

# 記号論理学 I 配布プリント問題解答例

注意：ここに書いてある解答はすべて水野優が作成したものであり、絶対の答えではありません。  
ミスには細心の注意を払い、見直しもしているつもりですが「アレ？ これおかしいんじゃない？」と思った場合は遠慮せずに早めにご連絡ください。  
各問題の後の☆マークは作成者から見た難易度です（1個から5個まで）。

※略記記号の説明（授業中に使われた記号で表記しています）

- I	⇔	- 導入則
- E	⇔	- 除去則
$\neg\neg$ - E	⇔	DN規則
A s s	⇔	前提
H	⇔	仮定
$\Rightarrow$	⇔	$\rightarrow$
$(\forall x)$	⇔	$\forall x$
$(\exists x)$	⇔	$\exists x$
F x	⇔	F(x)

なお配布プリントでは、 $\rightarrow$ を $\Rightarrow$ の代わりにつかっており、 $\Rightarrow$ の記号が何を意味しているのか今ひとつ曖昧である。とりあえずは $\phi, \psi, \dots \Rightarrow \xi$ と表記は、 $(\phi \wedge \psi \wedge \dots) \rightarrow \xi$ と同じ意味だとして解釈するのが妥当なのだろうが、都合上 $\rightarrow$ として扱う。また、 $\rightarrow$ の前後件の $()$ が省略されている。

問題の訂正 問題1 (26) 最初のAの前に $\neg$ をつけてください。

## 問題1

(1)  $A \vee B \rightarrow \neg(\neg A \wedge \neg B)$  (☆☆☆)

1	(1)	$A \vee B$	H
2	(2)	$\neg A \wedge \neg B$	H
3	(3)	A	H
2	(4)	$\neg A$	2. $\wedge$ -E
2,3	(5)	$\perp$	3,4. $\neg$ -E
6	(6)	B	H
2	(7)	$\neg B$	2. $\wedge$ -E
2,6	(8)	$\perp$	6,7. $\neg$ -E.
1,2	(9)	$\perp$	2,3-5,6-8. $\vee$ -E
1	(10)	$\neg(\neg A \wedge \neg B)$	2-9. $\neg$ -I
	(11)	$A \vee B \rightarrow \neg(\neg A \wedge \neg B)$	1-10. $\rightarrow$ -I

(2)  $\neg(\neg A \wedge \neg B) \rightarrow A \vee B$  (☆☆☆☆)

1	(1)	$\neg(\neg A \wedge \neg B)$	H
2	(2)	$\neg(A \vee B)$	H
3	(3)	A	H
3	(4)	$A \vee B$	3. $\vee$ -I
2,3	(5)	$\perp$	2,4. $\neg$ -E
2	(6)	$\neg A$	3-5. $\neg$ -I
7	(7)	B	H
7	(8)	$A \vee B$	7. $\vee$ -I
2,7	(9)	$\perp$	2,8. $\neg$ -E
2	(10)	$\neg B$	7-9. $\neg$ -I
2	(11)	$\neg A \wedge \neg B$	6,10. $\wedge$ -I
1,2	(12)	$\perp$	1,11. $\neg$ -E
1	(13)	$\neg\neg(A \vee B)$	2-12. $\neg$ -I
1	(14)	$A \vee B$	13. $\neg\neg$ -E
	(15)	$\neg(\neg A \wedge \neg B) \rightarrow A \vee B$	1-14. $\rightarrow$ -I

