0} e^{\log f(t)} = \lim_{t\to+0} e^{-\frac{1}{2}+O(t)} = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}\ (\because \text{指数関数の連続性}).$$

(Ex2.3.1)

(1) $a_n = n+1\ (n=0,1,2\cdots)$に対し,$n \geq 2$のとき$|a_n|^{\frac{1}{n}} = (n+1)^{\frac{1}{n}} = 1+h_n$とおくと$h_n > 0$であり,2 項定理より

$$n+1 = (1+h_n)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} {h_n}^k > \frac{n(n-1)}{2} {h_n}^2$$

$$\therefore 0 < h_n < \sqrt{\frac{2(n+1)}{n(n-1)}}.$$

ここで

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{2(n+1)}{n(n-1)}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{2\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n-1}} = 0$$

であるから,はさみうちの原理(定理 1.2.3)より

$$\lim_{n\to\infty} h_n = 0$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} (1+h_n) = 1.$$

よって,与えられた冪級数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$に対して$\limsup_{n\to\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} = 1$だから,収束半径は 1.

★冪級数が収束するようなxの値の範囲を収束域とよびます.この問題の冪級数は収束半径が 1 なので区間$(-1,1)$において収束しますが,区間の端点で収束するかどうかは確認が必要です.この場合には$x=\pm 1$のとき収束しませんから,収束域は$(-1,1)$となるわけです.

(2) 数列$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$を次のように定める:

$$a_n = \begin{cases} 1\ (n=k^2,\ k \in \mathbb{Z}), \\ 0\ (\text{otherwise}). \end{cases}$$

このとき与えられた冪級数は$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$であるから,収束半径は

$$\left(\limsup_{n\to\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}}\right)^{-1} = \left(\lim_{k\to\infty} |a_{k^2}|^{\frac{1}{k^2}}\right)^{-1} = 1.$$

★項がとびとびの冪級数の例です.このような場合に limsup が関係します.

ちなみに,収束域は$(-1,1)$です.

(3) $a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{\log(n+1)}$ $(n=1,2\cdots)$に対し,$n \geq 2$のとき $|a_n|^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{(\log(n+1))^{\frac{1}{n}}}$であるが

$$1 < (\log(n+1))^{\frac{1}{n}} < (n+1)^{\frac{1}{n}}$$

が成り立ち,(1)の議論より

$$\lim_{n\to\infty}(n+1)^{\frac{1}{n}} = 1$$

であるから,はさみうちの原理(定理 1.2.3)より

$$\lim_{n\to\infty}(\log(n+1))^{\frac{1}{n}} = 1$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}|a_n|^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{(\log(n+1))^{\frac{1}{n}}} = 1.$$

よって,与えられた冪級数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$に対して$\limsup_{n\to\infty}|a_n|^{\frac{1}{n}} = 1$だから,収束半径は 1.

★収束域は$(-1,1]$です.

(Ex2.3.2)

[証明] $a_n = \frac{1}{n!}$ $(n=1,2\cdots)$とする.任意の$N \in \mathbb{N}$に対し, $n = N+k > 2N$のとき

$$|a_n|^{\frac{1}{n}} = \left(\frac{1}{n!}\right)^{\frac{1}{n}} < \left(\frac{1}{N!\,N^k}\right)^{\frac{1}{N+k}} = \left(\frac{1}{N!}\right)^{\frac{1}{N+k}}\frac{1}{N^{\frac{k}{N+k}}} < \frac{1}{N^{\frac{k}{N+k}}} < \frac{1}{N^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{N}}$$

であるから$\lim_{n\to\infty}|a_n|^{\frac{1}{n}} = 0$.従って与えられた冪級数$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$の収束半径は$+\infty$.
次に,Weierstrass の M テスト(定理 2.3.5)より

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!}x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} = f(x).$$

また

$$f(x)f(y) = \left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{y^n}{n!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{j+k=n}\frac{x^j y^k}{j!\,k!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\frac{x^j y^{n-j}}{n!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x+y)^n}{n!}$$

$$= f(x+y).$$

以上より,題意は示された.　　(Q.E.D.)

★これによって$e^x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$となるわけです.

あとがき

(Ex2.3.3)

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{16^n}\left(\frac{4x^{8n+1}}{8n+1}-\frac{2x^{8n+4}}{8n+4}-\frac{x^{8n+5}}{8n+5}-\frac{x^{8n+6}}{8n+6}\right)$$

とおくと

$$f'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{16^n}(4x^{8n+1}-2x^{8n+4}-x^{8n+5}-x^{8n+6})=(4-2x^3-x^4-x^5)\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x^8}{16}\right)^n$$

$$=\frac{16(4-2x^3-x^4-x^5)}{16-x^8}=\frac{16(x-1)(x^2+2)(x^2+2x+2)}{(x^2+2)(x^2-2)(x^2+2x+2)(x^2-2x+2)}$$

$$=\frac{16(x-1)}{(x^2-2)(x^2-2x+2)}=\frac{4x}{x^2-2}-\frac{4(x-1)}{x^2-2x+2}$$

$$=\frac{2(x^2-2)'}{x^2-2}-\frac{2(x^2-2x+2)'}{x^2-2x+2}+\frac{4}{(x-1)^2+1}$$

よって,求める級数の和は

$$f(1)=\int_0^1 f'(x)dx=[2\log|x^2-2|-2\log|x^2-2x+2|+4\tan^{-1}(x-1)]_0^1$$

$$=2\log\frac{1}{2}-2\log\frac{1}{2}+4\cdot\frac{\pi}{4}=\pi.$$

★この級数は,うまくプログラムを作ると円周率の 16 進数表示が 1 桁ずつ計算できるので,近年円周率の数値計算に利用されています.なお,2010 年 1 月 16 日現在の円周率計算の記録は,フランスの Fabrice Bellard による 2 兆 6999 億 9999 万桁です.ちなみに,小数第 1 兆位は 2 らしい.

～あとがき～

定理の証明省いたのに前回より多くなっちゃいました.漸近展開の問題多すぎたかな….自分自身解答を作ってて気が滅入ってきたくらいです.そんな気分だったのでどこかしら間違ってると思います.ごめんなさい.

夏休み中に講義ノート(No.3)を公開します.それで試験範囲は全部です.

論理的飛躍・不整合や厳密性に欠ける記述を見かけたら,髙橋までお知らせいただけると嬉しいです.その他質問などもできる範囲で答えます.

最後に,ここまでお読みいただきありがとうございました.よい夏休みを!

2009 年 7 月 31 日　　髙橋　一史

更新履歴

この講義ノートの更新履歴です.主に間違いの訂正をしてゆきます.
訂正箇所は,本文では青く染めてあります.

2009.7.31	本講義ノート公開!
2009.8.18	$p.27$ 円周率の計算記録を更新
2009.1.16	$p.27$ 円周率の計算記録を更新