# 基礎統計 (安藤) 過去問・解答例 2009〜2011

2011 年度入学理科一類 4 組

平成 23 年 8 月 9 日

## はじめに

これは、安藤雅和教官による基礎統計の、2009〜2011 年度の期末試験の問題・解答例をまとめたものです。2010 年の解答例は 2011 年度理科一類 22 組作成の解答例を参考にしました。また、2009 年の解答例は作成者は分かりませんでしたが、「あるシケ対の解答」と冒頭にある.jpg 形式の解答例を参考にしました。作成者の承諾無く解答例を利用したことを謝罪しますとともに、この場を借りて素晴らしい解答例を公開してくださったことに感謝いたします。

ところで、安藤雅和教官は 2009 年度から基礎統計の講義を持っています。2009 年度の試験はテキストのみ持ち込み可、電卓 (関数電卓以外) の使用が認められていましたが、2010 年度からはどちらも認められていません。2010 年度に問題が難化したことから、2009 年度の試験が簡単すぎたのでしょう。

指定教科書は 2009 年度が統計学入門 (東京大学教養学部統計学教室)、2010・2011 年度が入門基礎統計 (倉田博史・星野崇宏) です。従って、2009 年の試験は入門基礎統計の範囲外の問題も多少含まれています。

毎年知識問題やちょっとした計算の小問集合が 1 題出されており、特に第 1 種の誤りと第 2 種の誤り、サイコロの期待値・分散については毎年ほとんど同じ問題が出ています。また、2011 年度はちょっとした証明や、ポアソン分布の確率関数など比較的難しい内容も出ました。なお、解答例についているページ番号は、教科書「入門統計解析」の該当ページです。

また、2 次元離散型確率分布について、$t$ 検定と $\chi^2$ 検定、正規分布の標本平均に関する確率問題が毎年出題されています。2010 年度、2011 年度では 2 標本問題についての問題も出されています。これらの中には、ほとんど同じ題材が数年続けて出ているものも見受けられます。

証明問題も 2009 年度は指数分布の無記憶性、2010・2011 年度は不偏標本分散の不偏性が出されており、今後も 1 題程度出されることが予想されます。

試験問題には毎年標準正規分布 (とその逆関数)、$t$ 分布、$\chi^2$ 分布の確率表がついています。有効数字は 2009・2010 年度は標準正規分布が小数第 5 位 (逆関数は第 4 位) まで、$t$ 分布が小数第 3 位まで、$\chi^2$ 分布が小数第 5 位まで、2011 年度は標準正規分布が小数第 4 位 (逆関数も第 4 位) まで、$t$ 分布が小数第 3 位まで、$\chi^2$ 分布が小数第 2 位まで記載されています。巻末の表は 2011 年度のもので、標準正規分布は講義資料として公開されたもの、$t$ 分布と $\chi^2$ 分布は教科書「入門基礎統計」のサポートページで公開されているものです。

間違いや不十分な説明が見受けられると思いますが、後輩の皆様の試験勉強に役立てていただければ幸いです。

# 2009年度問題

**問題 1**

次の文章の空欄を埋めよ.

- 東京都内の各区の飲食店数と金融機関店舗数には $\boxed{\text{(1)}}$ 関係が見られる.
- 同じ硬貨を続けて 13 回投げたとき, ちょうど 5 回表が出る場合の数は $\boxed{\text{(2)}}$ 通りである.
- さいころを投げて出た目の数を $X$ とする. そのとき, 確率変数 $3X-1$ の期待値は $\boxed{\text{(3)}}$ であり, 分散は $\boxed{\text{(4)}}$ である.
- 母平均 $\mu$ や母分散 $\sigma^2$ のような母集団の特徴を表す値を $\boxed{\text{(5)}}$ と呼ぶ. そして, 母集団の $\boxed{\text{(5)}}$ についての推測のために標本から求められるものを $\boxed{\text{(6)}}$ という. また, $\boxed{\text{(6)}}$ の確率分布を $\boxed{\text{(7)}}$ と呼ぶ.(編者注:(5) は入門統計解析 (倉田博史・星野崇宏) の範囲外)
- 仮説 $H_0$ が偽であるにもかかわらず, $H_0$ が採択される誤りを $\boxed{\text{(8)}}$ という. 一方, 仮説 $H_0$ が真で, 対立仮説 $H_1$ が偽であるにもかかわらず, $H_0$ が棄却される誤りは $\boxed{\text{(9)}}$ と呼ばれる.
- 5 セットマッチ (3 セット先取で勝ち) のテニス (編者注:シングルテニス) において, 4 セット目で試合が終わる確率は $\boxed{\text{(10)}}$ である.

**問題 2**

公正なサイコロを 2 回 (独立に) 投げ, 出た目に応じて値が変わる, 確率変数 $X, Y$ を考える. まず, サイコロ投げの 1 回目は, 偶数の目が出たら $X=-2$ とし, 奇数の時は $X=1$ の値をとることにする. 次に, $X=1$ の場合で 2 回目のサイコロの目の数が 1 と 5 なら $Y=-1$, それ以外は $Y=2$ とし, $X=-2$ の場合は, 2 回目が 3 以上なら $Y=-1$, それ以外は $Y=3$ の値をとることにする.

(1)2 変数の同時確率分布を示せ　(2)$X$ と $Y$ の期待値 (平均) をそれぞれ求めよ
(3)$X$ と $Y$ の分数をそれぞれ求めよ　(4) 積 $XY$ の期待値を求めよ
(5)$X$ と $Y$ の相関関係を求めよ

**問題 3**

3-1 いま, 3 つの工程 (A,B,C とする) で製造される製品があるとする. 各工程の作業内容は互いに関連はないが, B 工程は, A 工程で製造された部品を元に作業が進められるものとする. ただし, その際の受け渡しの時間はかからないものとし, 間断なく続けられるものとする. C 工程は独自に部品を製造し, B 工程の部品と組み合わせて製品が完成するものとする.
A 工程, B 工程, C 工程ではそれぞれ, 平均作業時間が 20 分, 30 分, 46 分であり, 標準偏差は 3 分, 4 分, 8 分であることが分かっているものとする. 正規分布を仮定すると, B 工程までの工程にかかる平均所要時間よりも短い時間ですむ C 工程の割合はいくらか. そして, C 工程の平均所要時間よりも長く時間がかかる B 工程までの工程の割合はいくらか.

3-2 確率変数 $X$ が指数分布に従うとき, $P(X>a+b|X>a)=P(X>b)$(編者注:ただし $a, b>0$) が成り立つことを示せ.

**問題 4**

東京の 2009 年 4 月 1 日から 15 日までの最低気温は次の通りである (出典:気象庁). 以下，正規母集団を仮定する.

`5.7, 5.4, 7.2, 9.4, 10.3, 10.5, 11.3, 12.0, 12.9, 14.6, 13.3, 12.1, 14.4, 15.1, 15.3`(°C)

i) 母平均 $\mu$ の信頼係数 95% の信頼区間を求めよ.

ii) 母分散 $\sigma^2$ の信頼係数 90% の信頼区間を求めよ.

iii) さらに，大阪の同期の最低気温は次の通りであった.

`6.4, 5.2, 4.6, 9.4, 9.5, 6.1, 9.2, 10.0, 10.2, 11.6, 12.9, 14.6, 15.1, 15.4, 13.7`(°C)

東京 (1) と大阪 (2) の最低気温差 $\mu \equiv \mu_1 - \mu_2$ の 99% 信頼区間を作れ. なお，2 つの母分散は等しいと仮定せよ.

**問題 5**

5-1 20 歳の男子大学生の身長は，全国では平均 170.9cm，標準偏差が 6cm の正規分布に従っているとする．いま，ある大学で 10 人の生徒を無作為に抽出して身長を調べたら，平均値が 174.8cm であった (標準偏差は全国と同じであるとする)．このとき，この大学の男子学生の身長の平均値は全国平均と同一であるとみなしてよいか. 適当に帰無仮説を設定して，有意水準 5% の棄却域を作り，検定によって検証してみよ.