別解

1	(1)	$\neg(\neg A \wedge \neg B)$	H
2	(2)	$\neg A$	H
3	(3)	$\neg B$	H
2,3	(4)	$\neg A \wedge \neg B$	2,3. $\wedge$ -I
1,2,3	(5)	$\perp$	1,4. $\neg$ -E
1,2	(6)	$\neg\neg B$	3-5. $\neg$ -I
1,2	(7)	B	6. $\neg\neg$ -E
1,2	(8)	$A \vee B$	7. $\vee$ -I
1	(9)	$\neg A \rightarrow A \vee B$	2-8. $\rightarrow$ -I
10	(10)	$\neg(A \vee B)$	H
11	(11)	A	H
11	(12)	$A \vee B$	11. $\vee$ -I
10,11	(13)	$\perp$	10,12. $\neg$ -E
10	(14)	$\neg A$	11-13. $\neg$ -I
1,10	(15)	$A \vee B$	9,14. $\rightarrow$ -E
1,10	(16)	$\perp$	10,15. $\neg$ -E
1	(17)	$\neg\neg(A \vee B)$	10-16. $\neg$ -I
1	(18)	$A \vee B$	17. $\neg\neg$ -E
	(19)	$\neg(\neg A \wedge \neg B) \rightarrow A \vee B$	1-18. $\rightarrow$ -I

(3)  $(A \rightarrow B) \rightarrow \neg A \vee B$  (☆☆☆☆)

1	(1)	$A \rightarrow B$	H
2	(2)	$\neg(\neg A \vee B)$	H
3	(3)	A	H
4	(4)	$\neg B$	H
1,3	(5)	B	1,3. $\rightarrow$ -E
1,3,4	(6)	$\perp$	4,5. $\neg$ -E
1,3	(7)	$\neg\neg B$	4-6. $\neg$ -I
1,3	(8)	B	7. $\neg\neg$ -E
1,3	(9)	$\neg A \vee B$	8. $\vee$ -I
1,2,3	(10)	$\perp$	2,9. $\neg$ -E
1,2	(11)	$\neg A$	3-10. $\neg$ -I
1,2	(12)	$\neg A \vee B$	11. $\vee$ -I
1,2	(13)	$\perp$	2,12. $\neg$ -E
1	(14)	$\neg\neg(\neg A \vee B)$	2-13. $\neg$ -I
1	(15)	$\neg A \vee B$	14. $\neg\neg$ -E
	(16)	$(A \rightarrow B) \rightarrow \neg A \vee B$	1-15. $\rightarrow$ -I

(4)	$\neg(A \wedge B) \rightarrow \neg A \vee \neg B$	(☆☆☆)	
1	(1)	$\neg(A \wedge B)$	H
2	(2)	$\neg(\neg A \vee \neg B)$	H
3	(3)	$\neg A$	H
3	(4)	$\neg A \vee \neg B$	3. $\vee$ -I
2,3	(5)	$\perp$	2,4. $\neg$ -E
2	(6)	$\neg\neg A$	3-5. $\neg$ -I
2	(7)	A	6. $\neg\neg$ -E
8	(8)	$\neg B$	H
8	(9)	$\neg A \vee \neg B$	8. $\vee$ -I
2,8	(10)	$\perp$	2,9. $\neg$ -E
2	(11)	$\neg\neg B$	8-10. $\neg$ -I
2	(12)	B	11. $\neg\neg$ -E
2	(13)	$A \wedge B$	7,12. $\wedge$ -I
1,2	(14)	$\perp$	1,13. $\neg$ -E
1	(15)	$\neg\neg(\neg A \vee \neg B)$	2-14. $\neg$ -I
1	(16)	$\neg A \vee \neg B$	15. $\neg\neg$ -E
	(17)	$\neg(A \wedge B) \rightarrow \neg A \vee \neg B$	1-16. $\rightarrow$ -I

別解

1	(1)	$\neg(A \wedge B)$	H
2	(2)	A	H
3	(3)	B	H
2,3	(4)	$A \wedge B$	2,3. $\wedge$ -I
1,2,3	(5)	$\perp$	1,4. $\neg$ -E
1,2	(6)	$\neg B$	3-5. $\neg$ -E
1,2	(7)	$\neg A \vee \neg B$	6. $\vee$ -I
1	(8)	$A \rightarrow \neg A \vee \neg B$	2-7. $\rightarrow$ -E
9	(9)	$\neg(\neg A \vee \neg B)$	H
10	(10)	$\neg A$	H
10	(11)	$\neg A \vee \neg B$	10. $\vee$ -I
9,10	(12)	$\perp$	9,11. $\neg$ -E
9	(13)	$\neg\neg A$	10-12. $\neg$ -I
9	(14)	A	13. $\neg\neg$ -E
1,9	(15)	$\neg A \vee \neg B$	8,14. $\rightarrow$ -E
1,9	(16)	$\perp$	9,15. $\neg$ -E
1	(17)	$\neg\neg(\neg A \vee \neg B)$	9-16. $\neg$ -I
1	(18)	$\neg A \vee \neg B$	17. $\neg\neg$ -E
	(19)	$\neg(A \wedge B) \rightarrow \neg A \vee \neg B$	1-18. $\rightarrow$ -I

