数理科学Ⅴ・2010年度夏学期（林）定期試験解答

1. $x = A|B$を$\mathbb{Q}$の切断とするとき,次の等式を証明せよ:

$$x = \mathrm{l.u.b.}(A).$$

(prf.) $^\forall a = C|D \in A$について$C \subset A$が成り立つから,$a \leq x$.よってxはAに対する上界である.最小性を示そう.$x' = E|F$がAに対する上界であって,かつ$x' < x$を満たすとする.このとき$E \subsetneq A$が成り立つから,$^\exists a \in A \text{ s.t. } a \notin E$.ここで$a \notin E \Leftrightarrow a \in F$であり,切断の定義より$^\forall e \in E, e < a$となるが,これは$a \neq x'$のとき$x'$の上界性に反する.一方,$a = x'$ならば,$A$が最大元を持たないことに反する.

以上より$x = \mathrm{l.u.b.}(A)$. (Q.E.D.)

★「Dedekind の切断」の定義を復習しておきましょう:

<u>**定義(Dedekind の切断)**</u> $\mathbb{Q}$の切断とは,次の性質を満たす$\mathbb{Q}$の部分集合A, Bの組である.この組を$A|B$と書く:

1) $A \cup B = \mathbb{Q}, A \neq \emptyset, B \neq \emptyset, A \cap B = \emptyset$;
2) $a \in A \;\&\; b \in B \Longrightarrow a < b$;
3) Aは最大元を持たない.

講義では,実数$\mathbb{R}$を「$\mathbb{Q}$の切断」と定義したのでした.

2. 次の問に答えよ.

(1) $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$が連続関数であること,および一様連続であることの定義をそれぞれ$\varepsilon - \delta$論法を用いて書け.

(2) 一様連続でない有界な連続関数$g\colon (0,1) \to \mathbb{R}$の例を与えよ.

(3) (2)で与えたgに対し,関数$h\colon [0,1] \to \mathbb{R}$を次のように定義する:

$$h(x) = \begin{cases} 0, & x = 0; \\ g(x), & x \in (0,1); \\ 1, & x = 1. \end{cases}$$

hは Riemann 可積分関数かどうか判定し,その判定理由を述べよ.

(解)

(1) <u>連続関数であること:</u>

$$^\forall \varepsilon > 0\, ^\forall x \in (a,b)\, ^\exists \delta > 0 \text{ s.t. } |t - x| < \delta \Longrightarrow |f(t) - f(x)| < \varepsilon.$$

<u>一様連続であること:</u>

$$^\forall \varepsilon > 0\, ^\exists \delta > 0 \text{ s.t. } ^\forall x \in (a,b), |t - x| < \delta \Longrightarrow |f(t) - f(x)| < \varepsilon.$$

(2) たとえば次のような例がある:

$$\begin{array}{cccc} g: & (0,1) & \to & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \sin\dfrac{1}{x}. \end{array}$$

gは$(0,1)$上連続な関数$\frac{1}{x}$と,実数全体で連続な関数$\sin$との合成だから連続である.一様連続でないことを確かめよう.

$\varepsilon = 1$とし,$x = \frac{2}{(2n-1)\pi}, t = \frac{2}{(2n+1)\pi}\ (n \in \mathbb{N})$とする.このとき$^\forall n, |g(t) - g(x)| = 2$であるから,$\delta > 0$をどのように選んでも$|t - x| < \delta$のとき$|g(t) - g(x)| < \varepsilon$とできない.従って$g$は一様連続でない.

(3) Riemann 可積分関数である.

<u>理由</u> $h(x)$は有界であり,その不連続点の集合は$\{x = 0\}$であって零集合である.従って Riemann-Lebesgue の定理により,$h \in \mathcal{R}$.

★(1)について.一様連続の定義においては,δがxに対して「一様」に選べることが重要です.

(2)は典型的な例で,講義でも登場しました.

(3)については,Riemann-Lebesgue の定理を確認しておきましょう:

<u>**定理(Riemann-Lebesgue の定理)**</u> $f: [a, b] \to \mathbb{R}$に対し,次が成り立つ:

$$f \in \mathcal{R} \Leftrightarrow f\text{は有界} \ \&\ f\text{の不連続点の集合は零集合}.$$

ただし,$\mathcal{R}$は「Riemann 可積分関数全体のなす線型空間」です.本問では,可算集合,特に有限集合は零集合である,という事実も用いました.