5-2 上記の問で，標本抽出した 10 名の男子学生の身長の標準偏差を，標本から求めた値 (標本分散の平方根)6cm とした場合，全国平均と同一であるとみなしてよいか. 有意水準 5% の棄却域を作り，検定によって検証してみよ.

# 2009年度解答例

**問題 1**

(1) 見かけ上の相関 (p.91)

(2) ${}_{13}C_5 = 1287$

(3) $E(X) = (1+2+3+4+5+6)/2 = 7/2$ より，$E(3X-1) = 3E(X) - 1 = 19/2$

(4) $V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 35/12$ より，$V(3X-1) = 3^2 V(X) = 105/4$

(5) 母数

(6) 統計量 (p.199)

(7) 標本分布 (p.199)

(8) 第 2 種の誤り (p.249)

(9) 第 1 種の誤り (p.249)

(10) どちらが勝つかが 2 通りだから，$\dfrac{2 \cdot {}_3C_1}{2^4} = \dfrac{3}{8}$

**問題 2**

(1) サイコロの出る目の表を書くことにより

| | | $Y$ | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | $-1$ | $2$ | $3$ | $f_X(x)$ |
| $X$ | $-2$ | $\frac{1}{3}$ | $0$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{2}$ |
| | $1$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{3}$ | $0$ | $\frac{1}{2}$ |
| | $f_Y(y)$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{6}$ | $1$ |

ただし $f_X(x), f_Y(y)$ は周辺確率分布で (2) 以降で使用するためのものである.

(2) $E(X) = -2 \cdot \dfrac{1}{2} + 1 \cdot \dfrac{1}{2} = -\dfrac{1}{2}$

$E(Y) = -1 \cdot \dfrac{1}{2} + 2 \cdot \dfrac{1}{3} + 3 \cdot \dfrac{1}{6} = \dfrac{2}{3}$

(3) $V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \dfrac{5}{2} - \left(-\dfrac{1}{2}\right)^2 = \dfrac{9}{4}$

$V(Y) = E(Y^2) - E(Y)^2 = \dfrac{10}{3} - \left(\dfrac{2}{3}\right)^2 = \dfrac{26}{9}$

(4) $E(XY) = (-2) \cdot (-1) \cdot \dfrac{1}{3} + 1 \cdot (-1) \cdot \dfrac{1}{6} + 1 \cdot 2 \cdot \dfrac{1}{3} - 2 \cdot 3 \cdot \dfrac{1}{6} = \dfrac{1}{6}$

(5) 共分散 $C(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$ より，

$\rho_{XY} = \dfrac{C(X,Y)}{\sqrt{V(X)V(Y)}} = \dfrac{1}{\sqrt{26}}$

**問題 3**

A,B,C 工程でかかる時間を確率変数 $A, B, C$ で表す.

3-1 前半 $P(C < 50)$ を考えればよい.

$C \sim N(46, 8^2)$ より $Z = \dfrac{C-46}{8} \sim N(0.1)$ である. よって,

$$\begin{aligned} P(C<50) &= P\left(Z < \frac{50-46}{8}\right) = P(Z < 0.5) = 1 - P(Z > 0.5) \\ &= 1 - 0.30854 = 0.69146 \end{aligned}$$

3-1 後半 $P(A + B > 46)$ を考えればよい.

$C \sim N(20 + 30, 3^2 + 4^2) = N(50, 5^2)$ より $Z = \dfrac{A+B-50}{5} \sim N(0.1)$ である. よって,

$$\begin{aligned} P(A+B>46) &= P\left(Z > \frac{46-50}{5}\right) = P(Z > -0.8) = P(Z < 0.8) = 1 - P(Z > 0.8) \\ &= 1 - 0.21186 = 0.78814 \end{aligned}$$

3-2 $t > 0$ において $P(x > t) = e^{-\lambda t}$ より,

$$\begin{aligned} P(X > a+b | X > a) &= \frac{P(X > a+b \cap X > a)}{P(X > a)} = \frac{P(X > a+b)}{P(X > a)} \\ &= \frac{e^{-\lambda(a+b)}}{e^{-\lambda a}} = e^{-\lambda b} = P(X > b) \end{aligned}$$

**問題 4**

東京の気温を $X_i (1 \le i \le 15)$ とすると, 標本平均 $\bar{X} = 169.5/15 = 11.3$, 不偏標本分散は,

$s^2 = \dfrac{15}{14}S^2 = \dfrac{15}{14}\left(\dfrac{1}{15}\displaystyle\sum_{i=1}^{15} X_i^2 - \bar{X}^2\right) = 147.30 - \dfrac{15}{14}\cdot 11.3 = 10.49$ となる.

i) $t = \dfrac{11.3-\mu}{\sqrt{10.49/15}} \sim t(14)$ より, $P(-2.145 \le t \le 2.145) = 0.95$

よって信頼区間は $\left[11.3 \pm 2.145\sqrt{\dfrac{10.49}{15}}\right] \approx [9.5062, 13.0938] \approx [9.506, 13.094]$

ii) $Y = \dfrac{14 \cdot 10.49}{\sigma^2} \sim \chi^2(14)$ より, $P(6.57063 \le Y \le 23.6848) = 0.90$

よって信頼区間は $\left[\dfrac{14\cdot 10.49}{23.68479}, \dfrac{14\cdot 10.49}{6.57063}\right] \approx [6.2006, 22.3509] \approx [6.200, 22.351]$

iii) $\bar{X}_2 = 10.26, s_2^2 = 12.974$ であるから,

プールされた分散は $s^2 = \dfrac{1}{15+15-2}\left(\dfrac{10.49}{14} + \dfrac{12.974}{14}\right) = 11.732$

従って, $t = \dfrac{11.3 - 10.26 - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{11.732\left(\frac{1}{15} + \frac{1}{15}\right)}} \sim t(28)$

$P(-2.763 \le t \le 2.763) = 0.95$ であるから, 信頼区間は

$$\left[11.3 - 10.26 \pm 2.763\sqrt{11.732\left(\frac{1}{15} + \frac{1}{15}\right)}\right] \approx [-2.4157, 4.4957] \approx [-2.416, 4.496]$$

**問題 5**

5-1 この大学の身長の平均値を $\mu$ として，帰無仮説 $H_0 : \mu = 170.9$，対立仮説 $H_1 : \mu \neq 170.9$ と置く．このとき，

$$T = \frac{174.8 - 170.9}{\sqrt{6^2/10}} \approx 2.055 \sim N(0,1)$$

ここで棄却域は $T < -1.960, T > 1.960$ より，$H_0$ は棄却される．従って，この大学の男子学生の身長の平均値は全国平均と異なる．

5-2 今度は $T \sim t(9)$ が成り立つから，棄却域は $t < -2.262, t > 2.262$ である．よって $H_0$ は棄却されないから，この大学の男子学生の身長の平均は全国平均と同一とみなしてよい．

# 2010年度問題

**問題 1**

次の文章の空欄を埋めよ．

- $X$ が連続型確率分布を持つとき，$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx$ における関数 $f(x)$ を $\boxed{\quad (1) \quad}$ という．
- 最初の成功 S が出現するまでの試行回数を $X$ とすると，$X$ は $\boxed{\quad (2) \quad}$ 分布に従う．成功の確率を $p$ とすると，$X$ の期待値は $\boxed{\quad (3) \quad}$ であり，分散は $\boxed{\quad (4) \quad}$ である．
- 同じ硬貨を続けて 13 枚投げたとき，ちょうど 6 回表が出る場合の数は $\boxed{\quad (5) \quad}$ 通りである．
- サイコロを投げて出た目の数を $X$ とする．そのとき，確率変数 $6X - 4$ の期待値は $\boxed{\quad (6) \quad}$ であり，分散は $\boxed{\quad (7) \quad}$ である．
- 仮説 $H_0$ が真で，対立仮説 $H_1$ が偽であるにもかかわらず $H_0$ が棄却される誤りは $\boxed{\quad (8) \quad}$ と呼ばれる．一方，仮説 $H_0$ が偽であるにもかかわらず，$H_0$ が採択される誤りを $\boxed{\quad (9) \quad}$ という．
- ヒストグラムを読み解くポイントを答えなさい $\boxed{\qquad (10) \qquad}$