(5)	$(\neg A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow A)$	(☆☆)	
1	(1)	$\neg A \rightarrow B$	H
2	(2)	$\neg B$	H
3	(3)	$\neg A$	H
1,3	(4)	$B$	1,3. $\rightarrow$ -E
1,2,3	(5)	$\perp$	2,4. $\neg$ -E
1,2	(6)	$\neg\neg A$	3-5. $\neg$ -I
1,2	(7)	$A$	6. $\neg\neg$ -E
1	(8)	$\neg B \rightarrow A$	2-7. $\rightarrow$ -I
	(9)	$(\neg A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow A)$	1-8. $\rightarrow$ -I

(6)	$(\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow (B \rightarrow A)$	(☆☆)	
1	(1)	$\neg A \rightarrow \neg B$	H
2	(2)	$B$	H
3	(3)	$\neg A$	H
1,3	(4)	$\neg B$	1,3. $\rightarrow$ -E
1,2,3	(5)	$\perp$	2,4. $\neg$ -E
1,2	(6)	$\neg\neg A$	3-5. $\neg$ -I
1,2	(7)	$A$	6. $\neg\neg$ -E
1	(8)	$B \rightarrow A$	2-7. $\rightarrow$ -I
	(9)	$(\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow (B \rightarrow A)$	1-8. $\rightarrow$ -I

(7)	$\exists xF(x) \rightarrow \neg\forall y\neg F(y)$	(☆☆☆)	
1	(1)	$\exists xF(x)$	H
2	(2)	$F(a)$	H
3	(3)	$\forall y\neg F(y)$	H
3	(4)	$\neg F(a)$	3. $\forall$ -E
2,3	(5)	$\perp$	2,4. $\neg$ -E
2	(6)	$\neg\forall y\neg F(y)$	3-5. $\neg$ -I
1	(7)	$\neg\forall y\neg F(y)$	1,2-6. $\exists$ -E
	(8)	$\exists xF(x) \rightarrow \neg\forall y\neg F(y)$	1-7. $\rightarrow$ -I

(8)	$\neg\forall yF(y) \rightarrow \exists x\neg F(x)$	(☆☆☆)	
1	(1)	$\neg\forall yF(y)$	H
2	(2)	$F(a)$	H
2	(3)	$\forall yF(y)$	2. $\forall$ -I
1,2	(4)	$\perp$	1,3. $\neg$ -E
1	(5)	$\neg F(a)$	2-4. $\neg$ -I
1	(6)	$\exists x\neg F(x)$	5. $\exists$ -I
	(7)	$\neg\forall yF(y) \rightarrow \exists x\neg F(x)$	1-6. $\rightarrow$ -I

(9)	$\exists x(A \rightarrow B(x)) \rightarrow (A \rightarrow \exists xB(x))$	(☆☆)	
1	(1)	$\exists x(A \rightarrow B(x))$	H
2	(2)	$A \rightarrow B(a)$	H
3	(3)	$A$	H
2,3	(4)	$B(a)$	2,3. $\rightarrow$ -E
2,3	(5)	$\exists xB(x)$	4. $\exists$ -I
2	(6)	$A \rightarrow \exists xB(x)$	3-5. $\rightarrow$ -I
1	(7)	$A \rightarrow \exists xB(x)$	1,2-6. $\exists$ -E
	(8)	$\exists x(A \rightarrow B(x)) \rightarrow (A \rightarrow \exists xB(x))$	1-7. $\rightarrow$ -I

(10)  $(A \rightarrow \exists xB(x)) \rightarrow \exists x(A \rightarrow B(x))$  (☆☆☆☆☆)

