キムラのパーフェクトせんけいだいすう教室

こんにちは, 数学 II シケ対の木村です. タイトルは元ネタの分かる人以外はスルーで. 線型代数教室と銘打ってますが, 行列式とかは「単位が取れる〜」系の参考書に任せるとして, 今回は線型空間の話に絞って何か書きたいと思います. 全然パーフェクトじゃない可能性大ですが, 単位はくるんじゃないかなぁ. 保障はしません☆

1 線型空間

1.1 線型空間とは？

線型空間とは, 線型空間の定義を充たす集合のことです. …当然のことですが, これに尽きます. 条件を書くと,

集合 V が以下の条件を充たすとき,K 上の線型空間（K-線型空間）であるという. （K は $\mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$）

V の任意の 2 元 v_1, v_2 に対し, 2 元の和 $v_1 + v_2 \in V$ が定まり, また, V の任意の元 v に対し, K の元 λ との積 $\lambda v \in V$ が定まったとき, 任意の $v, v_1, v_2, v_3 \in V$ および $\lambda, \mu \in K$ に対し, 以下の (1)〜(8) が成り立つ.

(1) $(v_1 + v_2) + v_3 = v_1 + (v_2 + v_3)$

(2) $v_1 + v_2 = v_2 + v_1$

(3) $\exists o \in V, v + o (= o + v) = v$

(4) $\exists v' \in V, v + v' (= v' + v) = o$

(5) $(\lambda + \mu)v = \lambda v + \mu v,$

(6) $\lambda(v_1 + v_2) = \lambda v_1 + \lambda v_2,$

(7) $(\lambda\mu)v = \lambda(\mu v),$

(8) $1 \cdot v = v.$

以上が定義です. 「〜が K-線型空間であることを示せ」ときたら基本的にこれを確かめるよりありません.

1.2 取扱説明書

実際に証明を見てみましょうか. 以下 $M_{m,n}(K)$ が K-線型空間であることの証明です.
（解答）
$A = (a_{ij}), B = (b_{ij}), C = (c_{ij}) \in M_{m,n}(K), \lambda, \mu \in K$ とする.
行列の和を $A + B = (a_{ij} + b_{ij})$, K の元との積を $\lambda A = (\lambda a_{ij})$ で定めると,

(1) $(A + B) + C = ((a_{ij} + b_{ij}) + c_{ij}) = (a_{ij} + (b_{ij} + c_{ij})) = A + (B + C),$

(2) $A + B = (a_{ij} + b_{ij}) = (b_{ij} + a_{ij}) = B + A,$

(3) $a_{ij} = 0$ なる A を O とすると, 任意の A に対し $O + A = (0 + a_{ij}) = (a_{ij}) = A,$

(4) 任意の A に対し $A' = (-a_{ij})$ とすると, $A + A' = (a_{ij} + (-a_{ij})) = O,$

(5) $(\lambda + \mu)A = ((\lambda + \mu)a_{ij}) = (\lambda a_{ij} + \mu a_{ij}) = \lambda A + \mu A,$

(6) $\lambda(A + B) = (\lambda(a_{ij} + b_{ij})) = (\lambda a_{ij} + \lambda b_{ij}) = \lambda A + \lambda B,$

(7) $(\lambda\mu)A = ((\lambda\mu)a_{ij}) = (\lambda(\mu a_{ij})) = \lambda(\mu A),$

(8) $1 \cdot A = (1 \cdot a_{ij}) = (a_{ij}) = A.$

(1)〜(8) により, $M_{m,n}(K)$ は K-線型空間である. □

行列について (1)〜(8) の条件が成り立つことは自明のように思われるかもしれませんが,（ほぼ自明ですが）, たとえば $A+B$ と書いたときの" $+$ "は $M_{m,n}(k)$ に関する演算であり, $1+2$ などにおける K の演算" $+$ "とは異なる演算ですから, そこに注意する必要があります. 上の証明でも K に関する演算に帰着させてるとも思います.

似たような性質も持つために同じ記号を用いているのであって, 先に演算ありきです. まぁ理屈はこれくらいにして次に行きますか.

1.3 何がしたいのか？

「定義は良いけど何がしたいのか？」という話ですが, まぁ差し当たり定義を飲み込めば済む話ではありますが, これから線型空間というフィールドで色々こねくり回す上で, これくらい成り立ってないと困るくらいの理解で取り敢えず良いのでは. というかその辺は自分の理解も微妙なので勘弁を. ところで線型空間はベクトル空間ともいい, ベクトルというのは線型空間の任意の元です. 線型空間ありき, か.

2 部分線型空間

2.1 定義

V が K-線型空間で, V の部分集合 W もまた（V の演算により）K-線型空間であるとき, W を V の部分線型空間という. これは (1)〜(3) を充たすことと同値である.

(1) $W \neq \emptyset$,

(2) $w_1, w_2 \in W \Rightarrow w_1 + w_2 \in W$,

(3) $w \in W, \lambda \in K \Rightarrow \lambda w \in W$.