**問題 2**

公正なサイコロを 2 回 (独立に) 投げ，出た目に応じて値が変わる，確率変数 $X, Y$ を考える．具体的には，出た目の数をそれぞれ $D^{(1)}, D^{(2)}$ とするとき，2 つの目の和 $(D^{(1)} + D^{(2)})$ が偶数のとき $X = -2$，奇数のとき $X = 1$ とし，差の絶対値 $(|D^{(1)} - D^{(2)})$ が 2 以下のとき $Y = -1$，3 以上のとき $Y = 1$ とする．このとき，次の問いに答えよ．

| | |
|---|---|
| (2-1)2 変数の同時確率分布を示せ | (2-2)$X$ と $Y$ の期待値 (平均) をそれぞれ求めよ |
| (2-3)$X$ と $Y$ の分散をそれぞれ求めよ | (2-4) 積 $XY$ の期待値を求めよ |
| (2-4)$X$ と $Y$ の相関係数を求めよ | (2-6) 独立or従属，どちらでしょうか？ |

**問題 3**

$n$ 個の確率変数 $X_1, \cdots, X_n$ が互いに独立に同一の分布 $F$ に従っているとする．分布 $F$ の平均は $\mu$，分散は $\sigma^2$ であるとする．このとき，不偏分散 $s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$ について $E(s^2) = \sigma^2$ が成り立つことを証明せよ．

**問題 4**

いま，3 つの工程 (A,B,C とする) を経て製造される製品があるとする．各工程の作業内容は互いに関連はないが，B 工程は，A 工程で製造された部品を元に作業が進められるものとする．ただし，その際の受け渡しの時間はかからないものとし，間断なく続けられるものとする．C 工程は独自に部品を製造し，B 工程の部品と組み合わせて製品が完成するものとする．

A 工程，B 工程，C 工程ではそれぞれ，平均作業時間が 10 分，20 分，17 分であり，標準偏差は 5 分，12 分，10 分であることが分かっているものとする．正規分布を仮定すると，

(4-1) B 工程までの工程にかかる平均所要時間よりも短い時間ですむ C 工程の割合はいくらか.

(4-2) C 工程の平均所要時間よりも長く時間がかかる B 工程までの工程の割合はいくらか.

ただし，数値結果は小数点下 5 桁目まで記述せよ.

**第 5 問**

ある工程の作業時間を計測したところ次のデータを得た. 以下，正規母集団を仮定する.
2　3　4　2　3　1　2　3　2　1（分）

(5-1) 母平均 $\mu$ の信頼係数 95% の信頼区間を求めよ.

(5-2) 母分散 $\sigma^2$ の信頼係数 90% の信頼区間を求めよ.

ただし，数値結果は小数点下 3 桁目まで記述せよ.

**第 6 問**

6-1 20 歳の男子大学生の身長は，全国では平均 170.8cm，標準偏差が 6cm の正規分布に従っているとする．いま，ある大学で 9 人の生徒を無作為に抽出して身長を調べたら，平均値が 174.9cm であった (標準偏差は全国と同じであるとする)．このとき，この大学の男子学生の身長の平均値は全国平均と同一であるとみなしてよいか. 適当に帰無仮説を設定して，有意水準 5% の棄却域を作り，検定によって検証してみよ.

6-2 上記の問いで，標本抽出した 9 名の男子学生の身長の標準偏差を，標本から求めた値 (標本分散の平方根)6cm とした場合，全国平均と同一であるとみなしてよいか. 有意水準 5% の棄却域を作り，検定によって検証してみよ.

**第 7 問**

母集団分布が $N(\mu_1, \sigma_1^2)$，$N(\mu_2, \sigma_2^2)$ である二つの正規母集団分布から個別に二つの標本 $X_1, X_2, \cdots, X_m$ と $Y_1, Y_2, \cdots Y_n$ を抽出したときの，母平均の差 $\mu_1 - \mu_2$ の区間推定について考える．ただし，$\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$ とする.

- 母平均の差の信頼区間を示せ.

# 2010年度解答例

**問題 1**

(1) 確率密度関数 (p.146)

(2) 幾何 (p.141)

(3) $\dfrac{1}{p}$ (p.141)

(4) $\dfrac{1-p}{p^2}$ (p.141)

(5) ${}_{13}C_6 = 1716$

(6) $E(X) = (1+2+3+4+5+6)/2 = 7/2$ より，$E(6X-4) = 6E(X) - 4 = 17$

(7) $V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 35/12$ より，$V(6X-4) = 6^2V(X) = 105$

(8) 第 1 種の誤り (p.249)

(9) 第 2 種の誤り (p.249)

(10) 峰が 1 つか 2 つ以上か，中心の位置，散らばり具合，形状 (歪みや尖り)，極端に外れた値が存在するか (p.16)

**問題 2**

(1) サイコロの出る目の表を書くことにより

| | | $Y$ | | |
|---|---|---|---|---|
| | | $-1$ | $1$ | $f_X(x)$ |
| $X$ | $-2$ | $\frac{7}{18}$ | $\frac{1}{9}$ | $\frac{1}{2}$ |
| | $1$ | $\frac{5}{18}$ | $\frac{2}{9}$ | $\frac{1}{2}$ |
| | $f_Y(y)$ | $\frac{2}{3}$ | $\frac{1}{3}$ | $1$ |

ただし $f_X(x), f_Y(y)$ は周辺確率分布で (2) 以降で使用するためのものである．

(2) $E(X) = -2 \cdot \dfrac{1}{2} + 1 \cdot \dfrac{1}{2} = -\dfrac{1}{2}$

$E(Y) = -1 \cdot \dfrac{2}{3} + 1 \cdot \dfrac{1}{3} = -\dfrac{1}{3}$

(3) $V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \dfrac{5}{2} - \left(-\dfrac{1}{2}\right)^2 = \dfrac{9}{4}$

$V(Y) = E(Y^2) - E(Y)^2 = 1 - \left(\dfrac{2}{3}\right)^2 = \dfrac{8}{9}$

(4) $E(XY) = (-2) \cdot (-1) \cdot \dfrac{7}{18} + 1 \cdot (-1) \cdot \dfrac{5}{18} - 2 \cdot 1 \cdot \dfrac{1}{9} + 1 \cdot 1 \cdot \dfrac{2}{9} = \dfrac{1}{2}$

(5) 共分散 $C(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$ より，

$\rho_{XY} = \dfrac{C(X,Y)}{\sqrt{V(X)V(Y)}} = \dfrac{1}{3\sqrt{2}}$

(6) 例えば，$P(X=-2, Y=-1) \neq P(X=-2)P(Y=-1)$ であるから，従属である．

**問題 3**

$$
\begin{aligned}
s^2 &= \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\{(X_i-\mu)-(\bar{X}-\mu)\}^2 \\
&= \frac{1}{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2-2(\bar{X}-\mu)\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)+n(\bar{X}-\mu)^2\right]
\end{aligned}
$$

ここで，$(\bar{X}-\mu)\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)=(\bar{X}-\mu)\left(\sum_{i=1}^{n}X_i-n\mu\right)=n(\bar{X}-\mu)^2$ であるから，

$$
s^2=\frac{1}{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2-n(\bar{X}-\mu)^2\right]
$$

従って，両辺の期待値をとると

$$
\begin{aligned}
E(s^2) &= \frac{1}{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n}E\left((X_i-\mu)^2\right)-nE\left((\bar{X}-\mu)^2\right)\right] \\
&= \frac{1}{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n}\sigma^2-n\cdot\frac{\sigma^2}{n}\right]=\frac{1}{n-1}\cdot(n-1)\sigma^2=\sigma^2
\end{aligned}
$$

**問題 4**

A,B,C 工程でかかる時間を確率変数 $A,B,C$ で表す.