3. 2 つの距離関数MとNの間の連続な全単射$f: M \to N$は,Mがコンパクトならば$f^{-1}: N \to M$も連続であることを証明せよ.

(prf.) 任意にMの閉部分集合Vを選ぶ.また,$\{a_n\}$をpに収束する$f(V)(\subset N)$の点列とする.$f^{-1}(a_n) = b_n$とすると$b_n \in V \subset M$であり,$\{b_n\}$をVの点列,ないしMの点列とみなすことができる.Mがコンパクト,特に点列コンパクトであることから,$\{b_n\}$は収束部分列$\{b_{n_k}\}$を持つ.その収束先をqとすると,qは閉集合Vの点列$\{b_{n_k}\}$の収束先でもあるから$q \in V$.

fは連続なので,その収束列保存性により$f(b_{n_k}) = a_{n_k} \to f(q) \in f(V)(k \to \infty)$.ところで$a_n \to p(n \to \infty)$であったから,結局$p = f(q) \in f(V)$を得る.

以上より,f^{-1}は閉集合条件を満たし,従って連続である. (Q.E.D.)

★連続性の様々な表現,及びコンパクト距離空間の性質を駆使して議論を進めていきます.いくつか確認しておきましょう.まずは連続性について:

<u>**定理**</u> M, N:距離空間とし,$f: M \to N$とする.このとき,以下は全て同値である:

1) fは連続($\varepsilon - \delta$条件).
2) Mにおける任意の収束列はfによってNの収束列にうつり,その極限は対応する極限にうつる(収束列保存性).
3) Nの閉集合は,f^{-1}によってMの閉集合にうつされる(閉集合条件).
4) Nの開集合は,f^{-1}によってMの開集合にうつされる(開集合条件).

本問ではf^{-1}の連続性を示したかったので,f^{-1}に対する閉集合条件「Mの閉集合Vは,$(f^{-1})^{-1} = f$によってNの閉集合にうつされる」を考えるというわけです.
次にコンパクト性:

<u>**定義(点列コンパクト)**</u> 距離空間Mの部分集合Aが点列コンパクトであるとは,Aの任意の点列がAの点に収束するような部分列を持つことである.

<u>**定義(被覆コンパクト)**</u> 距離空間Mの部分集合Aが被覆コンパクトであるとは,Aの任意の開被覆が有限部分被覆を持つことである.

距離空間において,これらは同値です.単に「コンパクト」という言葉を使うのには,このような理由があります.より一般的な「位相空間」という枠組みにおいては,点列コンパクト性は被覆コンパクト性の十分条件ですが,必ずしも必要条件ではありません.

ちなみに,本問の条件を満たすような写像を,同相写像(homeomorphism,略して homeo)と呼びます.

4. 次の問に答えよ.

(1) 次の主張において,Lipschitz 条件がない場合に結論が成立しない例を挙げ,その理由を述べよ:

$f: [a,b] \to \mathbb{R}$は Riemann 可積分関数,$\varphi: [c,d] \to [a,b]$は全単射かつφ^{-1}に対する Lipschitz 条件

$$^{\exists}K \geq 0 \text{ s.t. } ^{\forall}x, y \in [a,b], |\varphi^{-1}(x) - \varphi^{-1}(y)| \leq K|x-y|$$

を満たす関数とする.このとき,$f \circ \varphi$は Riemann 可積分である.

(2) $g: [-1,1] \to \mathbb{R}$を Riemann 可積分関数とし,関数$\psi: [0,2\pi] \to [-1,1]$を$\psi(x) = \sin x$と定める.(1)の主張を用いて,$g \circ \psi: [0,2\pi] \to \mathbb{R}$は Riemann 可積分関数であることを証明せよ.

(解)

(1) たとえば次のような例がある:

$$\begin{array}{rccc} f: & [0,1] & \to & [0,1] \subset \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & x, \end{array}$$

$$\varphi: \quad [0,1] \quad \to \quad [0,1]$$

$$\varphi(x) = \begin{cases} x, & x \in \mathbb{Q} \\ 1-x, & \text{otherwise} \end{cases}.$$

<u>理由</u> 明らかに$f \in \mathcal{R}$,かつφは全単射であるが,φは$x = \frac{1}{2}$以外の全ての$x \in [0,1]$で不連続である.つまり$f \circ \varphi = \varphi$の不連続点の集合は零集合ではなく,従って$f \circ \varphi \notin \mathcal{R}$.

