2008 年度夏学期　数学 II・同演習学期末試験（足助担当）　解答

問１.

1) $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -5.$$

2) $$\begin{vmatrix} \sqrt{-1} & 2-\sqrt{-1} & -1 \\ 1 & 3 & 4 \\ 2 & -4-3\sqrt{-1} & -1+4\sqrt{-1} \end{vmatrix} = \sqrt{-1}\begin{vmatrix} 1 & -1-2\sqrt{-1} & \sqrt{-1} \\ 1 & 3 & 4 \\ 2 & -4-3\sqrt{-1} & -1+4\sqrt{-1} \end{vmatrix}$$
$$= \sqrt{-1}\begin{vmatrix} 1 & -1-2\sqrt{-1} & \sqrt{-1} \\ 0 & 4+2\sqrt{-1} & 4-\sqrt{-1} \\ 0 & -2-\sqrt{-1} & -1+2\sqrt{-1} \end{vmatrix} = \sqrt{-1}\begin{vmatrix} 4+2\sqrt{-1} & 4-\sqrt{-1} \\ -2-\sqrt{-1} & -1+2\sqrt{-1} \end{vmatrix} = -\sqrt{-1}.$$

問２. 与方程式の拡大係数行列を掃き出して

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -4 & 5 \\ 1 & -1 & b-2 & 3 \\ 2 & -(a+1) & -8 & 3 \end{pmatrix} \underset{(1)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & -1 & b-2 & 3 \\ 2 & -1 & -4 & 5 \\ 2 & -(a+1) & -8 & 3 \end{pmatrix}$$
$$\underset{(2)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & -1 & b-2 & 3 \\ 0 & 1 & -2b & -1 \\ 0 & -a & -4 & -2 \end{pmatrix} \underset{(3)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -b-2 & 2 \\ 0 & 1 & -2b & -1 \\ 0 & 0 & -2ab-4 & -a-2 \end{pmatrix}.$$

ただし, (1) から (3) はそれぞれ以下の操作を表す.

(1) 第 1 行と第 2 行を入れ替える

(2) 第 2 列に第 1 列の 2 倍を加え, 第 3 列から第 2 列を引く

(3) (2,2) 成分を要として第 2 列を掃き出す

$-2ab-4=0$ のとき, $-a-2\neq 0$ ならば解なし. $-a-2=0$ 即ち $(a,b)=(-2,1)$ ならば,
α を任意定数として, 解は $x_1=3\alpha+2, x_2=2\alpha-1, x_3=\alpha$ となる.
$-2ab-4\neq 0$ 即ち $ab\neq -2$ のとき, さらに掃き出しを行って

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -b-2 & 2 \\ 0 & 1 & -2b & -1 \\ 0 & 0 & -2ab-4 & -a-2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & (2ab-b^2)/(ab+2) \\ 0 & 1 & 0 & (b-2)/(ab+2) \\ 0 & 0 & 1 & (a+2)/2(ab+2) \end{pmatrix}$$
.

よって解は $x_1=\dfrac{2ab-b^2}{ab+2}, x_2=\dfrac{b-2}{ab+2}, x_3=\dfrac{a+2}{2(ab+2)}$ となる.
以上により, 与方程式が解を持つための必要充分条件は $(a,b)=(-2,1)$ または $ab\neq -2$ であり,
またそのときの解空間は,

$(a,b)=(-2,1)$ のとき $\left\{ v\in\mathbb{R}^3 \;\middle|\; \exists\lambda_1\in\mathbb{R}, v=\lambda_1\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}\right\}$,

$ab\neq -2$ のとき $\left\{ v\in\mathbb{R}^3 \;\middle|\; v=\dfrac{1}{2(ab+2)}\begin{pmatrix}4ab-2b^2\\2b-4\\a+2\end{pmatrix}\right\}$.

問３.

1) (a) $V=\{f\in\mathbb{R}[x]\mid f(-x)=f(x)\}$ とおくと, $f(x)=0$ について $f\in V$ より $V\neq\emptyset$.