4-1 $P(C<30)$ を考えればよい.
$C\sim N(17,10^2)$ より $Z=\dfrac{C-17}{10}\sim N(0.1)$ である. よって，

$$
\begin{aligned}
P(C<30) &= P(Z<\frac{30-17}{10})=P(Z<1.7)=1-P(Z>1.7) \\
&= 1-0.09680=0.90320
\end{aligned}
$$

4-2 $P(A+B>17)$ を考えればよい.
$C\sim N(10+20,5^2+12^2)=N(30,13^2)$ より $Z=\dfrac{A+B-30}{13}\sim N(0.1)$ である. よって，

$$
\begin{aligned}
P(A+B>17) &= P(Z>\frac{17-30}{13})=P(Z>-1)=P(Z<1)=1-P(Z>1) \\
&= 1-0.15866=0.84134
\end{aligned}
$$

**問題 5**

作業時間を $X_i(1\le i\le 10)$ とすると，標本平均 $\bar{X}=23/10=2.3$，不偏標本分散は，
$s^2=\dfrac{10}{9}S^2=\dfrac{10}{9}\left(\dfrac{1}{10}\sum_{i=1}^{10}X_i^2-\bar{X}^2\right)=6.78-\dfrac{9}{10}\cdot 2.3=0.9$ となる.

5-1 $t=\dfrac{2.3-\mu}{\sqrt{0.9/10}}\sim t(9)$ より，$P(-0.6786\le t\le 0.6786)=0.95$

よって信頼区間は $\left[2.3\pm 0.6786\cdot\dfrac{0.9}{10}\right]=[1.6214,2.9786]\approx[1.621,2.979]$

5-2 $Y = \dfrac{9 \cdot 0.9}{\sigma^2} \sim \chi^2(9)$ より，$P(3.37511 \leq Y \leq 16.91898) = 0.90$

よって信頼区間は $\left[\dfrac{9 \cdot 0.9}{16.91898}, \dfrac{9 \cdot 0.9}{3.37511}\right] \approx [0.4787, 2.4360] \approx [0.479, 2.436]$

**問題 6**

6-1 この大学の身長の平均値を $\mu$ として，帰無仮説 $H_0 : \mu = 170.8$，対立仮説 $H_1 : \mu \neq 170.8$ と置く．
このとき，

$$T = \frac{174.9 - 170.8}{\sqrt{6^2/9}} = 2.05 \sim N(0,1)$$

棄却域は $T < -1.9600, T > 1.9600$ より，$H_0$ は棄却される．
従って，この大学の男子学生の身長の平均値は全国平均と異なる．

6-2 今度は $T \sim t(8)$ が成り立つから，棄却域は $t < -2.306, t > 2.306$ である．
よって $H_0$ は棄却されないから，この大学の男子学生の身長の平均は全国平均と同一とみなしてよい．

**問題 7**

以下のどちらかでよいと思われます．

i) $\sigma^2$ が既知であるとした場合
信頼区間 $100\alpha\%$ の信頼区間を考え，$X, Y$ の標本平均を $\bar{X}, \bar{Y}$ とする．
$\bar{X} \sim N\left(\mu_1, \dfrac{\sigma^2}{m}\right)$，$\bar{Y} \sim N\left(\mu_2, \dfrac{\sigma^2}{n}\right)$ より，$\bar{X} - \bar{Y} \sim N\left(\mu_1 - \mu_2, \sigma^2\left(\dfrac{1}{m} + \dfrac{1}{n}\right)\right)$ である．
よって，$Z = \dfrac{\bar{X} - \bar{Y} - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\sigma^2\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n}\right)}} \sim N(0,1)$
これより標準正規分布の上側 $100\alpha\%$ 点を $z_\alpha$ とすると，
$P(-z_{\alpha/2} \leq z \leq z_{\alpha/2}) = \alpha$ となるから，信頼区間は $\left[\bar{X} - \bar{Y} \pm z_{\alpha/2}\sqrt{\sigma^2\left(\dfrac{1}{m} + \dfrac{1}{n}\right)}\right]$

ii) $\sigma^2$ が未知であるとした場合
$Z$ を求めるところまでは i) と同じ．$X, Y$ の不偏標本分散を $s_1^2, s_2^2$ とする．
ここで，$Z$ 中の $\sigma^2$ をプールされた分散 $s^2 = \dfrac{1}{m+n-2}\left\{(m-1)s_1^2 + (n-1)s_2^2\right\}$ に置き換えると，

$$t = \frac{\bar{X} - \bar{Y} - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{s^2\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n}\right)}} \sim t(m+n-2)$$

これより自由度 $m+n-2$ の $t$ 分布の上側 $100\alpha\%$ 点を $t_\alpha(m+n-2)$ とすると，
$P(-t_{\alpha/2}(m+n-2) \leq t \leq t_{\alpha/2}(m+n-2)) = \alpha$ となるから，
信頼区間は $\left[\bar{X} - \bar{Y} \pm t_{\alpha/2}(m+n-2)\sqrt{s^2\left(\dfrac{1}{m} + \dfrac{1}{n}\right)}\right]$

# 2011年度問題

**問 1**

次表は 2 次元離散型確率変数 $(X, Y)$ の同時確率分布を表す．以下の問いに答えよ．

| | | $Y$ | | |
|---|---|---|---|---|
| | | $-2$ | $0$ | $1$ |
| $X$ | $-1$ | $1/8$ | $1/8$ | $1/8$ |
| | $1$ | $1/16$ | $1/4$ | $1/16$ |
| | $3$ | $1/16$ | $1/8$ | $1/16$ |

(1-1) $X$ の周辺分布を求め，期待値と分散を求めよ．

(1-2) $Y$ の周辺分布を求め，期待値と分散を求めよ．

(1-3) 積 $XY$ の期待値を求めよ．

(1-4) $X$ と $Y$ の相関係数を求めよ．ただし，最終結果に $\sqrt{\ }$ が含まれている場合は，そのままでよい．

**問 2**

$n$ 個の確率変数 $X_1, \cdots, X_n$ が互いに独立に同一の分布 $F$ に従っているとする. 分布 $F$ の平均は $\mu$，分散は $\sigma^2$ であるとする. このとき，不偏分散 $s^2 = \dfrac{1}{n-1}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$ について不偏性 $E(s^2) = \sigma^2$ が成り立つことを証明せよ..

**問 3**

ある 10 人の小学 3 年生の身長 (cm) を測定したところ次のデータを得た．10 人の身長は正規母集団からの無作為標本とみなせるとして以下の問に答えよ．ただし，小数第 3 位まで答えよ．

126　127　123　116　115　121　130　118　124　120（cm）

3-1. (1) 平均，(2) 不偏分散，(3) 標準偏差，(4) メディアン，(5) 範囲，(6) 変動係数

3-2. (7) 母平均 $\mu$ の 95% 信頼区間を求めよ．

3-3. (8) 母分散 $\sigma^2$ の 90% 信頼区間を求めよ．

3-4. (9) 小学 3 年生の全国平均が 125.5(cm) であったとする (母分散は未知)．全国平均と差があるといえるか．有意水準 5% で検定せよ．

ヒント：$\sqrt{2} = 1.4142$，$\sqrt{3} = 1.7321$，$\sqrt{5} = 2.2361$，$\sqrt{7} = 2.6458$

**問 4**

$P(A) = 0.2,\ P(A \cup B) = 0.7$ とする．以下のそれぞれの場合について $P(B)$ を求めよ．

(4-1) $A$ と $B$ が独立である場合．

(4-2) $A$ と $B$ が排反である場合．

(4-3) $P(B|A) = 0.2$ である場合．

**問 5**

母集団分布が $N(\mu_1, \sigma_1^2)$，$N(\mu_2, \sigma_2^2)$ である二つの正規母集団分布から個別に二つの標本 $X_1, X_2, \cdots, X_m$ と $Y_1, Y_2, \cdots Y_n$ を抽出したときの，母平均の差 $\mu_1 - \mu_2$ の区間推定について考える．ただし，信頼係数は $100(1-\alpha)\%$ とする．

