記号論理学Ｉ２００４年度過去問解答例・解説

注意：ここに書いてある解答はすべて水野優が作成したものであり、絶対の答えではありません。
　　　「アレ？　これおかしいんじゃない？」と思った場合は遠慮せずに早めにご連絡ください。

※略記記号の説明（授業中に使われた記号で表記しています）

－Ｉ	⇔	－導入則
－Ｅ	⇔	－除去則
¬¬－Ｅ	⇔	ＤＮ規則
Ａｓｓ	⇔	前提
Ｈ	⇔	仮定
⇒	⇔	→
（∀ｘ）	⇔	∀ｘ
（∃ｘ）	⇔	∃ｘ
Ｆｘ	⇔	Ｆ(ｘ)

問題訂正　２　証明１６行目の依存条件　誤　2,5　→　正　2,4
　　　　　３　論証５行目　誤…v_A(Rde)＝Tかつ…→　正…v_A(Pd∧Rde)＝Tかつ…
　　　　　４　証明１５行目の依存条件　誤　６　→　正　（なし）
　　　　　　　証明１６行目の式　誤　[1]　正　[5]

１

(a)　○　(b)　×　(c)　×　(d)　×　(e)　○

解説：トートロジーを判別する問題。トートロジーでないなら反例を見つけ、トートロジーであるならそれを偽にする割り当てが存在しないことを示せばいい。どちらにせよ、思いつかなければ真理表を書けばよい。

(a)　○

解説：この程度なら真理表を書くのが早いだろう。問題の式で全てがTになるので、トートロジー。

A	B	A→B	B→A	(A→B)∨(B→A)
T	T	T	T	T
T	F	F	T	T
F	T	T	F	T
F	F	T	T	T

(b)　×

解説：A,B,Cが全てTのとき全体はFとなる。よってトートロジーではない。
　参考までに真理表を示しておく。

A	B	C	B→C	A∨(B→C)	(A∨(B→C))⇔B	¬((A∨(B→C))⇔B)
T	T	T	T	T	T	F
T	T	F	F	T	T	F
T	F	T	T	T	F	T
T	F	F	T	T	F	T
F	T	T	T	T	T	F
F	T	F	F	F	F	T
F	F	T	T	T	F	T
F	F	F	T	T	T	F

(c)　×

解説：反例はBのみTでA, CがTのときだが、これは思いつかないだろう。
真理表だと時間がかかるうえに反例を見つけにくい。付値関数や構成樹を使うのが楽。ここでは付値関数を使って解説する。
　全体が偽だとする。
　　(A → C)→(¬(B→C)→((A∨B)→C))＝F
iff　A → C＝T and　¬(B→C)→((A∨B)→C)＝F
iff　A → C＝T and　¬(B→C)＝T　and　(A∨B)→C＝F
iff　A → C＝T and　B→C＝F　and　A∨B＝T　and　C＝F
iff　A → C＝T and　B＝T　and　C＝F　and　A∨B＝T　and　C＝F
(iffは必要十分条件を示す。)
2項目、3項目を1項目、4項目に代入すると
A＝F　B＝T　C＝Fのとき上の式は満たされることがわかる。

よって、全体が偽になる組み合わせが存在するので、トートロジーではない。

(d) ×
解説：反例は{A, B, C}＝{T, F, T}、{F, T, T}（解く時は一つ見つければいい）
前問と同様付値関数で考えてみる。

　((A∨B)→C)⇔((A→C)∧(B→C))＝F
iff ((A∨B)→C)→((A→C)∧(B→C))＝F or ((A→C)∧(B→C))→((A∨B)→C)＝F

後ろの項についてだけ考えた場合、
　((A→C)∧(B→C))→((A∨B)→C)＝F
iff (A∨B)→C＝F and (A→C)∧(B→C)＝T
これを満たす組み合わせはない。

前の項についてだけ考えると
　((A∨B)→C)→((A→C)∧(B→C))＝F
iff (A∨B)→C＝T and (A→C)∧(B→C)＝F
このあたりで「A＝T,B＝F,C＝Tのときこれを満たす」ことに気づけばそれで終わる。

