（駒場で）不可になって何が悪い！　〜 ホンゴー！ホンゴー！ 〜

こんにちは, 数学 II シケ対の木村です. 例によってタイトルだけネタです. 筆者は熱力学で不可りましたが何か.
前回のシケプリにおいて手を抜いた部分（あんなに出ると思わなかったので...）の補足 $+\alpha$ です.
夏学期の復習または追試験対策（？）などにご利用ください.

1　恒等写像, 同型写像,

1.1　恒等写像

V を集合とする. $v \in V$ に対し $f(v) = v$ なる写像 $f : V \to V$ を（V の）恒等写像と呼び, id_V などで表す.

要は「何もしないという操作」です. 同型写像の定義に必要なので載せてます.

1.2　同型写像

W, V を K-線型空間, $f : V \to W$ を K-線型写像とする. K-線型写像 $g : W \to V$ であって, $g \circ f = \mathrm{id}_V$, $f \circ g = \mathrm{id}_W$ が成り立つものが存在するとき, f は K-線型同型写像であるといい, V と W は K-線型同型であるという.

V と W は K-線型同型であることを $V \cong W$ と表します. たとえば $\mathbb{R}_n[x] \cong \mathbb{R}^{n+1}$ です.
ただし $\mathbb{R}_n[x]$ は高々 n 次の多項式の集合です. 一応示しときましょうか. 演習問題 7.3.1) と同じ問題です.

（証明）

$\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in R^{n+1}$ に対し, $f : R^{n+1} \to R_n[x]$ を $f \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ で定め, また $p \in R_n[x]$ に対し,

$a_n = \{p$ の x^n の係数 $\}$ とするとき, $f' : R_n[x] \to R^{n+1}$ を $f'(p) = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ で定めると, f, f' は K-線型写像であって,

$f \circ f' = \mathrm{id}_{R_n[x]}$, $f' \circ f = \mathrm{id}_{R^{n+1}}$ より f は K-線型同型写像である. $\therefore \mathbb{R}_n[x] \cong \mathbb{R}^{n+1}$. $\square$

※ f, f' が線型写像であることは, それぞれ各成分と各係数についての K の演算なのでほぼ自明だと思うので, 言及するのみに留めましたがどうなんでしょう.

※たとえば $f \circ f'(p) = f \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n = p$ より $f \circ f' = \mathrm{id}_{R_n[x]}$ であることは多分大丈夫だと思うのですが. 一応各自確かめましょう.
※「線型写像 f が全単射のとき, f は線型同型写像である」という性質を使う問題が試験に出ました. 証明など詳しいことは講義における定理 4.4.15 を参照.

2　次元

K-線型空間 V について, $V \cong K^n$ が成り立つとき, n を V の（K 上の）次元といい, $\dim V$ であらわす.

基底（多分冬学期で学ぶ）の含むベクトルの個数で定義することも多いです. 要は「自由度」みたいなものです.
（例）
上述の証明より $\mathbb{R}_n[x] \cong \mathbb{R}^{n+1}$ なので $\dim \mathbb{R}_n[x] = n + 1$ である.

※例が手抜きな感がありますが, 「V の次元を求める」→「$V \cong K^n$ を示す」なのですることは上と一緒です.

3　練習問題

これ 1 問で夏学期の復習が出来る！（誇大広告）ということで作ってみました.

やや難しい（というかメンドウ）かもしれない. 但し足助氏の試験同様 $\mathbb{R}$ 上の線型空間について考えます.

問. $P \in M_2(\mathbb{R})$ に対し, $M_2(\mathbb{R})$ の部分集合 W, V_P を次のように定める.

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \middle| \lambda \in \mathbb{R} \right\}, V_P = \{ A \in M_2(\mathbb{R}) \mid AP \in W \}$$

次の問いに答えよ.

1) V_P は $M_2(\mathbb{R})$ の部分線型空間であることを示せ.

2) $V_P \oplus V_Q = M_2(\mathbb{R})$ であるような $P, Q \in M_2(\mathbb{R})$ の例を 1 組挙げよ.

3) 以下の場合について V_P の次元を求めよ.

i) $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$

ii) $P = O$

iii) $P \neq O, P \notin \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$

（解答は次ページ）

3) の iii) 以外は標準題と思われます. ところで, $\dim W_1 + \dim W_2 = \dim (W_1 + W_2) + \dim (W_1 \cap W_2)$ という定理があり（多分冬学期で習う）, それと 3) の結果を用いると, 2) の P, Q が充たすべき必要条件が分かります.
あと, 3) の iii) は解答において何やら技巧的なことをやっていますが, それは場合分けを減らす為であり, 地道に場合分けしても良いと思います. 面倒ですが. もっと簡単な解答があれば教えてください.

4　言い訳

シケプリで手を抜いてた同型写像とか次元とかが試験では結構出ちゃいましたね. ごめんなさい. 過去問見る限りあまり出ないと思ったのですが... 多分去年より範囲が広いんですね. うーむ.

「試験前にやれ」という声が今にも聞こえてきそうですが, 前回シケプリにも載せてない訳じゃないので勘弁してください. まぁやれば単位はきたと思うのですが...「見たけど不可った」と言われても保証しかねますが.