$\forall f,g\in V,(f+g)(-x)=f(-x)+g(-x)=f(x)+g(x)=(f+g)(x)$ より $f+g\in V$,
$\forall f\in V,\forall\lambda\in\mathbb{R},\lambda f(-x)=\lambda(f(-x))=\lambda(f(x))=\lambda f(-x)$ より $\lambda f\in V$.

従って V は $\mathbb{R}[x]$ の部分線型空間である. □

(b) $W=\left\{f\in\mathbb{R}[x]\,\middle|\,f(x^2)=f(x)^2\right\}$ とおくと, $f(x)=x$ について $f\in W$ であるが,
$2f(x^2)=2x^2,2f(x)^2=4x^2$ より $2f(x^2)\neq 2f(x)^2$. $\therefore 2f\notin W$
従って W は $\mathbb{R}[x]$ の部分線型空間ではない. □

2) (a) $f(x)=0$ なる f について $f\in W_{a,b}$ より $W_{a,b}\neq\emptyset$.
$\forall f,g\in W_{a,b},(f+g)(a)=f(a)+g(a)=0,(f+g)(b)=f(b)+g(b)=0$ より $f+g\in V_{a,b}$,
$\forall f\in W_{a,b},\forall\lambda\in\mathbb{R},\lambda f(a)=\lambda(f(a))=\lambda f(b)=\lambda(f(b))=0$, より $\lambda f\in V$.
従って V は $\mathbb{R}_2[x]$ の部分線型空間である. □

(b) $f\in W_{-1,0}\cap W_{0,1}$ について, $f(-1)=f(0)=f(1)$ が成り立つ.
$f\in\mathbb{R}_2[x]$ より $f(x)=px^2+qx+r$ $(p,q,r\in\mathbb{R})$ とおくと,

$$\begin{cases}p-q+r=0\\ r=0\\ p+q+r=0\end{cases}\quad\Leftrightarrow\begin{cases}p=0\\ q=0\\ r=0\end{cases}\quad\therefore f(x)=0$$

$f(x)=0$ なる f を o とおくと, o は $\mathbb{R}_2[x]$ の零元であって, $(\because\forall f\in\mathbb{R}_2[x],(o+f)(x)=o(x)+f(x)=f(x))$
$W_{-1,0}\cap W_{0,1}=\{o\}$ が成り立つ. 従って $W_{-1,0}+W_{0,1}$ は直和である. □

(c) $\mathbb{R}_2[x]=W_{-1,0}\oplus W_{0,1}\oplus W_{a,b}\Leftrightarrow\mathbb{R}_2[x]=W_{-1,0}+W_{0,1}+W_{a,b}$かつ $W_{-1,0}+W_{0,1}+W_{a,b}$が直和

ここで $W_{-1,0}+W_{0,1}+W_{a,b}$が直和 $\Leftrightarrow W_{-1,0}\cap W_{0,1}=(W_{-1,0}+W_{0,1})\cap W_{a,b}=\{o\}$ であるが,
$W_{-1,0}\cap W_{0,1}=\{o\}$ は (b) より成り立つ.

$W_{-1,0}+W_{0,1}=\{\lambda_1x(x+1)+\lambda_2x(x-1)\mid\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R}\}=\{x\{(\lambda_1+\lambda_2)x+(\lambda_1-\lambda_2)\}\mid\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R}\}$
$=\left\{\mu_1x^2+\mu_2x\,\middle|\,\mu_1,\mu_2\in\mathbb{R}\right\}=\{f\in\mathbb{R}_2[x]\mid f(0)=0\}$ より,
$f\in(W_{-1,0}+W_{0,1})\cap W_{a,b}$ なる f について $f(0)=f(a)=f(b)=0$ が成り立つ. $f\in\mathbb{R}_2[x]$ より

$f(x)=ax^2+bx+c$ $(a,b,c\in\mathbb{R})$ とおくと, $\begin{cases}r=0\\ pa^2+qa+r=0\\ pb^2+qb+r=0\end{cases}\quad\Leftrightarrow\begin{pmatrix}a^2&a\\b^2&b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}p\\q\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

