1 命題理論の言語

1.1 語彙

- 論理記号
  - 論理演算子：$\wedge \quad \vee \quad \to \quad \neg$
  - 括弧：$(\quad)$
- 非論理記号
  - 命題記号：英大文字 A、...、Z と、それに添え字をつけたもの
    および $\times$

2 命題論理の推論規則

2.1 連言

$$\frac{\varphi \quad \psi}{\varphi \wedge \psi}(\wedge\mathrm{I}) \qquad \frac{\varphi \wedge \psi}{\varphi}(\wedge\mathrm{E1}) \qquad \frac{\varphi \wedge \psi}{\psi}(\wedge\mathrm{E2})$$

2.2 選言

$$\frac{\varphi}{\varphi \vee \psi}(\vee\mathrm{I1}) \qquad \frac{\psi}{\varphi \vee \psi}(\vee\mathrm{I2}) \qquad \frac{\varphi \vee \psi \quad \begin{matrix}[\varphi] \\ \vdots \\ \omega\end{matrix} \quad \begin{matrix}[\psi] \\ \vdots \\ \omega\end{matrix}}{\omega}(\vee\mathrm{E})$$

2.3 条件法

$$\frac{\begin{matrix}[\varphi] \\ \vdots \\ \psi\end{matrix}}{\varphi \to \psi}(\to\mathrm{I}) \qquad \frac{\varphi \quad \varphi \to \psi}{\psi}(\to\mathrm{E})$$

2.4 否定

$$\frac{\begin{matrix}[\varphi] \\ \vdots \\ \times\end{matrix}}{\neg\varphi}(\neg\mathrm{I}) \qquad \frac{\varphi \quad \neg\varphi}{\times}(\neg\mathrm{E}) \qquad \frac{\times}{\varphi}(\text{矛盾規則}) \qquad \frac{\neg\neg\varphi}{\varphi}(\text{二重否定除去規則})$$

3 3 つの命題論理体系

最小命題論理 10 個の推論規則（$\wedge$I, $\wedge$E1, $\wedge$E2, $\vee$I1, $\vee$I2, $\vee$E, $\to$I, $\to$E, $\neg$I, $\neg$E）からなる体系

直観主義命題論理 最小命題論理の推論規則＋矛盾規則からなる体系

古典命題論理 直観主義命題論理の推論規則＋二重否定除去規則[*1]からなる体型

4 読み替え定理と置き換え定理

読み替え定理 証明可能な論理式の中の英大文字を任意の論理式に読み替えても、また証明可能な論理式が得られる。

置き換え定理 $\vdash A \leftrightarrow B$ となる論理式 A、B が与えられたとき、任意の論理式 φ の中の A の現れのうち任意個を B に置き換えてできる論理式を φ' とすると、$\vdash \varphi \leftrightarrow \varphi'$ が成立する。

5 古典命題論理の標準的意味

二値原理 命題論理の各論理式が、T（真）、F（偽）の 2 つの真理値のいずれかを持つ、と考えること。

命題論理の無矛盾性 各命題論理体系は無矛盾である。すなわち、$\times$ が証明されることはない。

命題論理の健全性 各命題論理体系は、真理関数的意味論に関して健全である。すなわち、任意の論理式 φ について、$\vdash \varphi \quad \Rightarrow \quad \varphi$ がトートロジー。

古典命題論理の完全性 古典命題論理体系は、真理関数的意味論に関して完全である。すなわち、任意の論理式 φ について、φ がトートロジー $\quad \Rightarrow \quad \vdash_C \varphi$。

6 述語論理の推論規則

6.1 命題論理の推論規則

$\wedge$I, $\wedge$E1, $\wedge$E2, $\vee$I1, $\vee$I2, $\vee$E, $\to$I, $\to$E, $\neg$I, $\neg$E ＋ 矛盾規則 ＋ 二重否定除去規則

6.2 普遍量化

$$\frac{\varphi(\alpha)}{\forall\zeta\varphi(\zeta)}(\forall\mathrm{I}) \qquad \frac{\forall\zeta\varphi(\zeta)}{\varphi(\alpha)}(\forall\mathrm{E})$$

∀I に関する条件 α は、$\varphi(\zeta)$ にも、また、前提や、規則が適用される際に有効な（すなわち、それまでにキャンセルされていない）仮定の中にも含まれていない定項でなくてはならない。

6.3 存在量化

$$\frac{\varphi(\alpha)}{\exists\zeta\varphi(\zeta)}(\exists\mathrm{I}) \qquad \frac{\exists\zeta\varphi(\zeta) \qquad \begin{matrix}[\varphi(\alpha)] \\ \vdots \\ \omega\end{matrix}}{\omega}(\exists\mathrm{E})$$

[*1] 排中律でも良い

∃E に関する条件 α は、$\varphi(\zeta)$ にも、ω にも、また、前提や、規則が適用される際に有効な（すなわち、それまでにキャンセルされていない）仮定の中にも含まれていない定項でなくてはならない。

7 古典述語論理の標準的意味

- φ が充足可能であるとは、あるモデル M が存在して、$v_M(\varphi) = \mathrm{T}$ となることである。
- φ が妥当であるとは、すべてのモデル M に対して、$v_M(\varphi) = \mathrm{T}$ となることである。

8 述語論理の性質

述語論理の無矛盾性 各述語論理体系は、無矛盾である。

述語論理の健全性 各述語論理体系は、健全である。すなわち、任意の論理式 φ について、$\vdash \varphi \quad \Rightarrow \quad \varphi$ は妥当。

古典述語論理の完全性 古典述語論理体系は、完全である。すなわち、任意の論理式 φ について、φ は妥当 $\quad \Rightarrow \quad \vdash_C \varphi$

古典述語論理の決定不可能性 古典述語論理は決定可能ではない。すなわち、どのような方法によっても、妥当かどうか決定することができない場合がある。

9 おまけ

9.1 証明できる論理式の例の全証明例

9.1.1 $A \leftrightarrow A$ 同一律

$A \qquad\qquad A$

9.1.2 $A \lor \lnot A$ 排中律

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{[A]^1}{A \lor \lnot A} \quad [\lnot(A \lor \lnot A)]^2}{\times}}{\lnot A}\,[1]}{A \lor \lnot A} \qquad [\lnot(A \lor \lnot A)]^2}{\times}}{\lnot\lnot(A \lor \lnot A)}\,[2]}{A \lor \lnot A}\,[C]$$

9.1.3 $\lnot(A \land \lnot A)$ 矛盾律

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{[A \land \lnot A]}{A} \quad \cfrac{[A \land \lnot A]}{\lnot A}}{\times}}{\lnot(A \land \lnot A)}$$

9.1.4 $\lnot\lnot A \leftrightarrow A$ 二重否定律

$$\cfrac{\lnot\lnot A}{A}\,[C] \qquad\qquad \cfrac{\cfrac{A \quad [\lnot A]}{\times}}{\lnot\lnot A}$$

9.1.5 $(A \land A) \leftrightarrow A$, $(A \lor A) \leftrightarrow A$ 巾等律

$$\cfrac{A}{A \land A} \qquad\qquad \cfrac{A \quad A}{A \land A}$$

$$\cfrac{A \lor A \quad [A] \quad [A]}{A} \qquad\qquad \cfrac{A}{A \lor A}$$

9.1.6 $(A \land B) \leftrightarrow (B \land A)$, $(A \lor B) \leftrightarrow (B \lor A)$ 交換律

$$\cfrac{\cfrac{A \land B}{B} \quad \cfrac{A \land B}{A}}{B \land A} \qquad\qquad \cfrac{\cfrac{B \land A}{A} \quad \cfrac{B \land A}{B}}{A \land B}$$

$$\cfrac{A \lor B \quad \cfrac{[A]}{B \lor A} \quad \cfrac{[B]}{B \lor A}}{B \lor A} \qquad\qquad \cfrac{B \lor A \quad \cfrac{[B]}{A \lor B} \quad \cfrac{[A]}{A \lor B}}{A \lor B}$$

9.1.7 $(A\wedge(B\wedge C))\leftrightarrow((A\wedge B)\wedge C)$, $(A\vee(B\vee C))\leftrightarrow((A\vee B)\vee C)$ **結合律**

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{A\wedge(B\wedge C)}{A}\quad\dfrac{\dfrac{A\wedge(B\wedge C)}{B\wedge C}}{B}}{A\wedge B}\quad\dfrac{\dfrac{A\wedge(B\wedge C)}{B\wedge C}}{C}}{(A\wedge B)\wedge C}\qquad\dfrac{\dfrac{\dfrac{(A\wedge B)\wedge C}{A\wedge B}}{A}\quad\dfrac{\dfrac{\dfrac{(A\wedge B)\wedge C}{A\wedge B}}{B}\quad\dfrac{(A\wedge B)\wedge C}{C}}{B\wedge C}}{A\wedge(B\wedge C)}$$

$$\dfrac{A\vee(B\vee C)\quad\dfrac{\dfrac{[A]^2}{A\vee B}}{(A\vee B)\vee C}\quad\dfrac{[B\vee C]^2\quad\dfrac{\dfrac{[B]^1}{A\vee B}}{(A\vee B)\vee C}\quad\dfrac{[C]^1}{(A\vee B)\vee C}}{(A\vee B)\vee C}\,[1]}{(A\vee B)\vee C}\,[2]$$

$$\dfrac{(A\vee B)\vee C\quad\dfrac{[A\vee B]^2\quad\dfrac{[A]^1}{A\vee(B\vee C)}\quad\dfrac{\dfrac{[B]^1}{B\vee C}}{A\vee(B\vee C)}}{A\vee(B\vee C)}\,[1]\quad\dfrac{\dfrac{[C]^2}{B\vee C}}{A\vee(B\vee C)}}{A\vee(B\vee C)}\,[2]$$

9.1.8 $(A\wedge(B\vee C))\leftrightarrow((A\wedge B)\vee(A\wedge C))$, $(A\vee(B\wedge C))\leftrightarrow((A\vee B)\wedge(A\vee C))$ **分配律**

$$\dfrac{\dfrac{A\wedge(B\vee C)}{B\vee C}\quad\dfrac{\dfrac{\dfrac{A\wedge(B\vee C)}{A}\quad[B]}{A\wedge B}}{(A\wedge B)\vee(A\wedge C)}\quad\dfrac{\dfrac{\dfrac{A\wedge(B\vee C)}{A}\quad[C]}{A\wedge C}}{(A\wedge B)\vee(A\wedge C)}}{(A\wedge B)\vee(A\wedge C)}$$

$$\dfrac{(A\wedge B)\vee(A\wedge C)\quad\dfrac{\dfrac{[A\wedge B]}{A}\quad\dfrac{\dfrac{[A\wedge B]}{B}}{B\vee C}}{A\wedge(B\vee C)}\quad\dfrac{\dfrac{[A\wedge C]}{A}\quad\dfrac{\dfrac{[A\wedge C]}{C}}{B\vee C}}{A\wedge(B\vee C)}}{A\wedge(B\vee C)}$$

$$\dfrac{A\vee(B\wedge C)\quad\dfrac{\dfrac{[A]}{A\vee B}\quad\dfrac{[A]}{A\vee C}}{(A\vee B)\wedge(A\vee C)}\quad\dfrac{\dfrac{\dfrac{[B\wedge C]}{B}}{A\vee B}\quad\dfrac{\dfrac{[B\wedge C]}{C}}{A\vee C}}{(A\vee B)\wedge(A\vee C)}}{(A\vee B)\wedge(A\vee C)}$$

$$\dfrac{\dfrac{(A\vee B)\wedge(A\vee C)}{A\vee B}\quad\dfrac{[A]^2}{A\vee(B\wedge C)}\quad\dfrac{\dfrac{(A\vee B)\wedge(A\vee C)}{A\vee C}\quad\dfrac{[A]^1}{A\vee(B\wedge C)}\quad\dfrac{\dfrac{[B]^2\quad[C]^1}{B\wedge C}}{A\vee(B\wedge C)}}{A\vee(B\wedge C)}\,[1]}{A\vee(B\wedge C)}\,[2]$$

9.1.9 $(A\wedge(A\vee B))\leftrightarrow A$, $(A\vee(A\wedge B))\leftrightarrow A$ **吸収律**

$$\dfrac{A\wedge(A\vee B)}{A}\qquad\dfrac{A\quad\dfrac{A}{A\vee B}}{A\wedge(A\vee B)}$$

$$\dfrac{A\vee(A\wedge B)\quad[A]\quad\dfrac{[A\wedge B]}{A}}{A}\qquad\dfrac{A}{A\vee(A\wedge B)}$$