1	(1)	$A \rightarrow \exists xB(x)$	H
2	(2)	$A$	H
1,2	(3)	$\exists xB(x)$	1,2. $\rightarrow$ -E
4	(4)	$B(a)$	H
4	(5)	$A \rightarrow B(a)$	2,4. $\rightarrow$ -I
4	(6)	$\exists x(A \rightarrow B(x))$	5. $\exists$ I
1,2	(7)	$\exists x(A \rightarrow B(x))$	3,4-6. $\exists$ E
1	(8)	$A \rightarrow \exists x(A \rightarrow B(x))$	2-7. $\rightarrow$ -I
9	(9)	$\neg \exists x(A \rightarrow B(x))$	H
10	(10)	$\neg A$	H
11	(11)	$A$	H
12	(12)	$\neg B(a)$	H
11,12	(13)	$A \wedge \neg B(a)$	11,12. $\wedge$ I
11,12	(14)	$A$	13. $\wedge$ E
10,11,12	(15)	$\perp$	10,14. $\neg$ -E
10,11	(16)	$\neg \neg B(a)$	12-15. $\neg$ -I
10,11	(17)	$B(a)$	16. $\neg \neg$ -E
10	(18)	$A \rightarrow B(x)$	11-17. $\rightarrow$ -I
10	(19)	$\exists x(A \rightarrow B(x))$	18. $\exists$ I
9,10	(20)	$\perp$	9,19. $\neg$ -E
9	(21)	$\neg \neg A$	10-20. $\neg$ -I
9	(22)	$A$	21. $\neg \neg$ -E
1,9	(23)	$\exists x(A \rightarrow B(x))$	8,22. $\rightarrow$ -E
1,9	(24)	$\perp$	9,23. $\neg$ -E
1	(25)	$\neg \neg \exists x(A \rightarrow B(x))$	9-24. $\neg$ -I
1	(26)	$\exists x(A \rightarrow B(x))$	25. $\neg \neg$ -E
	(27)	$(A \rightarrow \exists xB(x)) \rightarrow \exists x(A \rightarrow B(x))$	1-26. $\rightarrow$ -I

※もっと楽な解答があれば教えてください。よろしくお願いします。

(11)  $\exists x(A(x) \rightarrow B(x)) \rightarrow (\forall xA(x) \rightarrow \exists xB(x))$  (☆☆☆)

1	(1)	$\exists x(A(x) \rightarrow B(x))$	H
2	(2)	$A(a) \rightarrow B(a)$	H
3	(3)	$\forall xA(x)$	H
3	(4)	$A(a)$	3. $\forall$ -E
2,3	(5)	$B(a)$	2,4. $\rightarrow$ -E
2,3	(6)	$\exists xB(x)$	5. $\exists$ -I
2	(7)	$\forall xA(x) \rightarrow \exists xB(x)$	3-6. $\rightarrow$ -I
1	(8)	$\forall xA(x) \rightarrow \exists xB(x)$	1,2-7. $\exists$ -E
	(9)	$\exists x(A(x) \rightarrow B(x)) \rightarrow (\forall xA(x) \rightarrow \exists xB(x))$	1-8. $\rightarrow$ -I

(12)	$\neg A \vee B \Rightarrow A \rightarrow B$	(☆☆)	
1	(1)	$\neg A \vee B$	Ass
2	(2)	A	H
3	(3)	$\neg B$	H
4	(4)	$\neg A$	H
2,4	(5)	$\perp$	2,4. $\neg$ -E
6	(6)	B	H
3,6	(7)	$\perp$	3,6. $\neg$ -E
1,2,3	(8)	$\perp$	1,4-5,6-7. $\vee$ -E
1,2	(9)	$\neg\neg B$	3-8. $\neg$ -I
1,2	(10)	B	9. $\neg\neg$ -E
1	(11)	$A \rightarrow B$	2-10. $\rightarrow$ -I

(13)	$A \wedge B \rightarrow A$	(☆)	
1	(1)	$A \wedge B$	H
1	(2)	A	1. $\wedge$ -E
	(3)	$A \wedge B \rightarrow A$	1-2. $\rightarrow$ -I