周囲の成績状況を見る限り, 足助氏はそんなに鬼教官でも無い気がしてきた今日この頃. まぁ授業スピードは相変わらずだと思いますが. では冬学期も頑張りましょう！(多分板書を写すより話を聞くほうに集中するのが吉）

（練習問題の解答）

1) $OP=O\in W$ より $O\in V_P$ であるから, $V_P\neq\emptyset$.

$A,B\in V_P$ に対し, $AP=\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \alpha\end{pmatrix}\in W, BP=\begin{pmatrix}\beta & 0\\ 0 & \beta\end{pmatrix}\in W$ と置くと,

$\forall A,B\in V_P, (A+B)=AP+BP=\begin{pmatrix}\alpha+\beta & 0\\ 0 & \alpha+\beta\end{pmatrix}\in W, \therefore A+B\in V_P.$

$\forall A\in V_P, \forall\mu\in\mathbb{R}, (\mu A)P=\mu(AP)=\begin{pmatrix}\mu\alpha & 0\\ 0 & \mu\alpha\end{pmatrix}\in W, \therefore \mu A\in V_P.$

従って V_P は $M_2(\mathbb{R})$ の部分線型空間である. $\square$

2) $A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ とおく. $P=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}, Q=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ とすれば,

$AP=\begin{pmatrix}a & 0\\ c & 0\end{pmatrix}\in W\Leftrightarrow a=c=0$, $BP=\begin{pmatrix}0 & b\\ 0 & d\end{pmatrix}\in W\Leftrightarrow b=d=0$ より,

$V_P=\left\{\begin{pmatrix}0 & b\\ 0 & d\end{pmatrix}\,\middle|\, b,d\in\mathbb{R}\right\}, V_Q=\left\{\begin{pmatrix}a & 0\\ c & 0\end{pmatrix}\,\middle|\, a,c\in\mathbb{R}\right\}.$

$\therefore V_P\cap V_Q=\left\{\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\,\middle|\, a=b=c=d=0\right\}=\{O\}, \left\{\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\,\middle|\, a,b,c,d\in\mathbb{R}\right\}=M_2(\mathbb{R}).$

従って $V_P\oplus V_Q=M_2(\mathbb{R})$ となり確かに成り立つ.

3) i) $AP=\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}\Leftrightarrow A=\lambda P^{-1}$ より $V_P=\left\{\lambda P^{-1}\,\middle|\,\lambda\in\mathbb{R}\right\}$. $\therefore \underline{\dim V_P=1}$.

ii) $\forall A\in M_2(\mathbb{R}), AP=O\in W$ より, $V_P=M_2(\mathbb{R})$. $\dim M_2(\mathbb{R})=4$ であるから, $\underline{\dim V_P=4}$.

iii) $A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}, P=\begin{pmatrix}p & q\\ r & s\end{pmatrix}$ とおく. $\det P=ps-qr=0$ である.

$$AP=\begin{pmatrix}ap+br & aq+bs\\ cp+dr & cq+ds\end{pmatrix}\in W\Leftrightarrow\begin{cases}aq+bs=0\\ cp+dr=0\\ ap+br=cq+ds\end{cases}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}q & s & 0 & 0\\ 0 & 0 & p & r\\ p & r & -q & -s\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\ b\\ c\\ d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}.$$

ここで $P\neq O$ より, p,q,r,s の少なくとも 1 つは 0 でない. また,

$$\begin{pmatrix}q & s & 0 & 0\\ 0 & 0 & p & r\\ p & r & -q & -s\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\ b\\ c\\ d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}s & q & 0 & 0\\ 0 & 0 & r & p\\ r & p & -s & -q\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b\\ a\\ d\\ c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}p & r & 0 & 0\\ 0 & 0 & q & s\\ q & s & -p & -r\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c\\ d\\ a\\ b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$

より,(p,q) と (r,s), および (p,r) と (q,s) の役割を入れ替えることが出来る.
従って適宜役割を入れ替えることにより, $q\neq 0$ であるとしてよい.

$p=0$ のとき $qr=0, q\neq 0$ より $r=0$ である. これを方程式に戻すと, $\begin{cases}aq+bs=0\\ cq+ds=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-bs/q\\ c=-ds/q\end{cases}$.

$\therefore V_P=\left\{\begin{pmatrix}-\lambda s/q & \lambda\\ -\mu s/q & \mu\end{pmatrix}\,\middle|\,\begin{pmatrix}\lambda\\ \mu\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2\right\}.$

$p\neq 0$ のとき, 与式の拡大係数行列を基本変形して,

$$\begin{pmatrix}q & s & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & p & r & 0\\ p & r & -q & -s & 0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & s/q & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & p & r & 0\\ 0 & (qr-ps)/q & -q & -s & 0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & s/q & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & r/p & 0\\ 0 & (qr-ps)/q & 0 & (qr-ps)/p & 0\end{pmatrix}.$$

$qr-ps=0$ であったから, これを方程式に戻すと, $\begin{cases}a+bs/q=0\\ c+dr/p=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-bs/q\\ c=-dr/p\end{cases}$.

$\therefore V_P=\left\{\begin{pmatrix}-\lambda s/q & \lambda\\ -\mu r/p & \mu\end{pmatrix}\,\middle|\,\begin{pmatrix}\lambda\\ \mu\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2\right\}$. 従って $\underline{\dim V_P=2}$.