9.1.10 $\neg(A\land B)\leftrightarrow(\neg A\lor\neg B)$, $\neg(A\lor B)\leftrightarrow(\neg A\land\neg B)$ **ド・モルガンの法則**

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$[A]^1$}
\AxiomC{$[B]^2$}
\BinaryInfC{$A\land B$}
\AxiomC{$\neg(A\land B)$}
\BinaryInfC{$\times$}
\RightLabel{[1]}
\UnaryInfC{$\neg A$}
\UnaryInfC{$\neg A\lor\neg B$}
\AxiomC{$[\neg(\neg A\lor\neg B)]^3$}
\BinaryInfC{$\times$}
\RightLabel{[2]}
\UnaryInfC{$\neg B$}
\UnaryInfC{$\neg A\lor\neg B$}
\AxiomC{$[\neg(\neg A\lor\neg B)]^3$}
\BinaryInfC{$\times$}
\RightLabel{[3]}
\UnaryInfC{$\neg\neg(\neg A\lor\neg B)$}
\RightLabel{[C]}
\UnaryInfC{$\neg A\lor\neg B$}
\end{prooftree}
$$

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$\neg A\lor\neg B$}
\AxiomC{$[A\land B]^2$}
\UnaryInfC{A}
\AxiomC{$[\neg A]^1$}
\BinaryInfC{$\times$}
\AxiomC{$[A\land B]^2$}
\UnaryInfC{B}
\AxiomC{$[\neg B]^1$}
\BinaryInfC{$\times$}
\RightLabel{[1]}
\TrinaryInfC{$\times$}
\RightLabel{[2]}
\UnaryInfC{$\neg(A\land B)$}
\end{prooftree}
$$

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$[A]^1$}
\UnaryInfC{$A\lor B$}
\AxiomC{$\neg(A\lor B)$}
\BinaryInfC{$\times$}
\RightLabel{[1]}
\UnaryInfC{$\neg A$}
\AxiomC{$[B]^2$}
\UnaryInfC{$A\lor B$}
\AxiomC{$\neg(A\lor B)$}
\BinaryInfC{$\times$}
\RightLabel{[2]}
\UnaryInfC{$\neg B$}
\BinaryInfC{$\neg A\land\neg B$}
\end{prooftree}
$$

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$[A\lor B]^2$}
\AxiomC{$[A]^1$}
\AxiomC{$\neg A\land\neg B$}
\UnaryInfC{$\neg A$}
\BinaryInfC{$\times$}
\AxiomC{$[B]^1$}
\AxiomC{$\neg A\land\neg B$}
\UnaryInfC{$\neg B$}
\BinaryInfC{$\times$}
\RightLabel{[1]}
\TrinaryInfC{$\times$}
\RightLabel{[2]}
\UnaryInfC{$\neg(A\lor B)$}
\end{prooftree}
$$

9.1.11 $A\to B\leftrightarrow\neg B\to\neg A$ **対偶律**

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$[A]^1$}
\AxiomC{$A\to B$}
\BinaryInfC{B}
\AxiomC{$[\neg B]^2$}
\BinaryInfC{$\times$}
\RightLabel{[1]}
\UnaryInfC{$\neg A$}
\RightLabel{[2]}
\UnaryInfC{$\neg B\to\neg A$}
\end{prooftree}
\qquad
\begin{prooftree}
\AxiomC{$[A]^2$}
\AxiomC{$[\neg B]^1$}
\AxiomC{$\neg B\to\neg A$}
\BinaryInfC{$\neg A$}
\BinaryInfC{$\times$}
\RightLabel{[1]}
\UnaryInfC{$\neg\neg B$}
\RightLabel{[C]}
\UnaryInfC{B}
\RightLabel{[2]}
\UnaryInfC{$A\to B$}
\end{prooftree}
$$

9.1.12 $(\neg A\land(A\lor B))\to B$ **選言的三段論法**

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$\neg A\land(A\lor B)$}
\UnaryInfC{$A\lor B$}
\AxiomC{$[A]$}
\AxiomC{$\neg A\land(A\lor B)$}
\UnaryInfC{$\neg A$}
\BinaryInfC{$\times$}
\RightLabel{[I]}
\UnaryInfC{B}
\AxiomC{$[B]$}
\TrinaryInfC{B}
\end{prooftree}
$$

9.1.13 $(A\to B)\land(B\to C)\to(A\to C)$ **推移律**

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$[A]$}
\AxiomC{$(A\to B)\land(B\to C)$}
\UnaryInfC{$A\to B$}
\BinaryInfC{B}
\AxiomC{$(A\to B)\land(B\to C)$}
\UnaryInfC{$B\to C$}
\BinaryInfC{C}
\UnaryInfC{$A\to C$}
\end{prooftree}
$$

9.1.14 $(A\land(A\to B))\to B$ **肯定式**

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$A\land(A\to B)$}
\UnaryInfC{A}
\AxiomC{$A\land(A\to B)$}
\UnaryInfC{$A\to B$}
\BinaryInfC{B}
\end{prooftree}
$$

9.1.15 $(\neg B \land (A \to B)) \to \neg A$ **否定式**

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[A] \qquad \dfrac{\neg B \land (A \to B)}{A \to B}}{B} \qquad \dfrac{\neg B \land (A \to B)}{\neg B}}{\times}}{\neg A}$$

9.1.16 $A \to (A \lor B)$, $B \to (A \lor B)$ **拡大律（付加律）**

$$\dfrac{A}{A \lor B} \qquad\qquad \dfrac{B}{A \lor B}$$

9.1.17 $(A \land B) \to A$, $(A \land B) \to B$ **縮小律**

$$\dfrac{A \land B}{A} \qquad\qquad \dfrac{A \land B}{B}$$

9.1.18 $(A \to (B \to C)) \to ((A \land B) \to C)$ **移入律**

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[A \land B]}{B} \qquad \dfrac{\dfrac{[A \land B]}{A} \qquad A \to (B \to C)}{B \to C}}{C}}{(A \land B) \to C}$$

9.1.19 $((A \land B) \to C) \to (A \to (B \to C))$ **移出律**

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[A]^2 \quad [B]^1}{A \land B} \qquad (A \land B) \to C}{C}}{B \to C}\,[1]}{A \to (B \to C)}\,[2]$$

9.1.20 $((A \to C) \land (B \to C)) \to ((A \lor B) \to C)$ **構成的両刀論法**

$$\dfrac{\dfrac{[A \lor B]^2 \qquad \dfrac{[A]^1 \qquad \dfrac{(A \to C) \land (B \to C)}{A \to C}}{C} \qquad \dfrac{[B]^1 \qquad \dfrac{(A \to C) \land (B \to C)}{B \to C}}{C}}{C}\,[1]}{(A \lor B) \to C}\,[2]$$

9.1.21 $A \to (B \to A)$ **添加律**

$$\dfrac{A}{B \to A}$$

9.1.22 $\neg A \to (A \to B)$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[A] \quad \neg A}{\times}}{B}\,[I]}{A \to B}$$

9.1.23 $((A \to B) \to A) \to A$ **パースの法則**

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[A]^1 \quad [\neg A]^2}{\times}}{B}\,[I]}{A \to B}\,[1] \quad (A \to B) \to A}{A} \quad [\neg A]^2}{\times}}{\neg\neg A}\,[2]}{A}\,[C]$$

9.1.24 $A \to (B \to (A \wedge B))$

$$\dfrac{\dfrac{A \quad [B]}{A \wedge B}}{B \to (A \wedge B)}$$

9.1.25 $(A \to B) \leftrightarrow (\neg A \vee B)$, $(A \to B) \leftrightarrow \neg(A \wedge \neg B)$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[A]^1 \quad A \to B}{B}}{\neg A \vee B} \quad [\neg(\neg A \vee B)]^2}{\times}}{\neg A}\,[1]}{\neg A \vee B} \quad [\neg(\neg A \vee B)]^2}{\times}}{\neg\neg(\neg A \vee B)}\,[2]}{\neg A \vee B}\,[C]$$

$$\dfrac{\dfrac{\neg A \vee B \quad \dfrac{\dfrac{[A]^2 \quad [\neg A]^1}{\times}}{B}\,[I] \quad [B]^1}{B}\,[1]}{A \to B}\,[2]$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[A \wedge \neg B]}{A} \quad A \to B}{B} \quad \dfrac{[A \wedge \neg B]}{\neg B}}{\times}}{\neg(A \wedge \neg B)}$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[A]^2 \quad [\neg B]^1}{A \wedge \neg B} \quad \neg(A \wedge \neg B)}{\times}}{\neg\neg B}\,[1]}{B}\,[C]}{A \to B}\,[2]$$

9.1.26 $(A \to (B \to C)) \leftrightarrow (B \to (A \to C))$ **入れ替え律**

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[B]^2 \quad \dfrac{[A]^1 \quad A \to (B \to C)}{B \to C}}{C}}{A \to C}\,[1]}{B \to (A \to C)}\,[2]
\qquad
\dfrac{\dfrac{\dfrac{[A]^2 \quad \dfrac{[B]^1 \quad B \to (A \to C)}{A \to C}}{C}}{B \to C}\,[1]}{A \to (B \to C)}\,[2]$$

9.1.27 $(A \to B) \to ((A \to C) \to (A \to (B \wedge C)))$ **合成律**

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[A]^1 \quad A \to B}{B} \quad \dfrac{[A]^1 \quad [A \to C]^2}{C}}{B \wedge C}}{A \to (B \wedge C)}\,[1]}{(A \to C) \to (A \to (B \wedge C))}\,[2]$$

9.2 証明できる論理式の例（追加）の全証明例

9.2.1 $\forall xAx \leftrightarrow \forall yAy$, $\exists xAx \leftrightarrow \exists yAy$

$$\dfrac{\dfrac{\forall xAx}{Aa}}{\forall yAy} \qquad \dfrac{\dfrac{\forall yAy}{Aa}}{\forall xAx} \qquad \dfrac{\dfrac{\exists xAx}{Aa}}{\exists yAy} \qquad \dfrac{\dfrac{\exists yAy}{Aa}}{\exists xAx}$$

9.2.2 $\forall x(Ax\land Bx) \leftrightarrow (\forall xAx\land\forall xBx)$, $\exists x(Ax\land Bx) \rightarrow (\exists xAx\land\exists xBx)$, $(\forall xAx\lor\forall xBx) \rightarrow \forall x(Ax\lor Bx)$, $\exists x(Ax\lor Bx) \leftrightarrow (\exists xAx\lor\exists xBx)$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\forall x(Ax\land Bx)}{Aa\land Ba}}{Aa}}{\forall xAx} \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\forall x(Ax\land Bx)}{Aa\land Ba}}{Ba}}{\forall xBx}}{\forall xAx\land\forall xBx} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\forall xAx\land\forall xBx}{\forall xAx}}{Aa} \quad \dfrac{\dfrac{\forall xAx\land\forall xBx}{\forall xBx}}{Ba}}{Aa\land Ba}}{\forall x(Ax\land Bx)}$$

$$\dfrac{\exists x(Ax\land Bx) \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[Aa\land Ba]}{Aa}}{\exists xAx} \quad \dfrac{\dfrac{[Aa\land Ba]}{Ba}}{\exists xBx}}{\exists xAx\land\exists xBx}}{\exists xAx\land\exists xBx} \qquad \dfrac{\forall xAx\lor\forall xBx \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[\forall xAx]}{Aa}}{Aa\lor Ba}}{\forall x(Ax\lor Bx)} \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[\forall xBx]}{Ba}}{Aa\lor Ba}}{\forall x(Ax\lor Bx)}}{\forall x(Ax\lor Bx)}$$

$$\dfrac{\exists x(Ax\lor Bx) \quad \dfrac{[Aa\lor Ba]^2 \quad \dfrac{\dfrac{[Aa]^1}{\exists Ax}}{\exists xAx\lor\exists xBx} \quad \dfrac{\dfrac{[Ba]^1}{\exists Bx}}{\exists xAx\lor\exists xBx}}{\exists xAx\lor\exists xBx}\,[1]}{\exists xAx\lor\exists xBx}\,[2]$$

$$\dfrac{\exists xAx\lor\exists xBx \quad \dfrac{[\exists xAx]^3 \quad \dfrac{\dfrac{[Aa]^1}{Aa\lor Ba}}{\exists x(Ax\lor Bx)}}{\exists x(Ax\lor Bx)}\,[1] \quad \dfrac{[\exists xBx]^3 \quad \dfrac{\dfrac{[Ba]^2}{Aa\lor Ba}}{\exists x(Ax\lor Bx)}}{\exists x(Ax\lor Bx)}\,[2]}{\exists x(Ax\lor Bx)}\,[3]$$