(14)	$A \rightarrow A \vee B$	(☆)	
1	(1)	A	H
1	(2)	$A \vee B$	1. $\vee$ -I
	(3)	$A \rightarrow A \vee B$	1-2. $\rightarrow$ -I

(15)	$\neg A \vee \neg B \rightarrow \neg(A \wedge B)$	(☆☆)	
1	(1)	$\neg A \vee \neg B$	H
2	(2)	$A \wedge B$	H
3	(3)	$\neg A$	H
2	(4)	A	2. $\wedge$ -E
2,3	(5)	$\perp$	3,4. $\neg$ -E
6	(6)	$\neg B$	H
2	(7)	B	2. $\wedge$ -E
2,6	(8)	$\perp$	6,7. $\neg$ -E
1,2	(9)	$\perp$	1,3-5,6-8. $\vee$ -E
1	(10)	$\neg(A \wedge B)$	2-9. $\neg$ -I
	(11)	$\neg A \vee \neg B \rightarrow \neg(A \wedge B)$	1-10. $\rightarrow$ -I

(16)  $\neg(A \wedge B) \rightarrow \neg A \vee \neg B$  (☆☆)

1	(1)	$\neg(A \wedge B)$	H
2	(2)	$\neg(\neg A \vee \neg B)$	H
3	(3)	$\neg A$	H
3	(4)	$\neg A \vee \neg B$	3. $\vee$ -I
2,3	(5)	$\perp$	2,4. $\neg$ -E
2	(6)	$\neg\neg A$	3-5. $\neg$ -I
2	(7)	A	6. $\neg\neg$ -E
8	(8)	$\neg B$	H
8	(9)	$\neg A \vee \neg B$	8. $\vee$ -I
2,8	(10)	$\perp$	2,9. $\neg$ -E
2	(11)	$\neg\neg B$	8-10. $\neg$ -I
2	(12)	B	11. $\neg\neg$ -E
2	(13)	$A \wedge B$	7,12. $\wedge$ -I
1,2	(14)	$\perp$	1,13. $\neg$ -E
1	(15)	$\neg\neg(\neg A \vee \neg B)$	2-14. $\neg$ -I
1	(16)	$\neg A \vee \neg B$	15. $\neg\neg$ -E
	(17)	$\neg(A \wedge B) \rightarrow \neg A \vee \neg B$	1-16. $\rightarrow$ -I

(17)  $\neg A \wedge \neg B \rightarrow \neg(A \vee B)$  (☆☆)

1	(1)	$\neg A \wedge \neg B$	H
2	(2)	$A \vee B$	H
3	(3)	$\neg A$	H
2	(4)	A	2. $\wedge$ -E
2,3	(5)	$\perp$	3,4. $\neg$ -E
6	(6)	$\neg B$	H
2	(7)	B	2. $\wedge$ -E
2,6	(8)	$\perp$	6,7. $\neg$ -E
1,2	(9)	$\perp$	1,3-5,6-8. $\vee$ -E
1	(10)	$\neg(A \vee B)$	2-9. $\neg$ -I
	(11)	$\neg A \wedge \neg B \rightarrow \neg(A \vee B)$	1-10. $\rightarrow$ -I

(18)  $(A \vee C) \wedge (B \vee C) \Rightarrow (A \wedge B) \vee C$  (☆☆☆)

1	(1)	$(A \vee C) \wedge (B \vee C)$	Ass
1	(2)	$A \vee C$	1. $\wedge$ E
3	(3)	C	H
3	(4)	$(A \wedge B) \vee C$	3. $\vee$ I
5	(5)	A	H
1	(6)	$B \vee C$	1. $\wedge$ E
7	(7)	C	H
7	(8)	$(A \wedge B) \vee C$	7. $\vee$ I
9	(9)	B	H
5,9	(10)	$A \wedge B$	5,9. $\wedge$ I
5,9	(11)	$(A \wedge B) \vee C$	10. $\vee$ I
1,5	(12)	$(A \wedge B) \vee C$	6,7-8,9-11. $\vee$ E
1	(13)	$(A \wedge B) \vee C$	2,3-4,5-12. $\vee$ E

