記号論理学Ｉレジュメの訂正および補足

※略記記号の説明（授業中に使われた記号で表記しています）

－Ｉ	⇔	－導入則
－Ｅ	⇔	－除去則
￢￢－Ｅ	⇔	ＤＮ規則
Ａｓｓ	⇔	前提
Ｈ	⇔	仮定
⇒	⇔	→
（∀ｘ）	⇔	∀ｘ
（∃ｘ）	⇔	∃ｘ
Ｆｘ	⇔	Ｆ(ｘ)

訂正
※前半P2　問題１
　誤（￢Ｐ　→　　正（（￢Ｐ　→　（“（”を追加）

※前半P5　定義６（重要な訂正）
　誤　υ(φ ∨ ψ)＝Ｔ　iff　υ(φ)＝Ｔ　or　υ(ψ)＝Ｆ
　正　υ(φ ∨ ψ)＝Ｔ　iff　υ(φ)＝Ｔ　or　υ(ψ)＝Ｔ　（ＦをＴに）

※前半P18　例題８
　誤（9）￢（Ｐ　∨　￢Ｐ）　8.DN-Ｅ
　正（9）　Ｐ　∨　￢Ｐ　8.DN-Ｅ　（￢が余分）

※後半P5　定義２
　誤　￢varphi　　正　￢φ

補足
※前半P1　「連言」だとかそういう小難しい単語は覚えなくていい。

※前半P5　定義６
υ(φ → ψ)＝Ｆ　iff　υ(φ)＝Ｔ　and　υ(ψ)＝Ｆ
のかわりに、
υ(φ → ψ)＝Ｔ　iff　υ(φ)＝Ｆ　or　υ(ψ)＝Ｔ
としてもよい。

※後半P10　定義３
ＶＡ(φ → ψ) ＝１ iff ＶＡ(φ) ＝０ or ＶＡ(ψ) ＝１
のかわりに、
ＶＡ(φ → ψ) ＝０ iff ＶＡ(φ) ＝１ and ＶＡ(ψ) ＝０
としてもよい。

※後半P13　定義６
→については上の付値関数と同様の置き換えが可能

＝の-Iと-Eについての補足
資料には無いですが、過去問に出題されているので解説します。
＝はその左側の項と右側の項が同じものであることを示す、やや特殊な記号です。ここで注意して欲しいのは、＝では「何かの性質」と「それを満たすもの」を結ぶことはしないことです。＝が使えるのは例えば、「ペンペン草はナズナである」といったときで
s＝t　（sはをペンペン草あらわす）（tはナズナをあらわす）
といった感じです。

＝-I
任意の固体定項tについて、前提なしに
t＝t
を導入できます。

＝-E
s＝t, Fs
が成り立つとき、
Ft
が成り立ちます。

特に、Fsにあたる部分がr＝sなどとなっている場合は要注意です。このときのFtはr＝tであり、t＝rではありません。

日本語のLへの翻訳についての補足
さて、「理一19組のシケ長」などといった表現はある個体を指しているので、個体定項で表すことはできます。しかし、それでは
「理一19組のシケ長は高橋君である。よって高橋君は理一19組のシケ長をつとめている」
という明らかに正しい文ですら
s＝t ├ Ft
としか表現できず、推論が正しいかどうか導けません。そこで、「 理一19組のシケ長は高橋君である。」という表現は「理一19組のシケ長をつとめるただ一人の人物が存在し、その人物は高橋君である。」という表現に置き換え、

(∃x)(Fx ∧ (∀y)(Fy ⇒ x = y) ∧ x = t)

と書きます。((∀y)(Fy ⇒ x = y)は「ただ一人の」をあらわすためのもの。)先ほどの推論は

(∃x)(Fx ∧ (∀y)(Fy ⇒ x = y) ∧ x = t) ├ Ft

となり、これは証明できます。

「ちょうど1つのものが〜である。」を訳すには、「少なくとも1つの〜であるものが存在し」、「〜であるものは最大でも１つしかない」と考える。つまりは以下のようになる。(これは覚えておいた方がいいかもしれません。)

(∃x)(Fx ∧ (∀y)(Fy ⇒ x = y))

(直訳すると、「xは〜であり、〜を満たす全てのものはxと同一であるxが存在する」)

「ちょうど2つのものが〜である。」を訳すには、「少なくとも2つの〜であるものが存在し」、「〜であるものは最大でも2つしかない」と考える。つまりは以下のようになる。

(∃x)(Fx ∧ (∃y)(Fy ∧ x ≠ y ∧ (∀z)(Fz ⇒ (x =z ∨ y = z))))

(直訳すると、「xは〜であり、xと同一ではなく〜であるyについて、『〜を満たす全てのものはxかyと同一である』となるy, xが存在する」)