(2) **(prf.)** $g \in \mathcal{R}$よりgは有界であるから,$g \circ \psi$も有界である.

$\forall \varepsilon > 0$をとる.$\psi'(x) = \cos x = 0$となる$x = \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi$を覆う開区間として,$I_1 = \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\varepsilon}{8}, \frac{\pi}{2} + \frac{\varepsilon}{8}\right), I_2 = \left(\frac{3}{2}\pi - \frac{\varepsilon}{8}, \frac{3}{2}\pi + \frac{\varepsilon}{8}\right)$をとる.また,$J_1 = \left[0, \frac{\pi}{2} - \frac{\varepsilon}{8}\right], J_2 = \left[\frac{\pi}{2} + \frac{\varepsilon}{8}, \frac{3}{2}\pi - \frac{\varepsilon}{8}\right], J_3 = \left[\frac{3}{2}\pi + \frac{\varepsilon}{8}, 2\pi\right]$とする.このとき$\psi$の$J_j\,(j = 1,2,3)$への制限$\psi_j$は全単射であって,$\exists K > 0$ s.t. $\forall x \in J_j, \left|{\psi_j}'(x)\right| \geq \frac{1}{K}$であるから,$\forall y \in \psi_j(J_j)$に対して

$$\left|\left({\psi_j}^{-1}\right)'(y)\right| = \left|\frac{1}{{\psi_j}'\left({\psi_j}^{-1}(y)\right)}\right| \leq K.$$

平均値の定理より

$$\forall y_1, y_2 \in \psi_j(J_j)\, \exists c \in (y_1 と y_2 の間)\ \text{s.t.}\ \left|{\psi_j}^{-1}(y_1) - {\psi_j}^{-1}(y_2)\right| = \left|\left({\psi_j}^{-1}\right)'(c)\right| |y_1 - y_2|$$

$$\leq K|y_1 - y_2|.$$

よって${\psi_j}^{-1}$は Lipschitz 条件を満たす.従って(1)の主張により,$g \circ \psi$は各J_j上で Riemann 可積分である.このとき Riemann-Lebesgue の定理により,$g \circ \psi$の不連続点全体の集合を$D(g \circ \psi)$と書くと,$D(g \circ \psi) \cap J_j$は零集合である.従って,ある開区間の族$\{X_i | i \in \mathbb{N}\}$が存在して

$$D(g \circ \psi) \cap \bigcup_{j=1}^{3} J_j \subset \bigcup_{i \in \mathbb{N}} X_i \ \& \ \sum_{i \in \mathbb{N}} |X_i| \leq \frac{\varepsilon}{2n}$$

が成り立つ.よって,開区間の族Υを

$$\Upsilon = \{I_1, I_2\} \cup \{X_i | i \in \mathbb{N}\}$$

により定めると,

$$D(g \circ \psi) \subset \bigcup_{U \in \Upsilon} U \ \& \ \sum_{U \in \Upsilon} |U| \leq 2 \cdot \frac{\varepsilon}{4} + n \cdot \frac{\varepsilon}{2n} = \varepsilon.$$

以上より,Riemann-Lebesgue の定理から,$g \circ \psi \in \mathcal{R}$.

★(1)について.連続性は Lipschitz 条件が成り立つための必要条件です.解答で与えたφは全単射で,その逆関数は$\varphi^{-1} = \varphi$を満たします.φはほとんど全ての点で不連続ですから,Lipschitz 条件を満たさないことは明らかです.φの全単射性および不連続性は,わざわざ示すほどでもないでしょう($x = \frac{1}{2}$においてのみ連続であることには注意しなければなりませんが).

(2)は,ψを「そこにおける制限の逆関数が Lipschitz 条件を満たす部分」と「マズい部分」とに分割し,「マズい部分」を十分狭くとることが point です.

5. $C^0([0,1],\mathbb{R})$は完備距離空間であることを証明せよ.ただし,$C_b([0,1],\mathbb{R})$が完備距離空間であることは用いてよい.さらに,$C^0([0,1],\mathbb{R})$の部分集合で,有界閉集合であるがコンパクトではない例を示し,その理由を述べよ.