(19)  $A \rightarrow \neg B \Rightarrow B \rightarrow \neg A$  (☆☆)

1	(1)	$A \rightarrow \neg B$	Ass
2	(2)	$B$	H
3	(3)	$A$	H
1,3	(4)	$\neg B$	1,3. $\rightarrow$ -E
1,2,3	(5)	$\perp$	2,4. $\neg$ -E
1,2	(6)	$\neg A$	3-5. $\neg$ -I
1	(7)	$B \rightarrow \neg A$	2-6. $\rightarrow$ -I

(20)  $\exists xF(x) \rightarrow \neg \forall y\neg F(y)$

(7)と同じ問題なので省略

(21)  $\exists x\neg F(x) \rightarrow \neg \forall xF(x)$  (☆☆)

1	(1)	$\exists x\neg F(x)$	H
2	(2)	$\neg F(a)$	H
3	(3)	$\forall xF(x)$	H
3	(4)	$F(a)$	3. $\forall$ -E
2,3	(5)	$\perp$	2,4. $\neg$ -E
2	(6)	$\neg \forall xF(x)$	3-5. $\neg$ -I
1	(7)	$\neg \forall xF(x)$	1,2-6. $\exists$ -E
	(8)	$\exists x\neg F(x) \rightarrow \neg \forall xF(x)$	1-7. $\rightarrow$ -I

(22)  $\forall x(F(x) \wedge G(x)) \rightarrow \forall xF(x) \wedge \forall xG(x)$  (☆☆)

1	(1)	$\forall x(F(x) \wedge G(x))$	H
1	(2)	$F(a) \wedge G(a)$	1. $\forall$ -E
1	(3)	$F(a)$	2. $\wedge$ -E
1	(4)	$\forall xF(x)$	3. $\forall$ -I
1	(5)	$G(a)$	2. $\wedge$ -E
1	(6)	$\forall xG(x)$	5. $\forall$ -I
1	(7)	$\forall xF(x) \wedge \forall xG(x)$	4,6. $\wedge$ -I
	(8)	$\forall x(F(x) \wedge G(x)) \rightarrow \forall xF(x) \wedge \forall xG(x)$	1-7. $\rightarrow$ -I

(23)  $\neg\neg(A \rightarrow B), A \Rightarrow \neg\neg B$  (☆☆☆)

1	(1)	$\neg\neg(A \rightarrow B)$	Ass
2	(2)	$A$	Ass
3	(3)	$\neg B$	H
1	(4)	$A \rightarrow B$	1. $\neg\neg$ -E
1,2	(5)	$B$	2,4. $\rightarrow$ -E
1,2,3	(6)	$\perp$	3,5. $\neg$ -E
1,2	(7)	$\neg\neg B$	3-6. $\neg$ -I



(24)	$\neg\neg B \rightarrow B, \neg\neg(A \rightarrow B) \Rightarrow A \rightarrow B$	(☆☆☆)
1	(1) $\neg\neg B \rightarrow B$	Ass
2	(2) $\neg\neg(A \rightarrow B)$	Ass
3	(3) $A$	H
4	(4) $\neg B$	H
2	(5) $A \rightarrow B$	2. $\neg\neg$ -E
2,3	(6) $B$	3,5. $\rightarrow$ -E
2,3,4	(7) $\perp$	4,6. $\neg$ -E
2,3	(8) $\neg\neg B$	4-7. $\neg$ -I
1,2,3	(9) $B$	1,8. $\rightarrow$ -E
1,2	(10) $A \rightarrow B$	3-9. $\rightarrow$ -I

※前提は使い切らないといけない。よって、いきなり2行目に $\neg\neg$ -Eを使ってはいけない。

(25)	$\neg\neg\neg A \rightarrow \neg A$	(☆)
1	(1) $\neg\neg\neg A$	H
1	(2) $\neg A$	1. $\neg\neg$ -E
	(3) $\neg\neg\neg A \rightarrow \neg A$	1-2. $\rightarrow$ -I