(5-1) 母分散 $\sigma_1^2$ と $\sigma_2^2$ がともに既知のとき，母平均の差の信頼区間を示せ．

(5-2) 母分散が未知であるが $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$ のとき，母平均の差の信頼区間を示せ．

(5-3) 母分散 $\sigma_1^2$ と $\sigma_2^2$ がともに既知であるが，$X_i$ と $Y_i$ が対となっている場合 (独立でない場合)，母平均の差の信頼区間を示せ．

**問 6**

ある年令の生徒の身長は平均値 160.0cm，標準偏差 5.0cm の正規分布をなしていることが分かっている．この年令の男子を独立に 50 人選んだとき，次の問に答えよ．ただし，小数第 3 位まで答えよ．

(6-1) 50 人の平均値が 161.5cm 以上である確率を求めよ．

(6-2) 50 人の平均値と 160cm との差が 0.5cm 以下である確率を求めよ．

**問 7**

次の問に答えよ．

- 「平均 $\leq$ メディアン $\leq$ モード」の関係が見られるとき，データ分布はどのような形状であるといえるか． $\boxed{\text{(7-1)}}$
- $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(x_i - c) = 0$ を満たす $c$ が $\bar{x}$ のみであることを示せ． $\boxed{\text{(7-2)}}$
- 結果が 2 通りしかないような試行を繰り返したときの成功回数 $X$ を考える．そのとき，試行の回数が非常に大きいが成功の確率 $p$ が非常に小さいとき，成功回数 $X$ は $\boxed{\text{(7-3)}}$ 分布に従う．その確率関数は $\boxed{\text{(7-4)}}$ と表せる．$X$ の期待値は $\boxed{\text{(7-5)}}$ であり，分散は $\boxed{\text{(7-6)}}$ である．
- サイコロを投げて出た目の数を $X$ とする．そのとき確率変数 $3X - 2$ の期待値は $\boxed{\text{(7-7)}}$ であり，分散は $\boxed{\text{(7-8)}}$ である．
- 仮説 $H_0$ が真で，対立仮説 $H_1$ が偽であるにもかかわらず $H_0$ が棄却される誤りは $\boxed{\text{(7-9)}}$ と呼ばれる．一方，仮説 $H_0$ が偽であるにもかかわらず，$H_0$ が採択される誤りを $\boxed{\text{(7-10)}}$ という．

# 2011年度解答例

**問1**

(1-1) $P(X=-1)=\frac{3}{8},\ P(X=1)=\frac{3}{8},\ P(X=3)=\frac{1}{4}$ であり，

$$E(X)=-1\cdot\frac{3}{8}+1\cdot\frac{3}{8}+3\cdot\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$$

$$V(X)=E(X^2)-E(X)^2=(-1)^2\cdot\frac{3}{8}+1^2\cdot\frac{3}{8}+3^2\cdot\frac{1}{4}-\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{39}{16}$$

(1-2) $P(Y=-2)=\frac{1}{4},\ P(Y=0)=\frac{1}{2},\ P(Y=1)=\frac{1}{4}$ であり，

$$E(Y)=-2\cdot\frac{1}{4}+1\cdot\frac{1}{4}=-\frac{1}{4}$$

$$V(Y)=E(Y^2)-E(Y)^2=(-2)^2\cdot\frac{1}{4}+1^2\cdot\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{4}\right)^2=\frac{19}{16}$$

(1-3) $E(XY)=-1\cdot(-2)\cdot\frac{1}{8}-1\cdot1\cdot\frac{1}{8}+1\cdot(-2)\cdot\frac{1}{16}+1\cdot1\cdot\frac{1}{16}+3\cdot(-2)\cdot\frac{1}{16}+3\cdot1\cdot\frac{1}{16}=-\frac{1}{8}$

(1-4) 共分散 $C(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)$ より，

$$\rho_{XY}=\frac{C(X,Y)}{\sqrt{V(X)V(Y)}}=\frac{1}{\sqrt{741}}$$

**問2**

$$\begin{aligned} s^2 &= \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\{(X_i-\mu)-(\bar{X}-\mu)\}^2 \\ &= \frac{1}{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2-2(\bar{X}-\mu)\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)+n(\bar{X}-\mu)^2\right] \end{aligned}$$

ここで，$(\bar{X}-\mu)\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)=(\bar{X}-\mu)\left(\sum_{i=1}^{n}X_i-n\mu\right)=n(\bar{X}-\mu)^2$ であるから，

$$s^2=\frac{1}{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2-n(\bar{X}-\mu)^2\right]$$

従って，両辺の期待値をとると

$$\begin{aligned} E(s^2) &= \frac{1}{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n}E\left((X_i-\mu)^2\right)-nE\left((\bar{X}-\mu)^2\right)\right] \\ &= \frac{1}{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n}\sigma^2-n\cdot\frac{\sigma^2}{n}\right] \\ &= \frac{1}{n-1}\cdot(n-1)\sigma^2=\sigma^2 \end{aligned}$$

## 問 3

10 人の身長を確率変数 $X_i$ $(1 \leq i \leq 10)$ で表す．

(1) $\bar{X} = \dfrac{1}{10}\displaystyle\sum_{i=1}^{10} X_i = 122.000$

(2) $s^2 = \dfrac{1}{9}\displaystyle\sum_{i=1}^{10}(X_i - \bar{X})^2 = 24.000$

(3) 不偏標本分散の平方根と考えられるが，普通の標本分散の平方根と考えても間違いではないと思われる．
前者の場合 $s = \sqrt{s^2} = 2\sqrt{6} = 2 \cdot 1.4142 \cdot 1.7321 \approx 4.8990 \approx 4.899$
後者の場合 $S = \sqrt{\dfrac{9}{10}s^2} = \dfrac{6}{5}\sqrt{15} = \dfrac{6 \cdot 1.7321 \cdot 2.2361}{5} \approx 4.6477 \approx 4.648$

(4) 下から 5 番目と 6 番目の平均をとればよいから，$\dfrac{121 + 123}{2} = 122.000$

(5) $130 - 115 = 15.000$

(6) 以下のいずれでも良いと思われる．
不偏標本分散を使う場合，変動係数 $CV = \dfrac{s}{\bar{X}} \approx \dfrac{4.8990}{122} \approx 0.0401 \approx 0.040$
普通の標本分散を使う場合，$CV = \dfrac{S}{\bar{X}} \approx \dfrac{4.6477}{122} \approx 0.0380 \approx 0.038$

(7) $t = \dfrac{122 - \mu}{\sqrt{24/10}} \sim t(9)$ より，$P(-2.262 \leq t \leq 2.262) = 0.95$
よって信頼区間は

$$\begin{aligned}\left[122 \pm 2.262\sqrt{\frac{24}{10}}\right] &= \left[122 \pm 2.262 \cdot 2 \cdot \frac{1.7321}{2.2361}\right] \\ &\approx [118.4957, 125.5043] \approx [118.496, 125.504]\end{aligned}$$

(8) $Y = \dfrac{9 \cdot 24}{\sigma^2} \sim \chi^2(9)$ より，$P(3.33 \leq Y \leq 16.92) = 0.90$
よって信頼区間は $\left[\dfrac{9 \cdot 24}{16.92}, \dfrac{9 \cdot 24}{3.33}\right] \approx [12.7659, 64.8648] \approx [12.766, 64.865]$

(9) 帰無仮説 $H_0 : \mu = 125.5$，対立仮説 $H_1 : \mu \neq 125.5$ と置くと，
$t = \dfrac{122 - 125.5}{\sqrt{24/10}} \approx -2.259 \sim t(9)$
ここで棄却域は $t < -2.262, t > 2.262$ より，$H_0$ は棄却されない．従って全国平均と差があるとはいえない．

## 問 4

(4-1) $A$ と $B$ が独立であるから，$P(A \cap B) = P(A)P(B)$ が成り立つ．
よって $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A)P(B)$ から，
$P(B) = \dfrac{P(A \cup B) - P(A)}{1 - P(A)} = 0.625$