この方程式が非自明な解を持つ $\Leftrightarrow\det\begin{pmatrix}a^2&a\\b^2&b\end{pmatrix}=ab(a-b)=0$ より,

$ab=0$ または $a=b$ のとき, $f\in(W_{-1,0}+W_{0,1})\cap W_{a,b}$ なる $f\neq o$ が存在し不適.
故に $W_{-1,0}+W_{0,1}+W_{a,b}$ が直和であるための条件は $ab\neq0$ かつ $a\neq b$. またこのとき,
$W_{-1,0}+W_{0,1}+W_{a,b}=(W_{-1,0}+W_{0,1})+W_{a,b}=\left\{\lambda_1x^2+\lambda_2x+\lambda_3(x-a)(x-b)\,\middle|\,\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\in\mathbb{R}\right\}$
$=\left\{(\lambda_1+\lambda_3)x^2+(\lambda_2-a-b)x+\lambda_3ab\,\middle|\,\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\in\mathbb{R}\right\}=\left\{\mu_1x^2+\mu_2x+\mu_3\,\middle|\,\mu_1,\mu_2,\mu_3\in\mathbb{R}\right\}=\mathbb{R}_2[x]$
より, 確かに条件を充たす. 従って, 求める条件は $ab\neq0$ かつ $a\neq b$ である.

問４.

1) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ の表現行列を $A = (a_{ij}) = M_3(\mathbb{R})$ とする. $w \in W$ に対して $w = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} (x_1, x_2 \in \mathbb{R})$ とおくと,

$Aw = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 \end{pmatrix} \in W$ となる条件は, $\forall x_1, x_2 \mathbb{R}, a_{31}x_1 + a_{32}x_2 = 0 \Leftrightarrow a_{31} = a_{32} = 0.$

よって求める表現行列は $\{\, A = (a_{ij}) = M_3(\mathbb{R}) \mid a_{31} = a_{32} = 0\}$ の任意の元である.

2) A, w を 1) と同様に定める. $Aw = 0$ となる条件は,

$$\forall x_1, x_2 \mathbb{R}, \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = 0 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow a_{11} = a_{12} = a_{21} = a_{22} = a_{31} = a_{32} = 0.$$

よって求める表現行列は $\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & a_{13} \\ 0 & 0 & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix} \middle| \ a_{13}, a_{23}, a_{33} \in \mathbb{R} \right\}$ の任意の元である.

3) $f \in V$ の表現行列を A, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ の表現行列を $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \in M_{3,1}(\mathbb{R})$ とすると, $f \circ g$ の表現行列は AB.

$ABv = \begin{pmatrix} a_{13}b_3v \\ a_{13}b_3v \\ a_{13}b_3v \end{pmatrix} = 0$ となる条件は, $\forall a_{13}, a_{23}, a_{33}, v \in \mathbb{R}, \begin{cases} a_{13}b_3v = 0 \\ a_{13}b_3v = 0 \\ a_{13}b_3v = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow b_3 = 0$

よって求める表現行列は W の任意の元である.

【感想】

スペースが余ったので何か書いてみます.

問１. 計算するだけです.

1) 成分に 0 を含むのでサラスの方法で良いでしょう.

2) 強いていえば $\sqrt{-1}$ を掛けるのを忘れないように.

問２. 掃き出しと場合分けが出来れば問題ないでしょう. ここまでは落としたくないところ.

問３. 用語の定義が分かっていれば大体できるはず.

1) 定義どおりに.

2) 上に同じ. ただし (c) はメンドウですが, ちゃんとやらないと $a \neq b$ とかを忘れます.

なお, 直和である条件は別に det 使わなくても色々やり方はあると思います.

問４. 表現行列の意味さえ分かっていれば問題ないかと.

解答の書き方が随分我流なのと, 若干くどい気もするので, その辺の匙加減は各自でお願いします. 問１, 問２は問題無いでしょう（これが取れないと非常に厳しいかと）. 問３, 問４は用語の意味さえ分かっていれば案外手がつけられます. 逆に言うと用語の意味が分からないとどうしようも無い感じです. まぁ当然か.

ミスなどありましたら木村まで報告ください. では皆さん頑張りましょう.