(26)	$\neg A \rightarrow \neg\neg\neg A$	(☆)
1	(1) $\neg A$	H
2	(2) $\neg\neg A$	H
2	(3) $A$	2. $\neg\neg$ -E
1,2	(4) $\perp$	1,3. $\neg$ -E
1	(5) $\neg\neg\neg A$	2-4. $\neg$ -I
	(6) $\neg A \rightarrow \neg\neg\neg A$	1-5. $\rightarrow$ -I

※1行目と2行目で $\perp$ を導くことはできない(と思う)。

## 問題2

(1)	$\vdash (A \wedge B) \rightarrow (B \wedge A)$	(☆)
1	(1) $A \wedge B$	H
1	(2) $A$	1. $\wedge$ -E
1	(3) $B$	1. $\wedge$ -E
1	(4) $B \wedge A$	2,3. $\wedge$ -I
	(5) $(A \wedge B) \rightarrow (B \wedge A)$	1-4. $\rightarrow$ -I

(2)	$\vdash (A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \wedge B) \rightarrow C)$	(☆☆)
1	(1) $A \rightarrow (B \rightarrow C)$	H
2	(2) $A \wedge B$	H
2	(3) $A$	2. $\wedge$ -E
1,2	(4) $B \rightarrow C$	1,3. $\rightarrow$ -E
2	(5) $B$	2. $\wedge$ -E
1,2	(6) $C$	4,5. $\rightarrow$ -E
1	(7) $(A \wedge B) \rightarrow C$	2-6. $\rightarrow$ -I
	(8) $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \wedge B) \rightarrow C)$	1-7. $\rightarrow$ -I

(3)  $\vdash A \rightarrow \neg\neg A$  ( $\star$ )

1	(1)	$A$	H
2	(2)	$\neg A$	H
1,2	(3)	$\perp$	1,2. $\neg$ -E
1	(4)	$\neg\neg A$	2-3. $\neg$ -I
	(5)	$A \rightarrow \neg\neg A$	1-4. $\rightarrow$ -I

(4)  $\vdash (A \wedge B) \vee C \rightarrow (A \vee C) \wedge (B \vee C)$  ( $\star\star$ )

1	(1)	$(A \wedge B) \vee C$	H
2	(2)	$A \wedge B$	H
2	(3)	$A$	2. $\wedge$ -E
2	(4)	$A \vee C$	3. $\vee$ -I
2	(5)	$B$	2. $\wedge$ -E
2	(6)	$B \vee C$	5. $\vee$ -I
2	(7)	$(A \vee C) \wedge (B \vee C)$	4,6. $\wedge$ -I
8	(8)	$C$	H
8	(9)	$A \vee C$	8. $\vee$ -I
8	(10)	$B \vee C$	8. $\vee$ -I
8	(11)	$(A \vee C) \wedge (B \vee C)$	9,10. $\wedge$ -I
1	(12)	$(A \vee C) \wedge (B \vee C)$	1,2-7,8-11. $\vee$ -E
	(13)	$(A \wedge B) \vee C \rightarrow (A \vee C) \wedge (B \vee C)$	1-12. $\rightarrow$ -I

(5)  $\vdash (A \vee C) \wedge (B \vee C) \rightarrow (A \wedge B) \vee C$  ( $\star\star\star$ )

1	(1)	$(A \vee C) \wedge (B \vee C)$	H
1	(2)	$A \vee C$	1. $\wedge$ -E
3	(3)	$C$	H
3	(4)	$(A \wedge B) \vee C$	3. $\vee$ -I
5	(5)	$A$	H
1	(6)	$B \vee C$	1. $\wedge$ -E
7	(7)	$C$	H
7	(8)	$(A \wedge B) \vee C$	7. $\vee$ -I
9	(9)	$B$	H
5,9	(10)	$A \wedge B$	5,9. $\wedge$ -I
5,9	(11)	$(A \wedge B) \vee C$	10. $\vee$ -I
1,5	(12)	$(A \wedge B) \vee C$	6,7-8,9-11. $\vee$ -E
1	(13)	$(A \wedge B) \vee C$	2,3-4,5-12. $\vee$ -E
	(14)	$(A \vee C) \wedge (B \vee C) \rightarrow (A \wedge B) \vee C$	1-13. $\rightarrow$ -I