(4-2) $A$ と $B$ が排反であるから，$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ が成り立つ．よって

$$P(B) = P(A \cup B) - P(A) = 0.5$$

(4-3) $P(B|A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$，$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ より，

$$P(B) = P(B|A)P(A) + P(A \cup B) - P(A) = 0.54$$

**問 5**

(5-1) $\bar{X} \sim N\left(\mu_1, \dfrac{\sigma_1^2}{m}\right)$，$\bar{Y} \sim N\left(\mu_2, \dfrac{\sigma_2^2}{n}\right)$ より，$\bar{X} - \bar{Y} \sim N\left(\mu_1 - \mu_2, \dfrac{\sigma_1^2}{m} + \dfrac{\sigma_2^2}{n}\right)$ である．

よって，$Z = \dfrac{\bar{X} - \bar{Y} - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{m} + \frac{\sigma_2^2}{n}}} \sim N(0,1)$

これより標準正規分布の上側 $100\alpha\%$ 点を $z_\alpha$ とすると，

$P(-z_{\alpha/2} \leq z \leq z_{\alpha/2}) = \alpha$ となるから，信頼区間は $\left[\bar{X} - \bar{Y} \pm z_{\alpha/2}\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{m} + \dfrac{\sigma_2^2}{n}}\right]$

(5-2) (5-1) 中の $Z$ の $\sigma_1^2, \sigma_2^2$ をプールされた分散 $s^2 = \dfrac{1}{m+n-2}\left\{(m-1)s_1^2 + (n-1)s_2^2\right\}$ に置き換えると，

$$t = \frac{\bar{X} - \bar{Y} - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{s^2\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n}\right)}} \sim t(m+n-2)$$

これより自由度 $m+n-2$ の $t$ 分布の上側 $100\alpha\%$ 点を $t_\alpha(m+n-2)$ とすると，
$P(-t_{\alpha/2}(m+n-2) \leq t \leq t_{\alpha/2}(m+n-2)) = \alpha$ となるから，
信頼区間は $\left[\bar{X} - \bar{Y} \pm t_{\alpha/2}(m+n-2)\sqrt{s^2\left(\dfrac{1}{m} + \dfrac{1}{n}\right)}\right]$

(5-3) $1 \leq i \leq n$ で $X_i$ と $Y_i$ が対となっている，つまり $X$ と $Y$ の標本が $n$ 個ずつある場合を考える．
このとき，$Z_i = X_i - Y_i$ とすると，$\bar{Z} = \bar{X} - \bar{Y}$，$E(\bar{Z}) = E(\bar{X}) - E(\bar{Y}) = \mu_1 - \mu_2$

また、$Z$ の不偏標本分散を $s_Z^2 = \dfrac{1}{n-1}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\{X_i - Y_i - (\mu_1 - \mu_2)\}^2$ とすると，

$t = \dfrac{\bar{X} - \bar{Y} - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{s_Z^2/n}} \sim t(n-1)$ となる．

$P(-t_{\alpha/2}(n-1) \leq t \leq t_{\alpha/2}(n-1)) = \alpha$ であるから，

信頼区間は $\left[\bar{X} - \bar{Y} \pm t_{\alpha/2}(n-1)\sqrt{\dfrac{s_Z^2}{n}}\right]$

**問 6**

50 人の男子の身長を $X_i (1 \leq i \leq 10)$ とすると，$\bar{X} \sim N\left(160.0, \dfrac{5.0^2}{50}\right)$ が成り立つ．

従って，$Z = \dfrac{\bar{X} - 160.0}{\sqrt{5.0^2/50}} = (\bar{X} - 160.0)\sqrt{2} \sim N(0.1)$

(6-1) $P(\bar{X} \geq 161.5)$ を求めればよい．

$$\begin{aligned} P(\bar{X} \geq 161.5) &= P\left(Z \geq 1.5\sqrt{2}\right) \\ &= 1 - P\left(Z \leq 1.5\sqrt{2}\right) \\ &= 1 - P(Z \leq 2.1213) \approx 1 - 0.9830 = 0.017 \end{aligned}$$

(6-2) $P(159.5 \leq \bar{X} \leq 160.5)$ を求めればよい．

$$\begin{aligned} P(159.5 \leq \bar{X} \leq 160.5) &= P\left(-0.5\sqrt{2} \leq Z \leq 0.5\sqrt{2}\right) \\ &= 1 - 2P\left(Z \geq 0.5\sqrt{2}\right) \\ &= 1 - 2\left(1 - P\left(Z \leq 0.5\sqrt{2}\right)\right) \\ &= 2P(Z \leq 0.7071) - 1 \approx 2 \cdot 0.7611 - 1 = 0.5222 \approx 0.522 \end{aligned}$$

**問 7**

(7-1) 左に歪んだ分布 (p.28)

(7-2) $\sum_{i=1}^{n}(x_i - c) = \sum_{i=1}^{n} x_i - nc = n\bar{x} - nc$

これより，$n(\bar{x} - c) = 0$

$n \neq 0$ より，これを満たす $c$ は $\bar{x}$ のみである．

(7-3) ポアソン (p.137)

(7-4) $e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^x}{x!}$ (p,137)

(7-5) $\lambda$ (p.138)

(7-6) $\lambda$ (p.138)

(7-7) $E(X) = (1+2+3+4+5+6)/2 = 7/2$ より，$E(3X-2) = 3E(X) - 2 = 17/2$

(7-8) $V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 35/12$ より，$V(3X-2) = 3^2V(X) = 105/4$

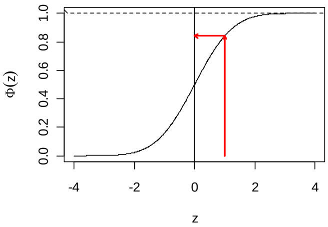
(7-9) 第 1 種の誤り (p.249)

(7-10) 第 2 種の誤り (p.249)