(解) $C^0([0,1],\mathbb{R})$が完備距離空間であることの prf.

有界閉区間上の連続関数は有界であるから,$C^0([0,1],\mathbb{R})$は$C_b([0,1],\mathbb{R})$の部分集合である.また,$C^0([0,1],\mathbb{R})$の収束列$\{f_n\}$に対し,その収束先をfとすると,$C^0([0,1],\mathbb{R})$における収束は「関数列の一様収束」を意味したから,一様収束の連続性保存性により,fもまた連続となる.従って$C^0([0,1],\mathbb{R})$は閉集合である.

さて,$C^0([0,1],\mathbb{R})$の Cauchy 列を任意に選び,それを$\{g_n\}$とすると,$\{g_n\}$は特に完備距離空間$C_b([0,1],\mathbb{R})$の点列とみなすことができ,従って収束する.さらに,$C^0([0,1],\mathbb{R})$は閉であったから,その収束先は$C^0([0,1],\mathbb{R})$に含まれる.これは$C^0([0,1],\mathbb{R})$が完備距離空間であることに他ならない. (Q.E.D.)

$C^0([0,1],\mathbb{R})$の部分集合で,有界閉集合であるがコンパクトではない例

$$C_1^0([0,1],\mathbb{R}) = \{f \in C^0([0,1],\mathbb{R}) \mid \|f\| \leq 1\}.$$

理由 $C_1^0([0,1],\mathbb{R})$は有界閉であるが,点列$\{f_n\}$として$f_n(x) = x^n$を満たすものを選ぶ.このとき関数$f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$を

$$f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < 1; \\ 1, & x = 1 \end{cases}$$

によって定めると,$\forall x \in [0,1], \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$であるが,明らかに$f \notin C_1^0([0,1],\mathbb{R})$.よって$C_1^0([0,1],\mathbb{R})$は点列コンパクトでなく,従ってコンパクトでない.

★$[a,b]$上の有界(bounded)な関数全体からなる関数空間に,距離関数

$$d(f,g) = \sup\{|f(x) - g(x)| \mid x \in [a,b]\}$$

を導入して得られる距離空間を$C_b([a,b],\mathbb{R})$と書きます.$[a,b]$上の連続関数全体からなる集合に同じ距離関数を導入して得られる距離空間を$C^0([a,b],\mathbb{R})$とすると,有界閉区間上の連続関数の有界性により,$C^0([a,b],\mathbb{R})$は$C_b([a,b],\mathbb{R})$の部分集合になっています.この距離関数に関する収束が,$C^0([a,b],\mathbb{R})$ないし$C_b([a,b],\mathbb{R})$における点列を関数列とみなした場合の一様収束と同値であることは重要です.

本問では,$C^0([a,b],\mathbb{R})$の完備性を問われました.一般に距離空間Mが完備であるとは,Mの任意の Cauchy 列が収束することを言います.そして Cauchy 列とは

$$^\forall\varepsilon > 0\,^\exists N \in \mathbb{N}\ \mathrm{s.t.}\ n,m \geq N \Longrightarrow |x_n - x_m| < \varepsilon$$

を満たす列$\{x_n\}$のことでした.一般に完備距離空間の閉部分集合もまた完備距離空間となります.

以下オマケ.本問の後半で見たように,$C_1^0([0,1],\mathbb{R})$は有界閉集合であるのにもかかわらず,コンパクトではありません.収束部分列を持つことを保証する条件を記述するためには,次の「関数列の一様同程度連続性」なる概念を導入すると便利です:

定義(一様同程度連続) $C^0([a,b],\mathbb{R})$における関数列$\{f_n\}$が同程度連続であるとは,次の性質を満たすときをいう:

$$^\forall\varepsilon > 0\,^\exists\delta > 0\ \mathrm{s.t.}\ |s-t| < \delta\ \&\ n \in \mathbb{N} \Longrightarrow |f_n(s) - f_n(t)| < \varepsilon.$$

この概念を用いると,上に述べた条件は,次の定理のようにまとめることができます:

定理(Ascoli-Arzela の定理) $C^0([a,b],\mathbb{R})$における任意の有界かつ同程度連続な関数列は一様収束部分列を持つ.

…間違いなどあったら,お知らせください.

2010 年 8 月 7 日　　髙橋　一史