9.2.3 $\forall x(A \wedge Bx) \leftrightarrow (A \wedge \forall xBx)$, $\exists x(A \wedge Bx) \leftrightarrow (A \wedge \exists xBx)$, $\forall x(A \vee Bx) \leftrightarrow (A \vee \forall xBx)$, $\exists x(A \vee Bx) \leftrightarrow (A \vee \exists xBx)$

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$\forall x(A \wedge Bx)$}
\UnaryInfC{$A \wedge Ba$}
\UnaryInfC{A}
\AxiomC{$\forall x(A \wedge Bx)$}
\UnaryInfC{$A \wedge Ba$}
\UnaryInfC{Ba}
\UnaryInfC{$\forall xBx$}
\BinaryInfC{$A \wedge \forall xBx$}
\end{prooftree}
\qquad
\begin{prooftree}
\AxiomC{$A \wedge \forall xBx$}
\UnaryInfC{A}
\AxiomC{$A \wedge \forall xBx$}
\UnaryInfC{$\forall xBx$}
\UnaryInfC{Ba}
\BinaryInfC{$A \wedge Ba$}
\UnaryInfC{$\forall x(A \wedge Bx)$}
\end{prooftree}
$$

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$\exists x(A \wedge Bx)$}
\AxiomC{$[A \wedge Ba]^1$}
\UnaryInfC{A}
\RightLabel{[1]}
\BinaryInfC{A}
\AxiomC{$\exists x(A \wedge Bx)$}
\AxiomC{$[A \wedge Ba]^2$}
\UnaryInfC{Ba}
\UnaryInfC{$\exists xBx$}
\RightLabel{[2]}
\BinaryInfC{$\exists xBx$}
\BinaryInfC{$A \wedge \exists xBx$}
\end{prooftree}
\qquad
\begin{prooftree}
\AxiomC{$A \wedge \exists xBx$}
\UnaryInfC{$\exists xBx$}
\AxiomC{$A \wedge \exists xBx$}
\UnaryInfC{A}
\AxiomC{$[Ba]$}
\BinaryInfC{$A \wedge Ba$}
\UnaryInfC{$\exists x(A \wedge Bx)$}
\BinaryInfC{$\exists x(A \wedge Bx)$}
\end{prooftree}
$$

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$\forall x(A \vee Bx)$}
\UnaryInfC{$A \vee Ba$}
\AxiomC{$[A]^2$}
\AxiomC{$[A]^1$}
\UnaryInfC{$A \vee \forall xBx$}
\AxiomC{$[\neg(A \vee \forall xBx)]^3$}
\BinaryInfC{$\times$}
\RightLabel{[1]}
\UnaryInfC{$\neg A$}
\BinaryInfC{$\times$}
\UnaryInfC{Ba}
\AxiomC{$[Ba]^2$}
\RightLabel{[2]}
\TrinaryInfC{Ba}
\UnaryInfC{$\forall xBx$}
\UnaryInfC{$A \vee \forall xBx$}
\AxiomC{$[\neg(A \vee \forall xBx)]^3$}
\BinaryInfC{$\times$}
\RightLabel{[3]}
\UnaryInfC{$\neg\neg(A \vee \forall xBx)$}
\UnaryInfC{$A \vee \forall xBx$}
\end{prooftree}
$$

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$A \vee \forall xBx$}
\AxiomC{$[A]$}
\UnaryInfC{$A \vee Ba$}
\AxiomC{$[\forall xBx]$}
\UnaryInfC{Ba}
\UnaryInfC{$A \vee Ba$}
\TrinaryInfC{$A \vee Ba$}
\UnaryInfC{$\forall x(A \vee Bx)$}
\end{prooftree}
$$

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$\exists x(A \vee Bx)$}
\AxiomC{$[A \vee Ba]^2$}
\AxiomC{$[A]^1$}
\UnaryInfC{$A \vee \exists xBx$}
\AxiomC{$[Ba]^1$}
\UnaryInfC{$\exists xBx$}
\UnaryInfC{$A \vee \exists xBx$}
\RightLabel{[1]}
\TrinaryInfC{$A \vee \exists xBx$}
\RightLabel{[2]}
\BinaryInfC{$A \vee \exists xBx$}
\end{prooftree}
\qquad
\begin{prooftree}
\AxiomC{$A \vee \exists xBx$}
\AxiomC{$[A]^2$}
\UnaryInfC{$A \vee Ba$}
\UnaryInfC{$\exists x(A \vee Bx)$}
\AxiomC{$[\exists xBx]^2$}
\AxiomC{$[Ba]^1$}
\UnaryInfC{$A \vee Ba$}
\UnaryInfC{$\exists x(A \vee Bx)$}
\RightLabel{[1]}
\BinaryInfC{$\exists x(A \vee Bx)$}
\RightLabel{[2]}
\TrinaryInfC{$\exists x(A \vee Bx)$}
\end{prooftree}
$$

9.2.4 $\forall x(A \to Bx) \leftrightarrow (A \to \forall xBx)$, $\exists x(A \to Bx) \leftrightarrow (A \to \exists xBx)$, $\forall x(Ax \to B) \leftrightarrow (\exists xAx \to B)$, $\exists x(Ax \to B) \leftrightarrow (\forall xAx \to B)$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[A] \quad \dfrac{\forall x(A \to Bx)}{A \to Ba}}{Ba}}{\forall xBx}}{A \to \forall xBx}$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[A] \quad A \to \forall xBx}{\forall xBx}}{Ba}}{A \to Ba}}{\forall x(A \to Bx)}$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[A]^3 \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[A]^2 \quad A \to \exists xBx}{\exists xBx} \quad \dfrac{\dfrac{[Ba]^1}{A \to Ba}}{\exists x(A \to Bx)}}{\exists x(A \to Bx)}\,[1] \quad [\neg\exists x(A \to Bx)]^4}{\times}}{\neg A}\,[2]}{\times}}{Ba}}{A \to Ba}\,[3]}{\exists x(A \to Bx)} \quad [\neg\exists x(A \to Bx)]^4}{\dfrac{\dfrac{\times}{\neg\neg\exists x(A \to Bx)}\,[4]}{\exists x(A \to Bx)}}$$

$$\dfrac{\exists x(A \to Bx) \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[A]^1 \quad [A \to Ba]^2}{Ba}}{\exists xBx}}{A \to \exists xBx}\,[1]}{A \to \exists xBx}\,[2]$$

$$\dfrac{\dfrac{[\exists xAx]^2 \quad \dfrac{[Aa]^1 \quad \dfrac{\forall x(Ax \to B)}{Aa \to B}}{B}}{B}\,[1]}{\exists xAx \to B}\,[2]$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[Aa]}{\exists xAx} \quad \exists xAx \to B}{B}}{Aa \to B}}{\forall x(Ax \to B)}$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[Aa]^1 \quad [\neg Aa]^2}{\times}}{B}}{Aa \to B}\,[1]}{\exists x(Ax \to B)} \quad [\neg\exists x(Ax \to B)]^3}{\times}}{\neg\neg Aa}\,[2]}{Aa}}{\forall xAx} \quad \forall xAx \to B}{B}}{Aa \to B}}{\exists x(Ax \to B)} \quad [\neg\exists x(Ax \to B)]^3}{\dfrac{\dfrac{\times}{\neg\neg\exists x(Ax \to B)}\,[3]}{\exists x(Ax \to B)}}$$

$$\dfrac{\exists x(Ax \to B) \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[\forall xAx]^1}{Aa} \quad [Aa \to B]^2}{B}}{\forall xAx \to B}\,[1]}{\forall xAx \to B}\,[2]$$

9.2.5 $\neg\forall xAx \leftrightarrow \exists x\neg Ax$, $\neg\exists xAx \leftrightarrow \forall x\neg Ax$ **ド・モルガンの法則**

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg Aa]^1}{\exists x\neg Ax}\quad [\neg\exists x\neg Ax]^2}{\times}}{\neg\neg Aa}\,[1]}{Aa}}{\forall xAx}\qquad \neg\forall xAx}{\times}}{\neg\neg\exists x\neg Ax}\,[2]}{\exists x\neg Ax}$$

$$\dfrac{\exists x\neg Ax\qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[\forall xAx]^1}{Aa}\quad [\neg Aa]^2}{\times}}{\neg\forall xAx}\,[1]}{\neg\forall xAx}\,[2]$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[Aa]}{\exists xAx}\quad \neg\exists xAx}{\times}}{\neg Aa}}{\forall x\neg Ax}$$

$$\dfrac{\dfrac{[\exists xAx]^2\qquad \dfrac{[Aa]^1\quad \dfrac{\forall x\neg Ax}{\neg Aa}}{\times}}{\times}\,[1]}{\neg\exists xAx}\,[2]$$

9.2.6 $\neg\forall x(Ax\rightarrow Bx) \leftrightarrow \exists x(Ax\wedge\neg Bx)$, $\neg\exists x(Ax\wedge Bx) \leftrightarrow \forall x(Ax\rightarrow\neg Bx)$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[Aa]^3\quad [\neg Ba]^2}{Aa\wedge\neg Ba}\qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[Aa\wedge\neg Ba]^1}{\exists x(Ax\wedge\neg Bx)}\quad [\neg\exists x(Ax\wedge\neg Bx)]^4}{\times}}{\neg(Aa\wedge\neg Ba)}\,[1]}{\times}}{\neg\neg Ba}\,[2]}{Ba}}{Aa\rightarrow Ba}\,[3]}{\forall x(Ax\rightarrow Bx)}\qquad \neg\forall x(Ax\rightarrow Bx)}{\times}}{\neg\neg\exists x(Ax\wedge\neg Bx)}\,[4]}{\exists x(Ax\wedge\neg Bx)}$$

$$\dfrac{\exists x(Ax\wedge\neg Bx)\qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[Aa\wedge\neg Ba]^2}{Aa}\quad \dfrac{[\forall x(Ax\rightarrow Bx)]^1}{Aa\rightarrow Ba}}{Ba}\quad \dfrac{[Aa\wedge\neg Ba]^2}{\neg Ba}}{\times}}{\neg\forall x(Ax\rightarrow Bx)}\,[1]}{\neg\forall x(Ax\rightarrow Bx)}\,[2]$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[Aa]^3\quad [Ba]^2}{Aa\wedge Ba}\qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[Aa\wedge Ba]^1}{\exists x(Ax\wedge Bx)}\quad \neg\exists x(Ax\wedge Bx)}{\times}}{\neg(Aa\wedge Ba)}\,[1]}{\times}}{\neg Ba}\,[2]}{Aa\rightarrow\neg Ba}\,[3]}{\forall x(Ax\rightarrow\neg Bx)}$$

$$\dfrac{\dfrac{[\exists x(Ax\wedge Bx)]^2\qquad \dfrac{\dfrac{[Aa\wedge Ba]^1}{Ba}\quad \dfrac{\dfrac{[Aa\wedge Ba]^1}{Aa}\quad \dfrac{\forall(Ax\rightarrow\neg Bx)}{Aa\rightarrow\neg Ba}}{\neg Ba}}{\times}}{\times}\,[1]}{\neg\exists x(Ax\wedge Bx)}\,[2]$$

9.2.7 $\forall x\forall yAxy \leftrightarrow \forall y\forall xAxy$, $\exists x\exists yAxy \leftrightarrow \exists y\exists xAxy$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\forall x\forall yAxy}{\forall yAay}}{Aab}}{\forall xAxb}}{\forall y\forall xAxy} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\forall y\forall xAxy}{\forall xAxb}}{Aab}}{\forall yAay}}{\forall x\forall yAxy}$$

$$\dfrac{\exists x\exists yAxy \quad \dfrac{[\exists yAay]^2 \quad \dfrac{\dfrac{[Aab]^1}{\exists xAxb}}{\exists y\exists xAxy}}{\exists y\exists xAxy}\,[1]}{\exists y\exists xAxy}\,[2] \qquad \dfrac{\exists y\exists xAxy \quad \dfrac{[\exists xAxb]^2 \quad \dfrac{\dfrac{[Aab]^1}{\exists yAay}}{\exists x\exists yAxy}}{\exists x\exists yAxy}\,[1]}{\exists x\exists yAxy}\,[2]$$