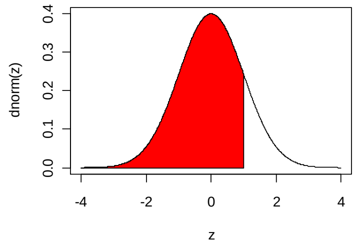
## 標準正規分布の分布関数

$$\Phi(z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du$$

### 分布関数




### 密度関数




| z | 0.00 | 0.01 | 0.02 | 0.03 | 0.04 | 0.05 | 0.06 | 0.07 | 0.08 | 0.09 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.0 | 0.5000 | 0.5040 | 0.5080 | 0.5120 | 0.5160 | 0.5199 | 0.5239 | 0.5279 | 0.5319 | 0.5359 |
| 0.1 | 0.5398 | 0.5438 | 0.5478 | 0.5517 | 0.5557 | 0.5596 | 0.5636 | 0.5675 | 0.5714 | 0.5753 |
| 0.2 | 0.5793 | 0.5832 | 0.5871 | 0.5910 | 0.5948 | 0.5987 | 0.6026 | 0.6064 | 0.6103 | 0.6141 |
| 0.3 | 0.6179 | 0.6217 | 0.6255 | 0.6293 | 0.6331 | 0.6368 | 0.6406 | 0.6443 | 0.6480 | 0.6517 |
| 0.4 | 0.6554 | 0.6591 | 0.6628 | 0.6664 | 0.6700 | 0.6736 | 0.6772 | 0.6808 | 0.6844 | 0.6879 |
| 0.5 | 0.6915 | 0.6950 | 0.6985 | 0.7019 | 0.7054 | 0.7088 | 0.7123 | 0.7157 | 0.7190 | 0.7224 |
| 0.6 | 0.7257 | 0.7291 | 0.7324 | 0.7357 | 0.7389 | 0.7422 | 0.7454 | 0.7486 | 0.7517 | 0.7549 |
| 0.7 | 0.7580 | 0.7611 | 0.7642 | 0.7673 | 0.7704 | 0.7734 | 0.7764 | 0.7794 | 0.7823 | 0.7852 |
| 0.8 | 0.7881 | 0.7910 | 0.7939 | 0.7967 | 0.7995 | 0.8023 | 0.8051 | 0.8078 | 0.8106 | 0.8133 |
| 0.9 | 0.8159 | 0.8186 | 0.8212 | 0.8238 | 0.8264 | 0.8289 | 0.8315 | 0.8340 | 0.8365 | 0.8389 |
| 1.0 | 0.8413 | 0.8438 | 0.8461 | 0.8485 | 0.8508 | 0.8531 | 0.8554 | 0.8577 | 0.8599 | 0.8621 |
| 1.1 | 0.8643 | 0.8665 | 0.8686 | 0.8708 | 0.8729 | 0.8749 | 0.8770 | 0.8790 | 0.8810 | 0.8830 |
| 1.2 | 0.8849 | 0.8869 | 0.8888 | 0.8907 | 0.8925 | 0.8944 | 0.8962 | 0.8980 | 0.8997 | 0.9015 |
| 1.3 | 0.9032 | 0.9049 | 0.9066 | 0.9082 | 0.9099 | 0.9115 | 0.9131 | 0.9147 | 0.9162 | 0.9177 |
| 1.4 | 0.9192 | 0.9207 | 0.9222 | 0.9236 | 0.9251 | 0.9265 | 0.9279 | 0.9292 | 0.9306 | 0.9319 |
| 1.5 | 0.9332 | 0.9345 | 0.9357 | 0.9370 | 0.9382 | 0.9394 | 0.9406 | 0.9418 | 0.9429 | 0.9441 |
| 1.6 | 0.9452 | 0.9463 | 0.9474 | 0.9484 | 0.9495 | 0.9505 | 0.9515 | 0.9525 | 0.9535 | 0.9545 |
| 1.7 | 0.9554 | 0.9564 | 0.9573 | 0.9582 | 0.9591 | 0.9599 | 0.9608 | 0.9616 | 0.9625 | 0.9633 |
| 1.8 | 0.9641 | 0.9649 | 0.9656 | 0.9664 | 0.9671 | 0.9678 | 0.9686 | 0.9693 | 0.9699 | 0.9706 |
| 1.9 | 0.9713 | 0.9719 | 0.9726 | 0.9732 | 0.9738 | 0.9744 | 0.9750 | 0.9756 | 0.9761 | 0.9767 |
| 2.0 | 0.9772 | 0.9778 | 0.9783 | 0.9788 | 0.9793 | 0.9798 | 0.9803 | 0.9808 | 0.9812 | 0.9817 |
| 2.1 | 0.9821 | 0.9826 | 0.9830 | 0.9834 | 0.9838 | 0.9842 | 0.9846 | 0.9850 | 0.9854 | 0.9857 |
| 2.2 | 0.9861 | 0.9864 | 0.9868 | 0.9871 | 0.9875 | 0.9878 | 0.9881 | 0.9884 | 0.9887 | 0.9890 |
| 2.3 | 0.9893 | 0.9896 | 0.9898 | 0.9901 | 0.9904 | 0.9906 | 0.9909 | 0.9911 | 0.9913 | 0.9916 |
| 2.4 | 0.9918 | 0.9920 | 0.9922 | 0.9925 | 0.9927 | 0.9929 | 0.9931 | 0.9932 | 0.9934 | 0.9936 |
| 2.5 | 0.9938 | 0.9940 | 0.9941 | 0.9943 | 0.9945 | 0.9946 | 0.9948 | 0.9949 | 0.9951 | 0.9952 |
| 2.6 | 0.9953 | 0.9955 | 0.9956 | 0.9957 | 0.9959 | 0.9960 | 0.9961 | 0.9962 | 0.9963 | 0.9964 |
| 2.7 | 0.9965 | 0.9966 | 0.9967 | 0.9968 | 0.9969 | 0.9970 | 0.9971 | 0.9972 | 0.9973 | 0.9974 |
| 2.8 | 0.9974 | 0.9975 | 0.9976 | 0.9977 | 0.9977 | 0.9978 | 0.9979 | 0.9979 | 0.9980 | 0.9981 |
| 2.9 | 0.9981 | 0.9982 | 0.9982 | 0.9983 | 0.9984 | 0.9984 | 0.9985 | 0.9985 | 0.9986 | 0.9986 |
| 3.0 | 0.9987 | 0.9987 | 0.9987 | 0.9988 | 0.9988 | 0.9989 | 0.9989 | 0.9989 | 0.9990 | 0.9990 |
| 3.1 | 0.9990 | 0.9991 | 0.9991 | 0.9991 | 0.9992 | 0.9992 | 0.9992 | 0.9992 | 0.9993 | 0.9993 |
| 3.2 | 0.9993 | 0.9993 | 0.9994 | 0.9994 | 0.9994 | 0.9994 | 0.9994 | 0.9995 | 0.9995 | 0.9995 |
| 3.3 | 0.9995 | 0.9995 | 0.9995 | 0.9996 | 0.9996 | 0.9996 | 0.9996 | 0.9996 | 0.9996 | 0.9997 |
| 3.4 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9998 |
| 3.5 | 0.9998 | 0.9998 | 0.9998 | 0.9998 | 0.9998 | 0.9998 | 0.9998 | 0.9998 | 0.9998 | 0.9998 |
| 3.6 | 0.9998 | 0.9998 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 |
| 3.7 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 |
| 3.8 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 |
| 3.9 | 0.99995 | 0.99995 | 0.99996 | 0.99996 | 0.99996 | 0.99996 | 0.99996 | 0.99996 | 0.99997 | 0.99997 |
| 4.0 | 0.99997 | 0.99997 | 0.99997 | 0.99997 | 0.99997 | 0.99997 | 0.99998 | 0.99998 | 0.99998 | 0.99998 |

**t分布表：**　t が自由度mの t 分布に従うとしたとき、t の上側 100α％点を与える。（テキスト228頁参照）

すなわち、P(t ≧u ) = α となる u を与える。ここで u = $t_{\alpha}$(m) である。

| 自由度m ＼ α | 0.1 | 0.05 | 0.025 | 0.01 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 3.078 | 6.314 | 12.706 | 31.821 |
| 2 | 1.886 | 2.920 | 4.303 | 6.965 |
| 3 | 1.638 | 2.353 | 3.182 | 4.541 |
| 4 | 1.533 | 2.132 | 2.776 | 3.747 |
| 5 | 1.476 | 2.015 | 2.571 | 3.365 |
| 6 | 1.440 | 1.943 | 2.447 | 3.143 |
| 7 | 1.415 | 1.895 | 2.365 | 2.998 |
| 8 | 1.397 | 1.860 | 2.306 | 2.896 |
| 9 | 1.383 | 1.833 | 2.262 | 2.821 |
| 10 | 1.372 | 1.812 | 2.228 | 2.764 |
| 11 | 1.363 | 1.796 | 2.201 | 2.718 |
| 12 | 1.356 | 1.782 | 2.179 | 2.681 |
| 13 | 1.350 | 1.771 | 2.160 | 2.650 |
| 14 | 1.345 | 1.761 | 2.145 | 2.624 |
| 15 | 1.341 | 1.753 | 2.131 | 2.602 |
| 16 | 1.337 | 1.746 | 2.120 | 2.583 |
| 17 | 1.333 | 1.740 | 2.110 | 2.567 |
| 18 | 1.330 | 1.734 | 2.101 | 2.552 |
| 19 | 1.328 | 1.729 | 2.093 | 2.539 |
| 20 | 1.325 | 1.725 | 2.086 | 2.528 |
| 21 | 1.323 | 1.721 | 2.080 | 2.518 |
| 22 | 1.321 | 1.717 | 2.074 | 2.508 |
| 23 | 1.319 | 1.714 | 2.069 | 2.500 |
| 24 | 1.318 | 1.711 | 2.064 | 2.492 |
| 25 | 1.316 | 1.708 | 2.060 | 2.485 |
| 26 | 1.315 | 1.706 | 2.056 | 2.479 |
| 27 | 1.314 | 1.703 | 2.052 | 2.473 |
| 28 | 1.313 | 1.701 | 2.048 | 2.467 |
| 29 | 1.311 | 1.699 | 2.045 | 2.462 |
| 30 | 1.310 | 1.697 | 2.042 | 2.457 |
| 31 | 1.309 | 1.696 | 2.040 | 2.453 |
| 32 | 1.309 | 1.694 | 2.037 | 2.449 |
| 33 | 1.308 | 1.692 | 2.035 | 2.445 |
| 34 | 1.307 | 1.691 | 2.032 | 2.441 |
| 35 | 1.306 | 1.690 | 2.030 | 2.438 |
| 36 | 1.306 | 1.688 | 2.028 | 2.434 |
| 37 | 1.305 | 1.687 | 2.026 | 2.431 |
| 38 | 1.304 | 1.686 | 2.024 | 2.429 |
| 39 | 1.304 | 1.685 | 2.023 | 2.426 |
| 40 | 1.303 | 1.684 | 2.021 | 2.423 |
| 41 | 1.303 | 1.683 | 2.020 | 2.421 |
| 42 | 1.302 | 1.682 | 2.018 | 2.418 |
| 43 | 1.302 | 1.681 | 2.017 | 2.416 |
| 44 | 1.301 | 1.680 | 2.015 | 2.414 |
| 45 | 1.301 | 1.679 | 2.014 | 2.412 |
| 46 | 1.300 | 1.679 | 2.013 | 2.410 |
| 47 | 1.300 | 1.678 | 2.012 | 2.408 |
| 48 | 1.299 | 1.677 | 2.011 | 2.407 |
| 49 | 1.299 | 1.677 | 2.010 | 2.405 |
| 50 | 1.299 | 1.676 | 2.009 | 2.403 |
| 60 | 1.296 | 1.671 | 2.000 | 2.390 |
| 70 | 1.294 | 1.667 | 1.994 | 2.381 |
| 80 | 1.292 | 1.664 | 1.990 | 2.374 |
| 90 | 1.291 | 1.662 | 1.987 | 2.368 |
| 100 | 1.290 | 1.660 | 1.984 | 2.364 |