必ず「V の」とかが入ります. 講義では同値な条件のほうを定義にしていました. ちなみに線型空間より強い条件がより少ない手数で示されるのは, おそらく V が K-線型空間であることに因るんだろうと思います.

2.2 取説

08 年の過去問より, $\{ f \in \mathbb{R}[x] \mid f(-x) = f(x)\}$ が $\mathbb{R}[x]$ の部分線型空間であることを示す問題を取り上げます.
（解答）
$V = \{ f \in \mathbb{R}[x] \mid f(-x) = f(x)\}$ とおくと, $f(x) = 0$ について $f \in V$ より $V \neq \emptyset$.

$\forall f, g \in V, (f+g)(-x) = f(-x) + g(-x) = f(x) + g(x) = (f+g)(x)$ より $f+g \in V$,
$\forall f \in V, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda f(-x) = \lambda(f(-x)) = \lambda(f(x)) = \lambda f(-x)$ より $\lambda f \in V$.

従って V は $\mathbb{R}[x]$ の部分線型空間である. $\square$

まぁ定義どおりやりましょう. この辺の範囲はそれに尽きる気がします.

3 和空間, 直和

3.1 和空間とは

W_1, W_2 を V の部分線型空間とするとき, W_1 と W_2 の和空間を
$W_1 + W_2 = \{ w_1 + w_2 \mid w_1 \in W_1, w_2 \in W_2\}$
で定める. 別に和のテイストの安らぎの空間ではありません.

3.2 直和とは

$W_1, \dots, W_r$ を V の部分線型空間が, 以下の同値な条件（のいずれか）を充たすとき, $W_1 + \cdots + W_r$ は直和であるといい, $W_1 \oplus \cdots \oplus W_r$ で表す. （$W_1 \dotplus \cdots \dotplus W_r$ と書く流儀もある.）また, $W_1 \oplus \cdots \oplus W_r$ を $W_1, \dots, W_r$ の直和と呼ぶ.

(1) $\forall i \leq r, (W_1 + \cdots + W_{i-1} + W_{i+1} + \cdots + W_r) \cap W_i = \{o\}$,

(2) $\forall i \leq r, (W_1 + \cdots + W_{i-1}) \cap W_i = \{o\}\ (i \geq 2)$,

(3) $W_1 + \cdots + W_r$ の元を, $w_1 + \cdots + w_r, w_i \in W_i (i = 1, 2, \dots, r)$ と表す方法は一通りである.

(4) $0 \in W_1 + \cdots + W_r$ を $0 = w_1 + \cdots + w_r, w_i \in W_i (i = 1, 2, \dots, r)$ で表すと $\forall i, w_i = 0$ が成り立つ.

なんかギョッとしますが, $r = 2$ のときは何てことはなく, (1),(2) は $W_1 \cap W_2 = \{o\}$ を表します. ちなみに去年は $r = 3$ を扱う問題が出てますが. 試験では (1),(2) を覚えていれば多分充分. なお, $W_1 \oplus \cdots \oplus W_r$ を $W_1 \dotplus \cdots \dotplus W_r$ と書く流儀もあるようですが, 気にしなくていいと思います.

3.3 用法要領

演習問題問 6.6.3) の改題です. なお, $\langle v_1, \dots, v_n \rangle = \{\, \lambda_1 v_1 + \cdots \lambda_n v_n \mid \lambda_1, \dots, \lambda_n \in K \}$ です.

（問題）

$K[x]$ の部分空間 W_1, W_2 を $W_1 = \langle x^2 - 3x + 2 \rangle, W_2 = \langle x^2 - 4 \rangle$ とする.

このとき, $W_1 + W_2$ は直和であることを示し, $W_1 \oplus W_2$ を求めよ.

（解答）

$p \in W_1 \cap W_2$ について, $p = \lambda_1(x^2 - 3x + 2) = \lambda_2(x^2 - 4)$ なる $\lambda_1, \lambda_2 \in K$ が存在する.

係数を比較して $\begin{cases} \lambda_1 = \lambda_2 \\ -3\lambda_1 = 0 \\ 2\lambda_1 = -4\lambda_2 \end{cases} \quad \therefore \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \end{cases}$ より $p = 0$.

従って $W_1 \cap W_2 = \{0\}$. 故に $W_1 + W_2$ は直和である.$\square$

また, $W_1 \oplus W_2 = W_1 + W_2 = \left\{\, \lambda_1(x^2 - 3x + 2) + \lambda_2(x^2 - 4) \,\middle|\, \lambda_1, \lambda_2 \in K \right\}$

$= \{\, (x-2)((\lambda_1 + \lambda_2)x - \lambda_1 + 2\lambda_2) \mid \lambda_1, \lambda_2 \in K \} = \{\, (x-2)(\mu_1 x + \mu_2) \mid \mu_1, \mu_2 \in K \}$

$= \{\, f \in K_2[x] \mid f(2) = 0 \}$. ($\lambda_1 = \dfrac{2\mu_1 - \mu_2}{3}, \lambda_2 = \dfrac{\mu_1 + \mu_2}{3}$ と置換)

なお, $\lambda_1, \dots$ が K 全体を動くとき $\mu_1, \dots$ も K 全体を動くことをはっきりさせたいという意図で置換を明記しています. 実際の解答には要らない気もしますが,

$\left\{\, \lambda_1(x^2 - 3x + 2) + \lambda_2(x^2 - 4) \,\middle|\, \lambda_1, \lambda_2 \in K \right\} = \left\{\, (\lambda_1 + \lambda_2)x^2 - 3\lambda_1 x + (2\lambda_1 - 4\lambda_2) \,\middle|\, \lambda_1, \lambda_2 \in K \right\}$

$= \left\{\, \mu_1 x^2 + \mu_2 x + \mu_3 \,\middle|\, \mu_1, \mu_2, \mu_3 \in K \right\} = K_2[x]$.