9.2.8 $\exists x\forall yAxy \rightarrow \forall y\exists xAxy$

$$\dfrac{\exists x\forall yAxy \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[\forall yAay]}{Aab}}{\exists xAxb}}{\forall y\exists xAxy}}{\forall y\exists xAxy}$$

9.3 古典命題論理での必殺技

古典命題論理は完全であるので、トートロジーである全ての論理式を証明することが可能です。しかし、実際には自然演繹の方法による証明が中々思いつかない場合もあります。ここではそういう人を対象に、恐らく多分ほぼ確実に証明することが出来る方法を紹介します。この方法は最終手段であり、非常に時間がかかりますので予め御了承下さい。また、ここでは自分が考えた独自の用語を利用しているところもありますし、そもそも自分は記号論理学の初心者なので、プロの人に言わせれば滅茶苦茶なことを言っているものもあると思わます。それを理解した場合だけ読み進めて下さい。

今回例として証明するのは、$\neg(A \land B) \to (\neg A \lor \neg B)$ です。9.1.10 にて、証明がされていますが、別証明を試みます。まずは、実際に真理表を書いて本当にトートロジーになっているかを調べてみましょう（表 1)。当然の事ながら、トートロジーになっています。

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$A \land B$	$\neg(A \land B)$	$\neg A \lor \neg B$	$\neg(A \land B) \to (\neg A \lor \neg B)$
T	T	F	F	T	F	F	T
T	F	F	T	F	T	T	T
F	T	T	F	F	T	T	T
F	F	T	T	F	T	T	T

表 1　$\neg(A \land B) \to (\neg A \lor \neg B)$ の真理値表

さて、ここで A, B の真理値のパターンを全て列挙することを考えます。何故かと訊かれると困りますが、取り敢えず話を先に進めましょう。これは非常に簡単に出来ます。古典命題論理は排中律が証明できるので、以下のように書けます。

$$\dfrac{\begin{matrix}\vdots\\ A\lor\neg A\end{matrix} \quad \dfrac{\begin{matrix}\vdots\\ B\lor\neg B\end{matrix}\quad \begin{matrix}[A]^3\ [B]^1\\ \vdots\\ \varphi\end{matrix}\quad \begin{matrix}[A]^3\ [\neg B]^1\\ \vdots\\ \varphi\end{matrix}}{\varphi}[1] \quad \dfrac{\begin{matrix}\vdots\\ B\lor\neg B\end{matrix}\quad \begin{matrix}[\neg A]^3\ [B]^2\\ \vdots\\ \varphi\end{matrix}\quad \begin{matrix}[\neg A]^3\ [\neg B]^2\\ \vdots\\ \varphi\end{matrix}}{\varphi}[2]}{\varphi}[3]$$

これで自然演繹の方法で、全てのパターンを列挙することが出来ました。

さて次はここからどんどんと目的の論理式を構築することを目指していきます。ここで重要なのは、真理表において T となっている物についてはそのものを、F となっているものについては否定（¬ が付）されたものが証明出来ることです。何故ならば、全ての論理演算子ついて、「1 つ前の構築において条件を満たしているならば、この構築でも条件を満たすように出来る」ことが証明でき、且つ始めの論理式（命題記号）は必ず条件を満たしているからです。実際の証明は以下のようになります。

φ	ψ	$\varphi \land \psi$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

$$\dfrac{\varphi \quad \psi}{\varphi \land \psi} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[\varphi \land \psi]}{\psi} \quad \neg\psi}{\times}}{\neg(\varphi \land \psi)} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[\varphi \land \psi]}{\varphi} \quad \neg\varphi}{\times}}{\neg(\varphi \land \psi)} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[\varphi \land \psi]}{\varphi} \quad \neg\varphi}{\times}}{\neg(\varphi \land \psi)}$$

φ	ψ	$\varphi \vee \psi$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

$$\frac{\varphi}{\varphi \vee \psi} \qquad \frac{\varphi}{\varphi \vee \psi} \qquad \frac{\psi}{\varphi \vee \psi} \qquad \cfrac{\cfrac{[\varphi \vee \psi] \quad \cfrac{[\varphi] \quad \neg\varphi}{\times} \quad \cfrac{[\psi] \quad \neg\psi}{\times}}{\times}}{\neg(\varphi \vee \psi)}$$

φ	ψ	$\varphi \to \psi$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

$$\frac{\psi}{\varphi \to \psi} \qquad \cfrac{\cfrac{\cfrac{\varphi \quad [\varphi \to \psi]}{\psi} \quad \neg\psi}{\times}}{\neg(\varphi \to \psi)} \qquad \frac{\psi}{\varphi \to \psi} \qquad \cfrac{\cfrac{\cfrac{[\varphi] \quad \neg\varphi}{\times}}{\psi}}{\varphi \to \psi}$$

φ	$\neg\varphi$
T	F
F	T

$$\cfrac{\cfrac{\varphi \quad [\neg\varphi]}{\times}}{\neg\neg\varphi} \qquad \neg\varphi$$

証明出来る論理式は必ずトートロジーであるので、構築すべき論理式の真理値は常に T であることから、式そのものが必ず証明できます。以上によって、機械的に証明が出来るようになりました。

それでは、上で挙げた、$\neg(A \wedge B) \to (\neg A \vee \neg B)$ を証明してみましょう。まずは、A が T で B も T 時を考えます。この時、上で書いた真理表によれば $\neg(A \wedge B)$ が F であるので、$\neg A \vee \neg B$ を構築しなくても証明が出来ます。やってみましょう。まずは、$A \wedge B$ を構築します。これは簡単に出来るでしょう。

$$\frac{A \quad B}{A \wedge B}$$

次は、$\neg(A \wedge B)$ の構築ですが、これは真理表によれば F であるので、$\neg\neg(A \wedge B)$ を構築します。

$$\cfrac{\cfrac{A \quad B}{A \wedge B} \quad [\neg(A \wedge B)]}{\neg\neg(A \wedge B)}$$

そして最後に $\neg(A \wedge B) \to (\neg A \vee \neg B)$ を構築します。

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{[\neg(A \wedge B)] \quad \cfrac{\cfrac{A \quad B}{A \wedge B} \quad [\neg(A \wedge B)]}{\neg\neg(A \wedge B)}}{\times}}{\neg A \vee \neg B}}{\neg(A \wedge B) \to (\neg A \vee \neg B)}$$

ほら出来た。他の 3 つについては $\neg A \vee \neg B$ が T であるので、先程とは逆に $\neg(A \wedge B)$ を構築する必要がありません。2 度目以降は詳細を書くのが面倒なので省略します。以上の方法によって構築をして、全部組み合わせると、

$$\dfrac{\begin{matrix}\vdots\\ A\vee\neg A\end{matrix}\quad \dfrac{\begin{matrix}\vdots\\ B\vee\neg B\end{matrix}\quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg(A\wedge B)]\quad\dfrac{\dfrac{[A]\quad[B]}{A\wedge B}\quad[\neg(A\wedge B)]}{\neg\neg(A\wedge B)}}{\times}}{\neg A\vee\neg B}}{\neg(A\wedge B)\to(\neg A\vee\neg B)}\quad \dfrac{\dfrac{[\neg B]}{\neg A\vee\neg B}}{\neg(A\wedge B)\to(\neg A\vee\neg B)}}{\neg(A\wedge B)\to(\neg A\vee\neg B)}\quad \dfrac{\begin{matrix}\vdots\\ B\vee\neg B\end{matrix}\quad \dfrac{\dfrac{[\neg A]}{\neg A\vee\neg B}}{\neg(A\wedge B)\to(\neg A\vee\neg B)}\quad \dfrac{\dfrac{[\neg A]}{\neg A\vee\neg B}}{\neg(A\wedge B)\to(\neg A\vee\neg B)}}{\neg(A\wedge B)\to(\neg A\vee\neg B)}}{\neg(A\wedge B)\to(\neg A\vee\neg B)}$$

となり証明が完成します。実際の答案を書く際には、排中律の証明も載せる必要性があるので注意が必要です。

さて、ここまでで排中律によって全てのパターンを列挙し、式を構築していくという手法を取りました。この方法を使えば前提のない命題論理の証明問題であれば、どんな問題であっても証明可能です。しかし、この答案を実際に書くことを自分はしたくありません。何故ならば排中律の証明を今回の場合は 3 回も書かなければならないからです。今回の例では、少し考えれば排中律の証明を 2 回にすることも可能ですが、出来る事ならば一度も書きたくないです。

そこで図 1 のようなテンプレートを考えます。ここで、α, β には、$A, \neg A, B, \neg B$ のいずれかが入ります。片方が A が入った論理式ならば、もう片方は B が入った論理式です。

これを見てみると、始めは、α, β を利用した構築で φ を構築し、次に $\neg\alpha, \beta$ を利用した構築で φ を構築し、最後に $\neg\beta$ だけで構築を行えば証明できることが分かります。ここで重要なのは、最後の構築は A, B の内片方しか利用できないということです。故に全ての論理式の証明に利用できるわけではありません。しかし、この証明には全く排中律を使っていません。これは嬉しいです。排中律なんていらなかったんです。

今回の例の場合は、$\neg\beta$ として $\neg A$ または $\neg B$ を取れば証明できるのはお分かりになるでしょうか。何故ならば、$\neg A$ または $\neg B$ から、$\neg A \vee \neg B$ が証明可能であり、そうすれば、$\neg(A \wedge B) \to (\neg A \vee \neg B)$ も証明できます。そこで、今回は $\alpha = A, \beta = B$ として証明してみます（図 2）。殆どさっきと変わらないので簡単に出来ました！

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}[\alpha]^1\quad[\beta]^2\\ \vdots\\ \varphi\end{matrix}\quad[\neg\varphi]^3}{\times}}{\neg\alpha}\,[1]\quad[\beta]^2\\ \vdots\\ \varphi\end{matrix}\quad[\neg\varphi]^3}{\times}}{\neg\beta}\,[2]\\ \vdots\\ \varphi\end{matrix}\quad[\neg\varphi]^3}{\times}}{\neg\neg\varphi}\,[3]}{\varphi}$$

図 1

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg(A\wedge B)]\quad\dfrac{\dfrac{[A]\quad[B]}{A\wedge B}\quad[\neg(A\wedge B)]}{\neg\neg(A\wedge B)}\,[a]}{\times}\,[*]}{\neg A\vee\neg B}}{\neg(A\wedge B)\to(\neg A\vee\neg B)}\quad[\neg(\neg(A\wedge B)\to(\neg A\vee\neg B))]}{\times}}{\neg A}}{\neg A\vee\neg B}}{\neg(A\wedge B)\to(\neg A\vee\neg B)}\quad[\neg(\neg(A\wedge B)\to(\neg A\vee\neg B))]}{\times}}{\neg B}}{\neg A\vee\neg B}}{\neg(A\wedge B)\to(\neg A\vee\neg B)}\quad[\neg(\neg(A\wedge B)\to(\neg A\vee\neg B))]}{\times}}{\neg\neg(\neg(A\wedge B)\to(\neg A\vee\neg B))}}{\neg(A\wedge B)\to(\neg A\vee\neg B)}$$

図 2　$\neg(A \wedge B) \to (\neg A \vee \neg B)$ の証明

さて、この証明を見て見ると、無駄があるということが分かります。[$*$] と付けた部分です。$\lnot(A\land B)$ と $\lnot\lnot(A\land B)$ で $\times$ を作ってますが、$\lnot\lnot(A\land B)$ の方は、[a] で $A\land B$ から作っているだけです。ならば、始めから直接 $\times$ を作ったほうが良いのではないでしょうか。排中律で全パターン列挙した時は無視しましたが、やはり気になります。改善してみましょう（図 3)。ほんの少し短くなりました。良い傾向です。その証拠に