(6)	$\vdash (A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$	(☆☆)
1	(1) $A \rightarrow (B \rightarrow C)$	H
2	(2) $A \rightarrow B$	H
3	(3) $A$	H
1,3	(4) $B \rightarrow C$	1,3. $\rightarrow$ -E
2,3	(5) $B$	2,3. $\rightarrow$ -E
1,2,3	(6) $C$	4,5. $\rightarrow$ -E
1,2	(7) $A \rightarrow C$	3-6. $\rightarrow$ -I
1	(8) $(A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)$	2-7. $\rightarrow$ -I
	(9) $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$	1-8. $\rightarrow$ -I

(7)	$\vdash (A \vee B \rightarrow C) \rightarrow ((A \rightarrow C) \wedge (B \rightarrow C))$	(☆☆)
1	(1) $A \vee B \rightarrow C$	H
2	(2) $A$	H
2	(3) $A \vee B$	2. $\vee$ -I
1,2	(4) $C$	1,3. $\rightarrow$ -E
1	(5) $A \rightarrow C$	2-4. $\rightarrow$ -I
6	(6) $B$	H
6	(7) $A \vee B$	6. $\vee$ -I
1,6	(8) $C$	1,7. $\rightarrow$ -E
1	(9) $B \rightarrow C$	6-8. $\rightarrow$ -I
1	(10) $(A \rightarrow C) \wedge (B \rightarrow C)$	5,9. $\wedge$ -I
	(11) $(A \vee B \rightarrow C) \rightarrow ((A \rightarrow C) \wedge (B \rightarrow C))$	1-10. $\rightarrow$ -I

(8)	$\vdash (\neg\neg A \rightarrow \neg\neg B) \rightarrow \neg\neg(A \rightarrow B)$	(☆☆☆)
1	(1) $\neg\neg A \rightarrow \neg\neg B$	H
2	(2) $\neg(A \rightarrow B)$	H
3	(3) $A$	H
4	(4) $\neg A$	H
3,4	(5) $\perp$	3,4. $\neg$ -E
2,3	(6) $\neg\neg A$	2-4. $\neg$ -I
1,2,3	(7) $\neg\neg B$	1,6. $\rightarrow$ -E
1,2,3	(8) $B$	7. $\neg\neg$ -E
1,2	(9) $A \rightarrow B$	3-8. $\rightarrow$ -I
1,2	(10) $\perp$	2,9. $\neg$ -I
1	(11) $\neg\neg(A \rightarrow B)$	2-10. $\neg$ -I
	(12) $(\neg\neg A \rightarrow \neg\neg B) \rightarrow \neg\neg(A \rightarrow B)$	1-11. $\rightarrow$ -I

(9)	$\vdash \neg\neg(P \vee \neg P)$	(☆☆)
1	(1) $\neg(P \vee \neg P)$	H
2	(2) $P$	H
2	(3) $P \vee \neg P$	2. $\vee$ -I
1,2	(4) $\perp$	1,3. $\neg$ -E
1	(5) $\neg P$	2-4. $\neg$ -I
1	(6) $P \vee \neg P$	5. $\vee$ -I
1	(7) $\perp$	1,6. $\neg$ -E
	(8) $\neg\neg(P \vee \neg P)$	1-7. $\neg$ -I

(10)  $\vdash (A \rightarrow (A \rightarrow B)) \rightarrow (A \rightarrow B)$  (☆☆)

1	(1)	$A \rightarrow (A \rightarrow B)$	H
2	(2)	$A$	H
1,2	(3)	$A \rightarrow B$	1,2. $\rightarrow$ -E
1,2	(4)	$B$	2,3. $\rightarrow$ -E
1	(5)	$A \rightarrow B$	2-4. $\rightarrow$ -I
	(6)	$(A \rightarrow (A \rightarrow B)) \rightarrow (A \rightarrow B)$	1-5. $\rightarrow$ -I