などとしないように注意. λ_1, λ_2 が K 全体を動くとき μ_1, μ_2, μ_3 は K 全体を動きません（λ_1, λ_2 について解いてみよう）. まぁ2 変数で 3 変数を表せるわけないですよね.（このへんちょっとカオスか？）

4 線型写像

4.1 とは？

V, W を K-線型空間とする. 写像 $f : V \to K$ が K-線型写像であるとは, 条件

(1) $\forall v_1, v_2 \in V, f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2)$,

(2) $\forall v \in V, \lambda \in K, f(\lambda v) = \lambda f(v)$.

が成り立つことをいう. 「期待値の和は和の期待値」とかも何かこんな感じでしたね.

4.2 というわけで

問題です. 懐かしの演習問題 1.8. の改題です.
（問題）
$z \in \mathbb{C}$ に対し, 写像 $f_z : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ を $f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{re}\ z(x_1 + \sqrt{-1}x_2) \\ \mathrm{im}\ z(x_1 + \sqrt{-1}x_2) \end{pmatrix}$ で定める.
このとき, f_z は $\mathbb{R}$-線型写像であることを示せ.
（解答）
$x_1, x_2 \in \mathbb{R}^2$ を $x_1 = \begin{pmatrix} s_1 \\ t_1 \end{pmatrix}, x_2 = \begin{pmatrix} s_2 \\ t_2 \end{pmatrix}$ とおくと,

$$\begin{aligned} f(x_1) + f(x_2) &= \begin{pmatrix} \mathrm{re}\ z(s_1 + \sqrt{-1}t_1) + \mathrm{re}\ z(s_2 + \sqrt{-1}t_2) \\ \mathrm{im}\ z(s_1 + \sqrt{-1}t_1) + \mathrm{re}\ z(s_2 + \sqrt{-1}t_2) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \mathrm{re}\ z\{(s_1 + s_2) + \sqrt{-1}(t_1 + t_2)\} \\ \mathrm{im}\ z\{(s_1 + s_2) + \sqrt{-1}(t_1 + t_2)\} \end{pmatrix} = f_z(x_1 + x_2). \end{aligned}$$

また, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ とすると,
$f(\lambda x) = \begin{pmatrix} \mathrm{re}\ z(\lambda x_1 + \lambda\sqrt{-1}x_2) \\ \mathrm{im}\ z(\lambda x_1 + \lambda\sqrt{-1}x_2) \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} \mathrm{re}\ z(x_1 + \sqrt{-1}x_2) \\ \mathrm{im}\ z(x_1 + \sqrt{-1}x_2) \end{pmatrix} = \lambda f_z(x).$
従って f_z は $\mathbb{R}$-線型写像である. □

5 その他

この辺から手抜…急ぎ足で. 大事そうな事項を pick up.

5.1 表現行列, 行列表示

$f : K^n \to K^m$ を線型写像とするとき, $A \in M_{m,n}(K)$ が唯一つ存在して, $\forall v, Av = f(v)$ が成り立つ. この A を f の表現行列と呼び, f の表示（表現）を f の行列表示という. 昨年の過去問で問われています.

5.2 恒等写像, 同型写像

V を集合とする. $v \in V$ に対し $f(v) = v$ なる写像 f を（V の）恒等写像と呼び, id_V などで表す.
要は「何もしないという操作」です.

W, V を K-線型空間, $f : V \to W$ を K-線型写像とする. K-線型写像 $g : W \to V$ であって, $g \circ f = \mathrm{id}_V, f \circ g = \mathrm{id}_W$ が成り立つものが存在するとき, f は K-線型同型写像であるといい, V と W は K-線型同型であるという.
V と W は K-線型同型であることを $V \cong W$ と表します. たとえば $\mathbb{R}_n[x] \cong \mathbb{R}^{n+1}$ です.
ただし $\mathbb{R}_n[x]$ は高々n 次の多項式の集合です.

5.3 次元

K-線型空間 V について, $V \cong K^n$ が成り立つとき, n を V の（K 上の）次元といい, $\dim_V$ であらわす.

おそらく基底というものを使って定義することが多いと思うのですが, これも同値な定義です.

6 独り言

かつて作ったものを全力で使い回しながらお送りしましたが, このシケプリで何かの役に立ったならば幸いです. 深夜のテンションで作ってるのでミス等があればお知らせください. 頑張りましょう！