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[A]\quad[B]}{A\land B}\quad[\lnot(A\land B)]}{\times}}{\lnot A\lor\lnot B}}{\lnot(A\land B)\to(\lnot A\lor\lnot B)}\quad[\lnot(\lnot(A\land B)\to(\lnot A\lor\lnot B))]}{\times}}{\lnot A}}{\lnot A\lor\lnot B}}{\lnot(A\land B)\to(\lnot A\lor\lnot B)}\quad[\lnot(\lnot(A\land B)\to(\lnot A\lor\lnot B))]}{\times}}{\lnot B}}{\lnot A\lor\lnot B}}{\lnot(A\land B)\to(\lnot A\lor\lnot B)}\quad[\lnot(\lnot(A\land B)\to(\lnot A\lor\lnot B))]}{\times}}{\lnot\lnot(\lnot(A\land B)\to(\lnot A\lor\lnot B))}}{\lnot(A\land B)\to(\lnot A\lor\lnot B)}
$$

図 3 $\lnot(A\land B)\to(\lnot A\lor\lnot B)$ の証明 改善版

文字がちょっと大きくなりました。もっと短くしたいですが、この図を眺めているだけでは少し難しいので一度違う話に移りたいと思います。

これまでは、何も前提が無い場合を考えてきました。つまり、$\vdash\varphi$ の形のみです。しかし、実際の問題では前提がある $\varphi\vdash\psi$ のような形も多いです。$\varphi\vdash\psi \quad\Leftrightarrow\ \vdash\varphi\to\psi$ なので $\vdash\varphi\to\psi$ を証明すれば良いと思う人が居るかも知れませんが、その同値はあくまでも自然演繹の方法の外で成り立つ同値に過ぎないので、「自然演繹の方法で証明せよ」と言われた際には利用できません。勿論、→E を利用すれば良いのですが、この方法だと長くなっちゃうので嫌なのです。そこでちゃんと方法を考えましょう。

では、具体例として $\lnot(A\land B)\vdash\lnot A\lor\lnot B$ を証明したいと思います。これは上の例と同じく 9.1.10 で証明されています。

前提を含んでいる場合は、前提に含まれる全ての論理式が T の時に右の論理式が成り立つということです。まずはそれを確かめて見るために真理表を書いてみましょう（表 2)。当然のことながら、前提の $\lnot(A\land B)$ が

A	B	$\lnot A$	$\lnot B$	$A\land B$	$\lnot(A\land B)$	$\lnot A\lor\lnot B$
T	T	F	F	T	F	F
T	F	F	T	F	T	T
F	T	T	F	F	T	T
F	F	T	T	F	T	T

表 2 $\lnot(A\land B)\vdash\lnot A\lor\lnot B$ の真理値表

T の時 $\lnot A\lor\lnot B$ も T になっています。

前提というのは非常に便利で、証明も無しに、そして仮定のように後からキャンセル必要もなく、推論線の一番上に書くことが出来ます。また、これまでお話ししたように、真理表上で F になっているものは、否定さ

れたもの（もしくは ¬ が取れたもの）が証明できます。つまり、前提が F の場合は前提と矛盾したものが証明できるので、矛盾規則によって証明したい論理式が強制的に導き出せます。一方、真理表上で前提が T の場合は、証明したい論理式も T であるはずなので、それを直接構築しに行けば良いということになります。

それではやってみましょう。もう排中律を証明したりするのは面倒なので、図 1 のテンプレートで書きたいと思います。α, β をそれぞれ何にすべきかをまず考えなければなりませんが、$\neg\beta = \neg B$ ならば A が無くても証明できそうなので、$\alpha = A, \beta = B$ とすることにしましょう。ということでちゃっちゃっと証明しちゃいました (図 4)。これならばまだ、現実的な記述量ですね。しかし、無駄はあります。[$*$] を付けた部分です。こ

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[A]\quad[B]}{A\land B}\quad \neg(A\land B)}{\times}}{\neg A\lor\neg B}\,[*]\quad[\neg(\neg A\lor\neg B)]}{\times}}{\neg A}\,[a]}{\neg A\lor\neg B}\quad[\neg(\neg A\lor\neg B)]}{\times}}{\neg B}}{\neg A\lor\neg B}\quad[\neg(\neg A\lor\neg B)]}{\times}}{\neg\neg(\neg A\lor\neg B)}}{\neg A\lor\neg B}$$

図 4 $\neg(A\land B)\vdash\neg A\lor\neg B$ の証明

こで、矛盾規則によって証明したい論理式を出していますが、どうせそのあと [a] で ¬I を使っています。ならば、[$*$] の部分で ¬I を行なったほうが短くなって良いのではないかなと思うわけです。何故このようなことが可能なのかというと、「[$*$] から [a] の間で、仮定が増えたりキャンセルされていないから」です。そうでなければこのようなことが必ず出来るとは言えないので注意しましょう。ただ、前提と矛盾させて証明したい論理式を矛盾律で出し、証明したい論理式の否定と矛盾させて ¬I を適応という今回のパターンで行うならば必ず出来るので、基本的には気にしなくていいでしょう。という訳で、より一層短くすると、図 5 のようになります。これを、9.1.10 で証明されているものと比較すると全く同一です。理由は簡単で、自分もこの思考法で

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[A]\quad[B]}{A\land B}\quad \neg(A\land B)}{\times}}{\neg A}}{\neg A\lor\neg B}\quad[\neg(\neg A\lor\neg B)]}{\times}}{\neg B}}{\neg A\lor\neg B}\quad[\neg(\neg A\lor\neg B)]}{\times}}{\neg\neg(\neg A\lor\neg B)}}{\neg A\lor\neg B}$$

図 5 $\neg(A\land B)\vdash\neg A\lor\neg B$ の証明 最終版

解いているからなのですが。

以上を簡単にまとめると、古典論理学で証明するには図 1 のテンプレートを使えば概ね解けます。$\neg\beta$ だけで証明出来るように β を A, $\neg A$, B, $\neg B$ から選べば、α は使っていない方の論理記号を選べばいいです。$\neg\beta = A$ とはどういう状況なのかというと、$\beta = \neg A$ ということです。途中の $\neg$I にて $\neg\neg A$ となりますが、その後二重否定除去則によって A にするということです。

さて、$\neg(A \wedge B) \vdash \neg A \vee \neg B$ の前提を全て $\rightarrow$I でキャンセルしましょう。そうすれば、$\neg(A \wedge B) \rightarrow (\neg A \vee \neg B)$ の証明になります。図 3 より短くなります。当たり前です。結局それだけの話なのでした。

9.4 過去問の解答例と解説

あくまでも解答 “ 例 ” です。その点念のためご注意を。一部解答例を書いてない場所があります。自分には分からなかったところです。予め御了承下さい。また、解答例自体が間違っている可能性もあります。自分も人間だから仕方ない。

9.4.1 2010 年度

問題

（あ）次の問い I、II に答えよ。解答用紙の 1 ページ目を用いること。

I. 次の各用語について簡潔に説明せよ。
 (1) トートロジー
 (2) 2 値原理
 (3) 論理体系の完全性

II. 次の各文のうち、正しいものを選び、その番号を記せ。
 (1) 古典命題論理で証明できる論理式は、すべて直観主義命題論理で証明できる。
 (2) 論理体系 L が無矛盾なら、L から推論規則を一つ取り去った体系も無矛盾である。
 (3) 述語論理の論理式 ϕ が充足可能でないとき、$\neg\phi$ は妥当である。
 (4) 古典述語論理は決定可能である。

大問一問目の I は言葉の意味を訊いてくる問題です。ちゃんと配られたプリントを読んでいれば簡単な問題なのではないでしょうか。しかし、流石にプリントの模範通りに答えるのは難しいですね。

トートロジー φ に含まれる $\times$ 以外の命題記号の各々がもつ真理値の可能なすべての組み合わせに対して、$v_T(\varphi)$ がつねに T となるときの φ の事。
二値原理 命題論理の各論理式が、T（真）、F（偽）の 2 つの真理値のいずれかを持つ、と考える事。
論理体系の完全性 ある論理体系において、φ がトートロジー $\Rightarrow \vdash \varphi$ が成立する事。

II は正誤問題です。一個ずつ検証していきましょう。

(1) は偽です。古典命題論理では排中律が証明出来ますが、直感主義命題論理では証明できません。直感主義命題論理 + 二重否定除去則 = 古典命題論理 だということを理解していれば簡単でしょう。

(2) は真です。論理体系 L が無矛盾だとします。仮に L から推論規則を一つ取り去った体系が無矛盾でなかったとすれば、そこに一つ推論規則を足しても、無矛盾ではないです。これは矛盾します。故に仮定が誤りで、L から推論規則を一つ取り去った体系は無矛盾なのです。証明するまでもなかったかも知れません。

(3) は真です。ϕ が充足可能でないということは、全てのモデル M に対して、$v_M(\phi) = \mathrm{F}$ です。故に、全てのモデルに対して、$v_T(\neg\phi) = \mathrm{T}$ であるので、$\neg\phi$ は妥当です。

(4) は偽です。決定可能でないんだから決定可能じゃないんです。理由を聞かれても自分には答えようがありません。

問題

（い）次の各文を記号化して、述語論理の論理式にせよ。ただし、定項や述語記号は、囲みの中に与えられているものを用いよ。6. 以降については、解答にいたるまでの筋道も簡潔に示せ。解答用紙の 1 ページ目を用いること。

1. 冥王星は惑星ではない。
2. 地球も太陽も天体である。
3. 太陽は地球のまわりを回ってはいない。
4. 惑星はみな天体である。
5. 冥王星のまわりを回っている天体が存在する。
6. 太陽のまわりを回っているものの中に惑星であるものが存在する。
7. 天体のまわりを回っているものはすべて天体である。
8. 惑星のまわりを回っている天体はすべて太陽のまわりを回っている。

a : 冥王星	b : 地球	c : 太陽	Fx : x は惑星である	Gx : x は天体である
Hxy : x は y のまわりを回っている				

大問二問目は自然言語から述語論理の論理式に変換する問題です。こんなもの、頭の良い東大生にかかればお茶の子さいさいですよね？

1. は $\neg Fa$ ですね。こんなのを間違えるようだったらお話になりません。

2. は $Gb \wedge Gc$ ですね。これも間違えたら退学レベルでしょう。日本語が読めない人ならば別ですが。

3. は $\neg Hcb$ ですね。これも間違えたら駄目でしょう。

4. は $\forall x(Fx \to Gx)$ です。惑星であるならば天体なのです。間違えても $\forall x(Fx \wedge Gx)$ にはしないように。

5. は $\exists x(Hxa \wedge Gx)$ です。Hxy は回られている方が後ろに来ます。語順に惑わせれて Hax にしないように。

6. は $\exists x(Hxc \wedge Fx)$ です。“ Hxc であるものの中に Fx であるものがある ”、要するに“ Hxc と Fx の性質を両方持つものがある ” ということです。5. を “ 冥王星のまわりを回っているものの中には天体が存在する。” と言い換えても意味が変わらないのと同じです。

7. は $\forall x(\exists y(Gy \wedge Hxy) \to Gx)$ です。$\forall x \forall y((Gy \wedge Hxy) \to Gx)$ でも良いでしょう。問題文を書きなおせば、“ 全てのものについて、ある天体についてその周りをまわっているならば、天体である ” となるので、そのとおりに書けば上の様になるでしょう。

8. は $\forall x((Gx \wedge \exists y(Fy \wedge Hxy)) \to Hxc)$ です。7. と比べて、あるものは天体という条件が増えて、回っているものが惑星に変わって、結論が太陽の周りを回っているに変わっただけです。全く問題無いでしょう。

問題

（う）次の各論証形式について、自然演繹の方法で証明せよ。解答用紙の 2 ページ目および 3 ページ目を用いること。

1. $P, Q \vdash P \land (Q \lor P)$
2. $\vdash (P \land Q) \to P$
3. $(P \to Q) \lor (P \to R) \vdash P \to (Q \lor R)$
4. $\vdash \neg(\neg P \land P)$
5. $\neg(\neg P \lor Q) \vdash \neg\neg P \land \neg Q$
6. $\vdash (P \lor \neg Q) \to (\neg P \to \neg Q)$
7. $\vdash \neg P \to (P \to Q)$
8. $\vdash (\neg P \to Q) \to (P \lor Q)$
9. $\neg\exists x Px \vdash \neg Pa$
10. $\forall x((Px \land Qx) \to Rx) \vdash \forall x Px \to \forall x(Qx \to Rx)$
11. $\forall x(\neg Q \to \neg Px) \vdash \exists x Px \to Q$
12. $\vdash \forall x Px \lor \exists x \neg Px$