同様に、「ちょうど3つのものが〜である。」は
(∃x)(Fx ∧ (∃y)(Fy ∧ x ≠ y ∧(∃z)(Fz ∧ x ≠ z ∧ y ≠ z ∧(∀w)(Fw ⇒ ((x =w ∨ y = w)∨ z = w)))))

「ちょうど4つのものが〜である。」は(さすがに必要ないと思うが)
(∃x)(Fx ∧ (∃y)(Fy ∧ x ≠ y ∧(∃z)(Fz ∧ x ≠ z ∧ y ≠ z ∧(∃w)(Fw ∧ x ≠ w ∧ y ≠ w ∧ z ≠ w ∧(∀v)(Fv ⇒ ((x =v ∨ y = v)∨ (z = v ∨ w = v)))))))
となる。

証明のストラテジー完全版（教科書・講義より詳しく・実用的になっております）
導く結論の形から、大体の方針は決めることができます。
① まず、前提・結論の中で、メインとなっている論理結合子または量化子をそれぞれ見つける。
例：$(\forall x)(\exists y)((Fx \Rightarrow Gy) \wedge (Gx \vee Fy))$なら$(\forall x)$、$P \Rightarrow ((Q \wedge R) \vee (\neg Q \wedge \neg R)$なら$\Rightarrow$、$(\forall x)(Fx \wedge Gx) \vee Gt$なら$\vee$が、それぞれのメインです。

② 前提のメインの論理結合子・量化子が∃であるときは、まずそれをはずした式を仮定する。

③ 結論のメインの論理結合子・量化子について、それぞれ以下の方針を考えます。
Ⅰ. ¬の場合、¬を取り外した状態を仮定し、⊥を導く。最後に¬-Iを適用する。
Ⅱ. ∧の場合、∧の前件、後件をそれぞれ導き、最後に∧-Iを適用する。
Ⅲ. ⇒の場合、前件を仮定し、後件を導く。最後に⇒-Iを適用する。
Ⅳ. ∃xの場合、xを全て個体定項に交換した式を導き、∃-Iを適用する。
Ⅴ. ∀xの場合、xを全て個体定項に交換した式を導き、∀-Iを適用する。制約には注意する。
Ⅵ. ∨の場合、前提にも∨が含まれていれば前件か後件の一方を導き、最後に∨-Iを適用する。含まれていない場合、結論に¬をつけた式を仮定し、⊥を導く。¬-Iと¬¬-Eを適用する。
Ⅶ. 結論が変項を含まない述語記号だけの場合、それ自体を導くか、¬をつけて⊥を導く。

※理屈からいえば、∨の方針は単に「前件か後件のどちらかを導く」となるはずだが、それで解ける問題はほとんどない。なぜなら、最後に∨を導入するということは、せっかく導いた結論の内容を薄めてしまうことであり、論理的にはほとんど意味を待たないからである。（もちろん例外はある。たとえば$A \wedge B \vdash A \vee B$といった問題は「前件か後件のどちらかを導く」で解く）

※Ⅰ～Ⅴまではほぼ絶対的な方針だが、Ⅵ、Ⅶについては例外もある。ただし、Ⅵの例外となるような問題は問題自体の数学における集合としての意味を考えれば明らかにわかる上、たいてい易しい。Ⅶの例外となるものについては、教科書第5章問題2を覚えておけば問題ない。

④ 上の方針を適用したとき、まず導かないといけないもの、たとえばⅢなら後件の部分について、メインとなる論理結合子または量化子を見つける。（Ⅵで¬をつけた場合については多少特殊な方針のセオリーで解く形の問題が多い。それについては下の④'で説明する）

⑤ そのメインの論理結合子・量化子について③と同様に考える。以下、③④を繰り返す。

④' Ⅵ の場合、以下の形をした問題が少なくない。（プリント問題１(2)(4)、教科書第6章演習問題3,4）思いつきにくいので、やり方を覚えてしまってもいいかも。
$(\neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi) \vdash \varphi \vee \psi)$

(k)	$\neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi)$	Ass
(l)	$\neg(\varphi \vee \psi)$	H
(m)	φ	H
(n)	$\varphi \vee \psi$	m.∨-I
(o)	$\perp$	l,m.¬-E
(p)	$\neg\varphi$	m-o.¬-I
m～pと同様にして、		
(s)	$\neg\psi$	¬-I
(t)	$\neg\varphi \wedge \neg\psi$	p,s.∧-I
(u)	$\perp$	k,t.¬-E
(v)	$\neg\neg(\varphi \vee \psi)$	l-u.¬-I
(w)	$\varphi \vee \psi$	v.¬¬-E

※以上で対応できないもの
教科書第5章問題2
これはやり方を覚えるか、捨ててください。