(e) ○
解説：真理表が楽。

A	B	A∨B	¬A	¬A→B	(A∨B)⇔(¬A→B)
T	T	T	F	T	T
T	F	T	F	T	T
F	T	T	T	T	T
F	F	F	T	F	T

付値関数で考える場合、偽となる場合を仮定して、

　(A∨B)⇔(¬A→B)＝F
iff (A∨B)→(¬A→B)＝F or (¬A→B)→(A∨B)＝F
iff (A∨B＝T and ¬A→B＝F) or (A∨B＝F and ¬A→B＝T)
iff (A∨B＝T and ¬A＝T and B＝F) or (A＝F and B＝F and ¬A→B＝T)
iff (A∨B＝T and A＝F and B＝F) or (A＝F and B＝F and ¬A→B＝T)
iff ((A＝T or B＝T) and A＝F and B＝F) or (A＝F and B＝F and (A＝T or B＝T))
前半も後半も矛盾。よってトートロジー。

2
(1) 5 (2) H (3) 6 (4) H (5) 2,5 (6) Fz ∧ Lyaz (7) 14.∃-I
(8) ∃y∃z(Fz ∧ Lyaz) (9) 3,4-16.∃-E (10) ∀z(Fz→∀yLyaz)→∃y∃z(Fz ∧ Lyaz)

解説：証明の問題。問題にミスがあります（このプリント1ページ目参照）。
(1)(2)4行目と5行目を比べると∃が外れているが、∃-E使い方を考えれば、ここは仮定だとわかる。仮定なので依存はその行のみ。
(3)(4)ここまでの何かを操作してこの行を導くことはできない。11行目で¬-Iの対象になっていることからもここは仮定である。

(1)(2)(3)(4)の別解　依存条件をずーっと見ていくと、5も6もでてくる。よってこれらは前提か仮定。前提ではないので仮定。

(5)¬-Iの基本的なパターン。6-10.の6の仮定は条件から外れることに注意。
(6)∧-Iと書かれているのでその二つの行の式を∧で結ぶだけ。この後のつながりを考えて左右を間違えないように。
(7)一行前と比べて∃yが増えている。ここは∃-I。依存条件から見ても問題ない。
(8)問題訂正箇所（このプリント1ページ目参照）。∃y∃z(Fz ∧ Lyaz)の形は得たので、証明は依存条件を整える段階にはいっている。ここでは5行目の仮定をはずす。(1)(2)でも言ったとおり、この仮定は∃-Eのためのもの。当然ここでは∃-Eを使う。

(9)ここでは4行目の仮定をはずす。∃-Eなので式自体に変化はない。
(10)考えるまでもなく、結論の式を書けばいい。

3
(A)背理法(?) (B)∀x∀y((Px∧Rxy)→(Qx∧Rxy)) (C)e (D)→ (E) v_A(Pd)＝T

解説:付値関数による証明の問題。問題にミスがあります(このプリント1ページ目参照)。

(A)ここしか問題文で言うところの“語”を入れる場所がないので多分これであってます。付値関数で意味論的に示す場合、背理法を使うのが一般的です。
(B)背理法ではまず全体を偽とします。
(C)直前のxをdに入れ替えたのを参考に、後の文中の式からここがeだというのはわかるでしょう。
(D)問題文を訂正してないとちょっと迷います。→がメインの結合子のとき、全体がFになるのは前件＝Tかつ後件＝Fのときです。
(E)問題文を訂正してないとちょっと迷います。∧がメインの結合子のとき、全体がTになるのは前件＝Tかつ後件＝Tのときです。

4
(1)S(x)＝S(x) (2)＝-E (3)6 (4)6-14.→-I (5)∀y(S(x)＋y＝S(x+y))

解説:よくわからん体系による証明。問題にミスがあります(このプリント1ページ目参照)。…配布プリントといいテストといい教科書といいミスが多すぎると思うのですが。
とりあえずペアノ算術なんて知らなくていいです。というか私は知りません。