漸く自然演繹の方法で証明させる問題が出てきました。命題論理の問題は一問も落としたくないところです。

1. は非常に基本的な問題でしょう。前提の Q が要らないぐらいです。

$$\dfrac{P \quad \dfrac{P}{Q \lor P}}{P \land (Q \lor P)}$$

2. もまた簡単です。説明するまでもないでしょう。

$$\dfrac{\dfrac{[P \land Q]}{P}}{(P \land Q) \to P}$$

3. になるとほんの少し難しくなったような気がしますが、まだまだ基本問題でしょう。結論の論理式が $P \to (Q \lor R)$ であることから、P を前提と考えて、$Q \lor R$ を導いてから、最後に $\to$I を使えばいいです。

$$\dfrac{\dfrac{(P \to Q) \lor (P \to R) \qquad \dfrac{\dfrac{[P] \quad [P \to Q]}{Q}}{Q \lor R} \qquad \dfrac{\dfrac{[P] \quad [P \to R]}{R}}{Q \lor R}}{Q \lor R}}{P \to (Q \lor R)}$$

4. は矛盾律の左右が入れ替わっただけのものですね。これは解答を覚えていれば簡単でしょう。解答を覚えていなくとも、結論の論理式の形から $\neg$I を使うことは明らかなので、$\neg P \land P$ を仮定するということは分かるでしょう。

$$\dfrac{\dfrac{[\neg P \wedge P]}{P} \qquad \dfrac{[\neg P \wedge P]}{\neg P}}{\dfrac{\times}{\neg(\neg P \wedge P)}}$$

5. はド・モルガンの法則の左側を否定にしただけです。これも解答を覚えていれば簡単でしょう。解答を覚えていなければどのように考えれば良いのかと言えば、結論の論理式が $\wedge$ で繋がっているので $\neg\neg P$, $\neg Q$ はそれぞれ単体で証明可能です。それぞれ、$\neg$I を使うと考えれば解答は自ずと分かるでしょう。

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg P]}{\neg P \vee Q} \quad \neg(\neg P \vee Q)}{\times}}{\neg\neg P} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[Q]}{\neg P \vee Q} \quad \neg(\neg P \vee Q)}{\times}}{\neg Q}}{\neg\neg P \wedge \neg Q}$$

6. も “ 証明できる論理式の例 ” に含まれていたものを少し変えただけのものです。$P \vee \neg Q \vdash \neg P \to \neg Q$ とほぼ証明は同じなので、これについて考えましょう。まず前提が $\vee$ で繋がっているので、$\vee$E を使うのはほぼ確定です。すると、$\neg Q$ の場合については直ぐに $\to$I が適用できますが、P の場合は Q とかいう論理記号が一切出てきません。こういう時は矛盾規則を利用して無理やり作り出すのが定石です。これが分かれば後は流れでしょう。

$$\dfrac{\dfrac{[P \vee \neg Q] \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[P] \quad [\neg P]}{\times}}{\neg Q}}{\neg P \to \neg Q} \qquad \dfrac{[\neg Q]}{\neg P \to \neg Q}}{\neg P \to \neg Q}}{(P \vee \neg Q) \to (\neg P \to \neg Q)}$$

7. は 6. をより一層簡単にした問題です。どうしてこちらのほうが後に出てくるのかが良くわかりません。6. と同じように矛盾規則で Q を作り出しておしまいです。

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[P] \quad [\neg P]}{\times}}{Q}}{P \to Q}}{\neg P \to (P \to Q)}$$

8. は 6. の前提と結論を入れ替えただけのような問題です。ただ、この問題は古典命題論理でないと解けないと思いますのでレベルがぐんと上がってます。流石に命題論理の最後の問題だけはあります。

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[P]}{P \vee Q} \quad [\neg(P \vee Q)]}{\times}}{\neg P} \qquad [\neg P \to Q]}{Q}}{P \vee Q} \qquad [\neg(P \vee Q)]}{\times}}{\neg\neg(P \vee Q)}}{P \vee Q}}{(\neg P \to Q) \to (P \vee Q)}$$

さて、ここまでは命題論理の問題でしたが、ここからは述語論理の問題となります。述語論理の問題は、命題論理のようにこの方法でやれば必ず証明できるという方法は多分ありません。是非とも “ 証明できる論理式の例 ” を全て自分で証明することをお勧めします。

9. は嵌らなければ簡単な問題でしょうか。結論が $\neg Pa$ ですから $\neg$I を利用すると考えれば Pa を前提して直ぐ矛盾が導き出せます。

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[Pa]}{\exists x Px} \quad \neg\exists x Px}{\times}}{\neg Pa}$$

10. も簡単な問題でしょうか。結論から逆に辿っていけばこのようにならざるを得ないでしょう。

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\forall x Px]}{Pa}\quad [Qa]}{(Pa \wedge Qa)} \quad \dfrac{\forall x((Px \wedge Qx) \to Rx)}{(Pa \wedge Qa) \to Ra}}{Ra}}{Qa \to Ra}}{\forall x(Qx \to Rx)}}{\forall x Px \to \forall x(Qx \to Rx)}$$

11. はここまでの温い問題とは打って変わっていきなりの難問に見えます。ただ、ゆっくり考えれば意外に簡単に解けます。

結論の形が $\varphi \to \psi$ なので、いつも通り $\exists x Px$ も前提と考えて、最後に $\to$I で消すことにします。まずは、幾らか条件があってうざい $\exists$E を適用することにします。また、Pa を仮定しているところで、条件が無い $\forall$E を適用すると以下のようになります。

$$\dfrac{\dfrac{[\exists x Px] \qquad \begin{matrix}[Pa] \quad \dfrac{\forall x(\neg Q \to \neg Px)}{\neg Q \to \neg Pa} \\ \vdots \\ Q\end{matrix}}{Q}}{\exists x Px \to Q}$$

後は、Pa と $\neg Q \to \neg Pa$ から Q を証明すれば良いことになります。そして、これはまさに 9.1.15 の否定式を少し変えたものに過ぎません。そういう訳で、解答を覚えていれば後は簡単に解けます。

$$\dfrac{\dfrac{[\exists x Px] \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[Pa] \quad \dfrac{[\neg Q] \quad \dfrac{\forall x(\neg Q \to \neg Px)}{\neg Q \to \neg Pa}}{\neg Pa}}{\times}}{\neg\neg Q}}{Q}}{Q}}{\exists x Px \to Q}$$

12. は、恐らく今回の問題では一番の難問ではないでしょうか。とは言え、ここまで勉強してきた方には案外簡単な問題ででしょう。まずは問題の分析をしましょう。

$\vdash \forall x Px \vee \exists x \neg Px$ を見ると、何も前提のない状態から、$\varphi \vee \psi$ となっています。こうなっているのは排中

律ぐらいしかありません。しかし、$\varphi \lor \neg\varphi$ の様な構造にはなっていないようです。ここで置き換え定理を適用してみます。9.2.5 の $\neg\forall xAx \leftrightarrow \exists x\neg Ax$ を利用すれば、$\vdash \forall xPx \lor \neg\forall xPx$ と書き換えられます。これはまさに排中律です。これが分かればもう方針は定まりました。

1. 排中律の証明を利用して $\forall xPx \lor \neg\forall xPx$ を証明する
2. 置き換え定理で $\neg\forall xAx \leftrightarrow \exists x\neg Ax$ を利用して証明したい論理式に置き換える。

という事で証明を書きましょう。

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\forall xPx]}{\forall xPx \lor \neg\forall xPx} \quad [\neg(\forall xPx \lor \neg\forall xPx)]}{\times}}{\neg\forall xPx}}{\forall xPx \lor \neg\forall xPx} \quad [\neg(\forall xPx \lor \neg\forall xPx)]}{\times}}{\neg\neg(\forall xPx \lor \neg\forall xPx)}}{\forall xPx \lor \neg\forall xPx} \quad \dfrac{[\forall xPx]}{\forall xPx \lor \exists x\neg Px} \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg Pa]}{\exists x\neg Px} \quad [\neg\exists x\neg Px]}{\times}}{\neg\neg Pa}}{Pa}}{\forall xPx} \quad [\neg\forall xPx]}{\times}}{\neg\neg\exists x\neg Px}}{\exists x\neg Px}}{\forall xPx \lor \exists x\neg Px}}{\forall xPx \lor \exists x\neg Px}$$

解けました。

しかし、この証明は答案としては書きやすいですが、最も短い証明とは言えません。置き換える部分を排中律の内部に直接押しこめばもっと短くなります。

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg Pa]}{\exists x\neg Px} \quad [\neg\exists x\neg Px]}{\times}}{\neg\neg Pa}}{Pa}}{\forall xPx} \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[\forall xPx]}{\forall xPx \lor \exists x\neg Px} \quad [\neg(\forall xPx \lor \exists x\neg Px)]}{\times}}{\neg\forall xPx}}{\times}}{\neg\neg\exists x\neg Px}}{\exists x\neg Px}}{\forall xPx \lor \exists x\neg Px} \quad [\neg(\forall xPx \lor \exists x\neg Px)]}{\times}}{\neg\neg(\forall xPx \lor \exists x\neg Px)}}{\forall xPx \lor \exists x\neg Px}$$

しかし、この答案は書きにくそうじゃないですか？

問題

（え）次の各論理式は妥当か。妥当な場合は、そのことを自然演繹または意味論的タブローの方法で示せ。また、妥当でない場合は、反例となるモデルについて述べよ。解答用紙 4 ページ目を用いること。

1. $(\exists Px \land \exists Qx) \to \neg\forall x(\neg Px \lor \neg Qx)$
2. $\neg\exists x\forall y((Pxy \to \neg Pyy) \land (\neg Pyy \to Pxy))$

これまた面倒そうな問題です。しかし、記号の意味さえ分かれば小学生でも解けそうな気がする問題でもあります。方針としては、証明を書くのは非常に面倒なので、反例を探して見つからなさそうならば証明すると

いう方針で行きましょう。

1. の論理式を見ていても何も浮かんでこないので、置き換え定理を用いて色々と書き換えることにしましょう。

9.2.5 の $\neg\forall xAx \leftrightarrow \exists x\neg Ax$ を用いて置き換え定理を適用すると、$(\exists Px \land \exists Qx) \to \exists x\neg(\neg Px \lor \neg Qx)$ と書き換えられます。さらに、9.1.10 の $\neg(A \lor B) \leftrightarrow (\neg A \land \neg B)$ と、9.1.4 の $\neg\neg A \leftrightarrow A$ を用いれば、$(\exists Px \land \exists Qx) \to \exists x(Px \land Qx)$ と書き換えられます。この論理式を日本語にするならば、“ 性質 P を持つものが存在し、かつ性質 Q を持つものが存在すれば、性質 P, Q 両方もつものが存在する ” と言った感じでしょうか。これは明らかにおかしいです。

それではモデル $M = \{D, v\}$ を構築しましょう。性質 P か性質 Q だけ持つ個体がそれぞれ一つ以上存在し、両方の性質を持つものが存在しなければ良いので、$D = \{$ あ, い $\}, v(P) = \{($あ$)\}, v(Q) = \{($い$)\}$ と定義すれば反例となります。

2. については、“ そんな x 存在しねーよ！ ” と声高らかに宣言しておられるので、存在するかどうかを考えてみましょう。すると、“ ある x について、全ての y で、$Pxy \to \neg Pyy$ と $\neg Pyy \to Pxy$ が成立する ” ものを探せば良いです。ここで特徴的な形として、$Pxy \to \neg Pyy, \neg Pyy \to Pxy$ があります。$\to$ の前後でそっくりと入れ替わっているだけです。ここに注目して真理表を書いてみます。

Pxy	Pyy	$\neg Pyy$	$Pxy \to \neg Pyy$	$\neg Pyy \to Pxy$	$(Pxy \to \neg Pyy) \land (\neg Pyy \to Pxy)$
T	T	F	F	T	F
T	F	T	T	T	T
F	T	F	T	T	T
F	F	T	T	F	F

この真理表を見ると、Pxy と Pyy の真理値が異なれば $(Pxy \to \neg Pyy) \land (\neg Pyy \to Pxy)$ は成立します。つまり、“ ある x について、全ての y で、Pxy と Pyy の真偽値を異なるようにする ” ようなモデルを構成できれば良いのです。

しかし、それは出来ません。

何故ならば、y は全てのものを取るので、必ず x と同じものを一回は取ることになります。その時のことを $v(x) = v(y) = a$ とすれば、$Pxy = Paa = Pyy$ となり必ず一致してしまいます。よって、この論理式は正しいということになります。故に証明も出来るはずです。そんな訳で証明します。