**カイ2乗分布表：** Y が自由度 m のカイ2乗分布に従うとしたとき、Y の上側 100α％点を与える。

すなわち、P(Y ≧ u) = α となる u を与える。ここで、u はテキスト229頁の $\chi^2_{\alpha}(m)$ に等しい

| 自由度m　α | 0.99 | 0.975 | 0.95 | 0.05 | 0.025 | 0.01 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.00016 | 0.00098 | 0.0039 | 3.84 | 5.02 | 6.63 |
| 2 | 0.020 | 0.051 | 0.10 | 5.99 | 7.38 | 9.21 |
| 3 | 0.11 | 0.22 | 0.35 | 7.81 | 9.35 | 11.34 |
| 4 | 0.30 | 0.48 | 0.71 | 9.49 | 11.14 | 13.28 |
| 5 | 0.55 | 0.83 | 1.15 | 11.07 | 12.83 | 15.09 |
| 6 | 0.87 | 1.24 | 1.64 | 12.59 | 14.45 | 16.81 |
| 7 | 1.24 | 1.69 | 2.17 | 14.07 | 16.01 | 18.48 |
| 8 | 1.65 | 2.18 | 2.73 | 15.51 | 17.53 | 20.09 |
| 9 | 2.09 | 2.70 | 3.33 | 16.92 | 19.02 | 21.67 |
| 10 | 2.56 | 3.25 | 3.94 | 18.31 | 20.48 | 23.21 |
| 11 | 3.05 | 3.82 | 4.57 | 19.68 | 21.92 | 24.72 |
| 12 | 3.57 | 4.40 | 5.23 | 21.03 | 23.34 | 26.22 |
| 13 | 4.11 | 5.01 | 5.89 | 22.36 | 24.74 | 27.69 |
| 14 | 4.66 | 5.63 | 6.57 | 23.68 | 26.12 | 29.14 |
| 15 | 5.23 | 6.26 | 7.26 | 25.00 | 27.49 | 30.58 |
| 16 | 5.81 | 6.91 | 7.96 | 26.30 | 28.85 | 32.00 |
| 17 | 6.41 | 7.56 | 8.67 | 27.59 | 30.19 | 33.41 |
| 18 | 7.01 | 8.23 | 9.39 | 28.87 | 31.53 | 34.81 |
| 19 | 7.63 | 8.91 | 10.12 | 30.14 | 32.85 | 36.19 |
| 20 | 8.26 | 9.59 | 10.85 | 31.41 | 34.17 | 37.57 |
| 21 | 8.90 | 10.28 | 11.59 | 32.67 | 35.48 | 38.93 |
| 22 | 9.54 | 10.98 | 12.34 | 33.92 | 36.78 | 40.29 |
| 23 | 10.20 | 11.69 | 13.09 | 35.17 | 38.08 | 41.64 |
| 24 | 10.86 | 12.40 | 13.85 | 36.42 | 39.36 | 42.98 |
| 25 | 11.52 | 13.12 | 14.61 | 37.65 | 40.65 | 44.31 |
| 26 | 12.20 | 13.84 | 15.38 | 38.89 | 41.92 | 45.64 |
| 27 | 12.88 | 14.57 | 16.15 | 40.11 | 43.19 | 46.96 |
| 28 | 13.56 | 15.31 | 16.93 | 41.34 | 44.46 | 48.28 |
| 29 | 14.26 | 16.05 | 17.71 | 42.56 | 45.72 | 49.59 |
| 30 | 14.95 | 16.79 | 18.49 | 43.77 | 46.98 | 50.89 |
| 31 | 15.66 | 17.54 | 19.28 | 44.99 | 48.23 | 52.19 |
| 32 | 16.36 | 18.29 | 20.07 | 46.19 | 49.48 | 53.49 |
| 33 | 17.07 | 19.05 | 20.87 | 47.40 | 50.73 | 54.78 |
| 34 | 17.79 | 19.81 | 21.66 | 48.60 | 51.97 | 56.06 |
| 35 | 18.51 | 20.57 | 22.47 | 49.80 | 53.20 | 57.34 |
| 36 | 19.23 | 21.34 | 23.27 | 51.00 | 54.44 | 58.62 |
| 37 | 19.96 | 22.11 | 24.07 | 52.19 | 55.67 | 59.89 |
| 38 | 20.69 | 22.88 | 24.88 | 53.38 | 56.90 | 61.16 |
| 39 | 21.43 | 23.65 | 25.70 | 54.57 | 58.12 | 62.43 |
| 40 | 22.16 | 24.43 | 26.51 | 55.76 | 59.34 | 63.69 |
| 41 | 22.91 | 25.21 | 27.33 | 56.94 | 60.56 | 64.95 |
| 42 | 23.65 | 26.00 | 28.14 | 58.12 | 61.78 | 66.21 |
| 43 | 24.40 | 26.79 | 28.96 | 59.30 | 62.99 | 67.46 |
| 44 | 25.15 | 27.57 | 29.79 | 60.48 | 64.20 | 68.71 |
| 45 | 25.90 | 28.37 | 30.61 | 61.66 | 65.41 | 69.96 |
| 46 | 26.66 | 29.16 | 31.44 | 62.83 | 66.62 | 71.20 |
| 47 | 27.42 | 29.96 | 32.27 | 64.00 | 67.82 | 72.44 |
| 48 | 28.18 | 30.75 | 33.10 | 65.17 | 69.02 | 73.68 |
| 49 | 28.94 | 31.55 | 33.93 | 66.34 | 70.22 | 74.92 |
| 50 | 29.71 | 32.36 | 34.76 | 67.50 | 71.42 | 76.15 |
| 60 | 37.48 | 40.48 | 43.19 | 79.08 | 83.30 | 88.38 |
| 70 | 45.44 | 48.76 | 51.74 | 90.53 | 95.02 | 100.43 |
| 80 | 53.54 | 57.15 | 60.39 | 101.88 | 106.63 | 112.33 |
| 90 | 61.75 | 65.65 | 69.13 | 113.15 | 118.14 | 124.12 |
| 100 | 70.06 | 74.22 | 77.93 | 124.34 | 129.56 | 135.81 |