(1)＝-Iなので、式の形は □＝□ です。この後この行が使われているのは4行目S(x+0)＝S(x)で、2,3.=-Eとあるので、2行目のx＝x+0をここでは使っています。=-Eの使い方は、
s＝t, Fs├Ft なので、ここではx＝x+0がs＝t、S(x+0)＝S(x)が Ftに相当するはずです。となれば、S(x+0)＝S(x)の x+0 はx＝x+0 によって得られたものなので、もとのFsはS(x)＝S(x)となります(ここでのFxの変項xは左辺の()内)。これは確かに＝-Iで得られます。

(2)8行目の式の右辺の()の中が6行目の＝の他辺の式に置き換わっています。これは＝-Eです。
参考までにs＝t, Fs├Ftにおいて、ここではsはS(x)+y, tはS(x+y) FxはS(S(x)+S(y))＝S(x)です。

(3)＝-Eでは依存条件は減りません。7行目と9行目の依存条件を見て、ここは 6 となります。

(4)問題文を訂正してないとちょっと迷います。→の前件は6行目、後件は14行目に等しいので→-Iです

(5)問題文を訂正してないと答えなくてすみますw。Indってなんだ？って感じですが、17行目から逆算して答えの式を得ればいいだけのことです。

4
(a)

1	(1)	A → B	H
2	(2)	¬¬A	H
3	(3)	¬B	H
2	(4)	A	2.¬¬-E
1,2	(5)	B	1,4.→-E
1,2,3	(6)	⊥	3,5.¬-E
1,2	(7)	¬¬B	3-6.¬-I
1	(8)	¬¬A → ¬¬B	2-7.→-I
	(9)	(A → B)→(¬¬A → ¬¬B)	1-8.→-I

(b)

1	(1)	$\neg\neg A \to \neg\neg B$	H
2	(2)	$\neg(A \to B)$	H
3	(3)	A	H
4	(4)	$\neg A$	H
3,4	(5)	$\perp$	3,4.¬-E
3	(6)	$\neg\neg A$	4-5.¬-I
1,3	(7)	$\neg\neg B$	1,6.→-E
1,3	(8)	B	7.¬¬-E
1	(9)	$A \to B$	3-8.→-I
1,2	(10)	$\perp$	2,9.¬-E
1	(11)	$\neg\neg(A \to B)$	2-10.¬-I
	(12)	$(\neg\neg A \to \neg\neg B) \to \neg\neg(A \to B)$	1-11.→-I

※問題文のヒントに惑わされなければ解けますw。ヒントあれであってるのかなぁ…どうもミスのような気がしてしょうがないんだが…。

(c)

1	(1)	$\neg\exists x Fx$	H
2	(2)	$\neg\forall x\neg Fx$	H
3	(3)	$\neg Fa$	H
3	(4)	$\forall x\neg Fx$	3.∀-I
2,3	(5)	$\perp$	2,4.¬-E
2	(6)	$\neg\neg Fa$	3-5.¬-I
2	(7)	Fa	6.¬¬-E
2	(8)	$\exists x Fx$	7.∃-I
1,2	(9)	$\perp$	1,8.¬-E
1	(10)	$\neg\neg\forall x\neg Fx$	2-9.¬-I
1	(11)	$\forall x\neg Fx$	10.¬¬-E
	(12)	$\neg\exists x Fx \to \forall x\neg Fx$	1-11.→-I

(d)

証明不能　反例は

$D=\{\alpha_1, \alpha_2\}$、

	F
α_1	1
α_2	1

つまり、全部の定項に対して、Fxが真の時、$\exists x(\neg Fx \to \exists y\neg Fy)$はxにどの定項を入れても$\neg Fx$は偽になり、$\neg Fx \to \exists y\neg Fy$は真になる。つまり前提は満たす。しかし$\forall zFz$は真になる。よって証明不能。

…何か私は間違ってるでしょうか？　先生が間違っているのでしょうか？　誰か証明できたら教えてください。

すごく後味の悪い終わり方ですが、これでおしまいです。