$\exists x\forall y((Pxy \to \neg Pyy) \land (\neg Pyy \to Pxy)$ を仮定すると矛盾が出てくるという方針で考えれば直ぐに以下の証明が書けると思います。

$$\dfrac{\dfrac{[\exists x\forall y((Pxy \to \neg Pyy) \land (\neg Pyy \to Pxy))] \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg Paa] \quad \dfrac{\dfrac{[\forall y((Pay \to \neg Pyy) \land (\neg Pyy \to Pay))]}{(Paa \to \neg Paa) \land (\neg Paa \to Paa)}}{\neg Paa \to Paa}}{Paa} \quad [\neg Paa]}{\times}}{\neg\neg Paa}}{Paa} \quad \dfrac{\dfrac{[Paa] \quad \dfrac{[Paa] \quad \dfrac{\dfrac{[\forall y((Pay \to \neg Pyy) \land (\neg Pyy \to Pay))]}{(Paa \to \neg Paa) \land (\neg Paa \to Paa)}}{Paa \to \neg Paa}}{\neg Paa}}{\times}}{\neg Paa}}{\times}}{\times}}{\neg\exists x\forall y((Pxy \to \neg Pyy) \land (\neg Pyy \to Pxy))}$$

この証明は、圧倒的に意味論的タブローの方法で示したほうが楽です。自分は詳しく分かってないので解説は出来ませんが、こういう問題が出た時の為に意味論的タブローの方法を理解しておいたほうが良いでしょう。

問題

（お）講義に関連する主題について、自らの考えを展開してみよ。最初に簡潔なタイトルを記してから論述すること。解答用紙の 5 ページ目および 6 ページ目を用いよ。

何を書けば良いのか分からないので、省略。

9.4.2 2011 年度

問題

（あ）次の問い I、II、III に答えよ。解答用紙の 1 ページ目を用いること。

I. 次の各用語について簡潔に説明せよ。
(1) 論理式の形成規則
(2) 真理関数

II. 次の (1)〜(4) は、正しいか。正しいなら「○」を、正しくないなら「×」を記したうえで、そう考える理由を簡潔に述べよ。
(1) 矛盾律とは、ある論理式とその否定の連言のことである。
(2) 論理体系 L が完全なら、L に推論規則を一つ付け加えた体系も完全である。
(3) 命題論理の論理式で、n 個の相違なる命題記号を含むものに対する真理表の行数は $2n$ である。
(4) 論理式 $A \lor B$ が充足可能であるとき、A もまた充足可能である。

III. 二値原理と排中律の関係について、簡潔に説明せよ。

昨年の問題が簡単すぎて差がつかなかったのでしょうか。この年の問題は少しばかり嫌らしい問題が出てきてます。プリント片手で解くならば容易ですが、一夜漬けの人には厳しいように思われます。そうでなくても厳しいです。

I. は昨年に引き続き言葉の意味を答えさせる問題です。昨年よりも、マニアックなところから出ていて難しいです。

論理式の形成規則 論理式を定義するための規則。
真理関数 各論理演算子に対して、真理値の対から真理値への対応させる関数。

II. については、正誤問題です。理由も書くように変更されました。これもまた変な問題出してきやがるぜ……

(1) は×です。矛盾律とは、ある論理式とその否定の連言の全体の否定です。

この問題から察するに、連言やら、選言という用語も正確に覚えろと言うことでしょうか。そしてその上、肯定律やら矛盾律やらも正確に覚えろと言うことでしょうか。なんという鬼畜であろうか。

(2) は○です。

完全であるとは、“φ がトートロジー $\Rightarrow \vdash \varphi$” と言うことです。L に一つ推論規則を足そうが、それを利用しなければ良いだけで、$\vdash_{L+\alpha} \varphi$ であることには変わりません。故にこれは正しいです。しかし、この論理体系が健全であるかどうかは知ったこっちゃありません。

(3) は×です。

どう考えても、最大 2^n 行必要です。ただ、命題記号には × も含まれるので、必ず 2^n 行とは言えません。

(4) も×です。

$v_T(B) = \mathrm{T}$ であれば、$v_T(A) = \mathrm{T}$ である必要性は一切ありません。

III. は、何だか良く分からない問題です。

二値原理的な証明が排中律を利用して行えるような事を言えば良いのでしょうか。自分には全く分かりません。御免なさい。是非とも教官に直接この問題の意図と解答例を聞いてみることをお勧めします。

問題

（い）次の (1)〜(8) を記号化して、述語論理の論理式にせよ。ただし、定項や述語記号は、囲みの中に与えられているものを用いよ。(7) および (8) については、解答にいたるまでの筋道も簡潔に示せ。解答用紙の 1 ページ目を用いること。

(1) ジェリーは魚ではない。
(2) トムもジェリーも泳がない。
(3) 魚はみな泳ぐ。
(4) ある魚は飛びかつ泳ぐ。
(5) 泳ぐものが必ずしも魚ではない。
(6) ジェリーはトムに魚を贈った。
(7) ジェリーが何かを贈ったもの（相手）は、みなジェリーに何かを贈った。
(8) ジェリーがトムに贈ったもののなかには、なにものかがジェリーに贈ったものがある。

a : トム	b : ジェリー	Fx : x は魚である	Gx : x は泳ぐ	Hx : x は飛ぶ
$Txyz$: x は y に z を贈った				

大問二問目は、昨年と変わらず自然言語から述語論理の論理式に変換する問題です。他の問題が難しくなったので、ここは落としたくないところです。

(1) は、$\neg Fb$ ですね。説明するまでもないでしょう。

(2) は、$\neg Ga \wedge \neg Gb$ ですね。これも説明するまでもないでしょう。

(3) は、$\forall x(Fx \to Gx)$ ですね。これも説明するまでもないでしょう。

(4) は、$\exists x(Fx \wedge (Hx \wedge Gx))$ ですね。“ 飛びかつ泳ぎかつ魚であるようなものが存在する ” ということです。内側の括弧を忘れないように注意しましょう。

(5) は、$\neg\forall x(Gx \to Fx)$ ですね。$\exists x(Gx \wedge \neg Fx)$ でも良いでしょう。“ 泳ぐならば魚だ、ということはない ” とも読み替えられるし、“ 泳ぎかつ魚でないものが存在する ” とも読み替えられます。

(6) は、$\exists x(Fx \wedge Tbax)$ ですね。“ ある物が存在して、それは魚でかつ、ジェリーによってトムに贈られた ” のです。

(7) は、$\forall x(\exists yTbxy \to \exists yTxby)$ です。“ 全ての人が、何かをジェリーから受け取ったならば何かをジェリーに贈った ” のです。

(8) は、$\exists x(Tbax \wedge \exists yTybx)$ です。“ あるものは、ジェリーがトムに贈りかつある人がジェリーに贈った ” のです。

問題

（う）次の (1)〜(12) について、自然演繹の方法で証明せよ。解答用紙の 2 ページ目および 3 ページ目を用いること。

(1) $P, Q, R \vdash P \land (Q \land R)$
(2) $\vdash P \to (P \lor Q)$
(3) $\vdash (P \to \neg Q) \to \neg(P \land Q)$
(4) $\neg P \lor Q \vdash \neg(P \land \neg Q)$
(5) $\vdash (P \land \neg P) \to (Q \land \neg Q)$
(6) $\neg\neg(\neg P \land P)$
(7) $(P \land Q) \to R \vdash (P \to R) \lor (Q \to R)$
(8) $\exists x((Px \land Qx) \to R) \vdash \forall x(Px \land Qx) \to R$
(9) $\forall x(\neg Qx \to \neg Px) \vdash \forall x(Px \to Qx)$
(10) $\neg\exists x Px \vdash \neg\exists y Py$
(11) $\vdash \exists x Px \lor \neg\forall\neg Px$
(12) $\forall x(Px \to Qx), \neg\exists x(Rx \land Qx), \exists x Rx \vdash \exists x(\neg Px \land Rx)$

大問三問目は、自然演繹の方法による証明問題です。一部の異常な問題を除けはそこまで難しいことはないと思います。慎重にやれば問題ありません。多分。

(1) は、解説するまでもないでしょう。

$$\dfrac{P \qquad \dfrac{Q \quad R}{Q \land R}}{P \land (Q \land R)}$$

(2) も、解説するまでもないでしょう。

$$\dfrac{\dfrac{[P]}{P \lor Q}}{P \to (P \lor Q)}$$

(3) は、結論の論理式の形から $\neg$I を利用するとして、$P \land Q$ を仮定すれば良いでしょう。

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[P \land Q]}{Q} \qquad \dfrac{\dfrac{[P \land Q]}{P} \qquad P \to \neg Q}{\neg Q}}{\times}}{\neg(P \land Q)}$$

(4) は、(3) と同じように $\neg$I を利用するために、$P \land \neg Q$ を仮定すれば良いでしょう。

$$\dfrac{\dfrac{\neg P \lor Q \qquad \dfrac{\dfrac{[P \land \neg Q]}{P} \qquad [\neg P]}{\times} \qquad \dfrac{[Q] \qquad \dfrac{[P \land \neg Q]}{\neg Q}}{\times}}{\times}}{\neg(P \land \neg Q)}$$

(5) は、明らかに → の左側だけで矛盾を導けるので、そこから矛盾規則を用いて右側を召喚すれば良いでしょう。

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[P\land\neg P]}{P}\qquad\dfrac{[P\land\neg P]}{\neg P}}{\times}}{Q\land\neg Q}}{(P\land\neg P)\to(Q\land\neg Q)}$$

(6) は、排中律の証明の不完全バージョンですね。ここまでの証明ならば最小命題論理で証明可能です。

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[P]}{\neg P\lor P}\qquad[\neg(\neg P\lor P)]}{\times}}{\neg P}}{\neg P\lor P}\qquad[\neg(\neg P\lor P)]}{\times}}{\neg\neg(\neg P\lor P)}$$

(7) は、命題論理の最後の証明問題だけあって難しいです。しかし、いつものテンプレートに当てはめれば機械的に解くことが出来ます。この解答が最も短いかどうかは不明ですので、暇があったら考えてみるのが良いでしょう。

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[Q]\qquad\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[P]\qquad\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[P]\quad[Q]}{P\land Q}\quad(P\land Q)\to R}{R}}{P\to R}}{(P\to R)\lor(Q\to R)}\quad[\neg((P\to R)\lor(Q\to R))]}{\times}}{\neg P}}{\times}}{R}}{P\to R}}{(P\to R)\lor(Q\to R)}\quad[\neg((P\to R)\lor(Q\to R))]}{\times}}{\neg Q}}{\times}}{R}}{Q\to R}}{(P\to R)\lor(Q\to R)}\quad[\neg((P\to R)\lor(Q\to R))]}{\times}}{\neg\neg((P\to R)\lor(Q\to R))}}{(P\to R)\lor(Q\to R)}$$

(8) は、“ 証明できる論理式の例 ” に良く似たものがあるので、解いたことがあるのならば簡単でしょう。そうでなくとも、∃E を使い、結論の式の形から $\forall x(Px\land Qx)$ を仮定するということは分かるので、それに従って証明すれば問題ありません。

$$\dfrac{\dfrac{[\exists x((Px\land Qx)\to R)]\qquad\dfrac{\dfrac{[\forall x(Px\land Qx)]}{Pa\land Qa}\qquad[(Pa\land Qa)\to R]}{R}}{R}}{\forall x(Px\land Qx)\to R}$$

(9) は、∀E を使ったものを考えてみれば、“ 証明できる論理式の例 ” にやはり良く似たものがあります。解

いたことがなくても、Pa を仮定しなければ結論の論理式のようにはならないし、また、$\neg Pa$ を出すのならば前提の $\neg Qa$ を仮定しなければならないもの分かります。これらを組み合わせれば以下のようになるでしょう。

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[Pa] \quad \dfrac{[\neg Qa] \quad \dfrac{\forall x(\neg Qx \to \neg Px)}{\neg Qa \to \neg Pa}}{\neg Pa}}{\times}}{\neg\neg Qa}}{Qa}}{Pa \to Qa}}{\forall x(Px \to Qx)}$$

(10) は、結論の論理式の形から、$\neg$I を利用するのは確定です。故に $\exists yPy$ を仮定して $\exists$E を利用するのはすぐに分かるでしょう。後は流れで何とかなります。当然の事ながら、$\neg\exists xPx$ から $\neg Pa$、よって $\neg\exists yPy$ というような証明は出来ません。

$$\dfrac{\dfrac{[\exists yPy] \quad \dfrac{\dfrac{[Pa]}{\exists xPx} \quad \neg\exists xPx}{\times}}{\times}}{\neg\exists yPy}$$

(11) は、なんと困った事に証明できません。置き換え定理を適用すれば分かりますが、$\exists xPx \vee \neg\forall\neg Px$ は $\exists xPx \vee \exists xPx$ と書き換えられるので、結局これは $\exists xPx$ と同じです。これは明らかに妥当ではありません。故にこれは証明不可能です。恐らく、$\vdash \exists xPx \vee \forall\neg Px$ という問題にしたかったのでしょう。まあ、この問題であっても昨年と殆ど同じですから酷く困ることは無いでしょう。

(12) は、パッと見難しく見えます。しかし、結論の論理式の形自体がヒントになっています。$\exists x(\neg Px \wedge Rx)$ ですから、“ ある x について $\neg Px$ と Rx が同時に成立する ” と言っているわけです。ここで前提から Rx が成り立つようなものを探すと、$\exists xRx$ があります。これに $\exists$E を適用すれば、Ra が得られます。ここから直接 $\neg Pa$ を求めて、最後に $\exists$I を利用して結論を導き出したいですが、Rx と Px には直接的な関係は見いだせません。しかし、Rx と Qx には関係があり、また Px と Qx にも関係があるので、一度 Qx についての関係を求めてから、Px の関係を求めるものと見てみましょう。$\neg\exists x(Rx \wedge Qx)$ は “ 全ての x について、Rx と Qx は同時に存在することは有り得ない ” という事を言っています。つまり、Ra が既に成立しているので Qa は成立しないこととなります。故に $\neg Qa$ が証明可能です。また、$\forall x(Px \to Qx)$ が成立するので、当然のことながら $Pa \to Qa$ が成立します。これと先程出した $\neg Qa$ を利用すれば目的の $\neg Pa$ を導けそうです。

それでは上の方針でやってみましょう。

$$\dfrac{\exists xRx \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[Pa] \quad \dfrac{\forall x(Px \to Qx)}{Pa \to Qa}}{Qa} \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[Ra] \quad [Qa]}{Ra \wedge Qa}}{\exists x(Rx \wedge Qx)} \quad \neg\exists x(Rx \wedge Qx)}{\times}}{\neg Qa}}{\times}}{\neg Pa} \quad [Ra]}{\neg Pa \wedge Ra}}{\exists x(\neg Px \wedge Rx)}}{\exists x(\neg Px \wedge Rx)}$$

らくらく解けました。

この問題も本当は $\forall x(Px \to Qx), \neg\exists x(Rx \land Qx), \exists xRx \vdash \exists x\neg Px$ にしたかったけれども、難しすぎるので妥協してこのような問題になったのかも知れません。

問題

（え）問題（い）の (1)〜(8) に対して与えた解答の論理式をそれぞれ①〜⑧とし、これらの解釈について議論するために、モデル $M = (D, v)$ を考える。個体領域 D は、{ トム, ジェリー, マーリン, ドリー, ニモ, ブルース, クラッシュ } とし、付値関数 v については、$v(a) =$ トム、$v(b) =$ ジェリー、$v(F) =$ { マーリン, ドリー, ニモ, ブルース } とする。このとき、以下の I、II、III に答えよ。解答用紙の 4 ページ目を用いること。

I. 論理式①〜⑤がみな、このモデルにおいて真になるとする。このとき、$v(G)$ を求めよ。
II. v について、さらに $v(T) = \{$(ジェリー, トム, ニモ)$\}$ としたとき、論理式⑦がこのモデルにおいて真とならないことを簡潔に説明せよ。
III. 論理式①〜⑧がみな、このモデルにおいて真となるとする。これを可能にする $v(H)$、$v(T)$ の例を一つずつ挙げよ。

ワーナー・ブラザーズさん！ディズニーさん！ここです！！

大問四問目は、昨年の問題が更に進化して、今度こそ小学生向けの問題に成り下がってしまったような感じです。いや、まあ、その方が簡単で出題される側としては嬉しいんですが、解説をする側は大変なんですよ。まあ、ここまでも十分適当な解説だったので、ここも適当に解説したいと思います。

さて、まず問題（い）の解答を再掲します。流石にページが離れていると見難いこと甚だしいので。

① $\neg Fb$
② $\neg Ga \land \neg Gb$
③ $\forall x(Fx \to Gx)$
④ $\exists x(Fx \land (Hx \land Gx))$
⑤ $\neg\forall x(Gx \to Fx)$ または $\exists x(Gx \land \neg Fx)$
⑥ $\exists x(Fx \land Tbax)$
⑦ $\forall x(\exists yTbxy \to \exists yTxby)$
⑧ $\exists x(Tbax \land \exists yTybx)$

そもそもこの解答が間違っていたらこの大問一問丸ごと御臨終ということも考えられるので、それなりに確認してから問題に入りましょう。

さて、まず I. について。①〜⑤まで全て条件を満たすようにしたいらしいです。与えられているのは $v(F)$ だけで、定めようとしているのは $v(G)$ です。しかし、④には H が含まれています。という事で、④は気にしないことにします。

まず、③から、{ マーリン, ドリー, ニモ, ブルース } $\subset v(G)$ であることが分かります。また、②から、トム $\notin v(G)$、ジェリー $\notin v(G)$ であることも分かります。後は、⑤を満たすようにすれば良いです。D の中で $v(G)$ に含まれるか、含まれないかが決まっていないのは クラッシュ だけで、クラッシュ $\notin v(G)$ としてしまうと、泳ぐものが全て魚となってしまい、⑤を満たさなくなってしまいます。故に クラッシュ $\in v(G)$ と

なります。

以上の考察から、$v(G) = \{$ マーリン, ドリー, ニモ, ブルース, クラッシュ $\}$ でなければならないことが分かりました。

次は、II. についてです。簡潔に説明せよということなので、$v_{M/\alpha}(T)$ がどうのこうの、という説明は多分要らないのでしょう。雰囲気が伝われば良いんです。

⑦を満たすためには、$\forall x(\exists yTbxy \to \exists yTxby)$ より、$\exists yTbay \to \exists yTaby$ を満たす必要性があります（全ての x についてなので、x を a とした)。この時、$\exists yTbay$ については、$v(T) = \{($ジェリー, トム, ニモ$)\}$ であるので、$v(c) =$ ニモ とすると、$Tbac$ は、(ジェリー, トム, ニモ) $\in v(T)$ であることから真となるので、$v_M(\exists yTbay) = \mathrm{T}$ となります。故に、$\exists yTbay \to \exists yTaby$ を満たすためには、$\exists yTaby$ が成立する必要がありますが、(トム, ジェリー, *) $\in v(T)$（*は任意）となるような要素は存在していないので、$v_M(\exists yTaby) = \mathrm{F}$。故に $v_M(\forall x(\exists yTbxy \to \exists yTxby)) = \mathrm{F}$ であることから、示された。

III. については、ゆっくり考えれば分かるでしょう。

既に現在の段階で満たしているものは、①, ②, ③, ⑤です。また、$v(H)$ については、H が含まれるものが、④のみであることから、後から辻褄合わせをすれば問題ないです。ということで、$v(T)$ について考えます。

T を含むものは⑥, ⑦, ⑧だけです。記号なんて見ていても、面白くもないし、何も思い浮かばないので日本語で考えましょう。重要なのは以下の三点ですね。

- ジェリーはトムに魚を贈った。
- ジェリーが何かを贈ったもの（相手）は、みなジェリーに何かを贈った。
- ジェリーがトムに贈ったもののなかには、なにものかがジェリーに贈ったものがある。

まず、ジェリーがトムに魚を贈ったという事実は曲げようもありません。すると、ジェリーに別に必要もない魚を贈られてしまったトムは二番目の法則が発動してジェリーに何かをお返ししないといけません。さらに、ジェリーがトムにものを贈った瞬間に、全てとは限りませんが、どっかの誰かがそのものを贈ってくれるようです。

あれ。これって、トムがジェリーに（ジェリーから贈ってもらった）その魚を贈り返せば全部解決じゃね？

という事で、解答例としては $v(T) = \{($ジェリー, トム, ニモ$), ($トム, ジェリー, ニモ$)\}$ が考えられます。まあ、H については、適当な魚を空に飛ばしておいてやってください。別に複数匹飛んでも問題ないですし、魚以外の奴が飛んでも問題ないです。$v(H) = \{$ ニモ $\}$ ぐらいが妥当じゃないでしょうか。

問題

（お）講義に関連する主題について、自らの考えを展開してみよ。最初に簡潔なタイトルを記してから論述すること。解答用紙の 5 ページ目および 6 ページ目を用いよ。

また、これか！そして文章も一字一句変わらない。適当な事を書いておけばいいんじゃないでしょうか。まあ、ここまで全て解き進めてきたならばこれを書く時間は殆ど無いように思われます。

10 あとがき

初めに言っておきますが、このシケプリのメインコンテンツは“おまけ”ではありません。“おまけ”よりも前の部分を読んで覚えれば、単位はくるだろうという事で作っただけです。だから、“超簡易まとめ”という名称なのです。あくまでも単位のためのエッセンスです。“優”のためのまとめではありません。“優”を取りたいならば配られたプリントを完全に暗記し、全ての証明も暗記することです。

このシケプリの作成には細心の注意を払っていませんので、多くの間違いが見つかることと思います。このシケプリに書かれている間違いを見つける数によって、あなたの記号論理学の実力が分かるらしいです。間違いに気づいても他の人に教えずに、じっと心の奥底に仕舞っておくことをお勧めします。

“証明できる論理式の例の全証明例”は出来るだけ短くするように心掛けましたが、より短い解答にする事が出来るかも知れません。短い証明を思いついたら、「こいつ馬鹿だな」と心の中で罵ってやって下さい。ただし、決して外には漏らさぬようお願いします。また、最小命題論理で証明出来るのに直観主義命題論理や古典命題論理で証明していたりするかもしれません。試験において、どの様な採点基準を採用しているかは不明ですが、心配であるならば、出来るだけ古典命題論理で証明するように心掛け、無理ならば直観主義命題論理を使ってみる、まだ無理ならば古典命題論理を使ってみるという様に証明したほうが良いかも知れません。また、答案の長さについての採点基準もわかりません。しかし、その事ばかり気にしていて、実際の試験で時間が無くなってしまったら意味がありません。長さや論理体系を無理に拘らず、思いつかなかったものは直ぐ古典命題論理の定石パターンに持ち込むのもありかもしれません。

“古典命題論理での必殺技”については、始めは全く書く気がなかったのですが、少し書いている内に面白くなってきて、結局最後まで書いてしまいました。出来るだけ分かりやすいように、全列挙のパターンから古典命題論理の定石パターン（本文中では「テンプレート」）と俺が勝手に呼んでいる形まで変形していきました。今のところこのパターンに持ち込んで解けなかった問題は無いと思います。それくらい最強です。ただし、無駄が生じることがある点が玉に瑕です。しかし、証明が出来ることは事実なので、是非ともこのパターンをマスターして命題論理の証明問題については点を落とさないようにした方が良いでしょう。この章の内容が分からなかったとか、分かりにくかったとか意見がある場合は、自分で文章にしてシケプリにしてもらえれば良いと思います。シケプリが増えることは良いことです。

“過去問解答例と解説”を読めば分かるように、基本的に自然演繹の方法で証明させるものは、“証明できる論理式の例の全証明例”で証明した問題ほぼそのままか、証明したものに対して読み替え定理や置き換え定理を適用しただけのものだけと言った印象です。よって、このシケプリに書かれている証明を全て何も見ること無く高速で再現することが出来れば、単位だけではなく“良”を、ひいては“優”を得ることも可能でしょう。流石に全員完璧になってしまったら無理でしょうが。このシケプリを用いて“優”を得ることが出来たら、私の御陰です。単位を落としたら自分自身のせいだと考えるのが普通でしょう。また、解説が後ろの方ほど適当になってしまっていますが、理由は言うまでもないでしょう。

ここまでこのシケプリを読んでくれて有難う御座いました。それでは試験に向けて頑張ってください！！

明日でコミックマーケット開幕の 2011 年 8 月 11 日 — 暇人

当シケプリの初出は、UTaisaku-Web[*2]です。

[*2] http://todai.info/