0. 基礎事項

★ 単位まとめ

単位は大事です! 問題を読む時も解く時もよく注意しましょう。
単位をつけながら計算すると良いです!!

・基本単位

物理量は M (質量), L (長さ), T (時間) の3つの次元で構成されている。

- 長さの単位 → メートル m
- 質量の単位 → キログラム kg
- 時間の単位 → 秒 s

・組立単位

基本単位以外の物理量の単位は、定義や物理法則を使って、基本単位から組み立てられるので、組立単位と呼ばれる。

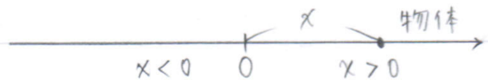
確認

- N ニュートン
- J ジュール
- W ワット
- Hz ヘルツ

1. 運動の記述の基本

1-1. 1次元(直線上)の運動

○位置

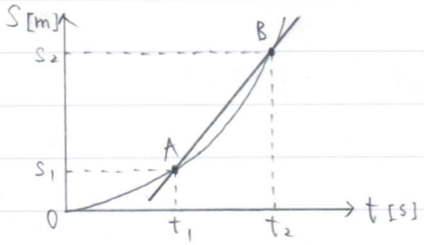


運動 … 物体の位置 x が時間とともに変化すること。

物体の位置が時間 t (time) とともに変化する場合、物体の位置は、t についての関数 $x(t)$ で表せる。

○速さと速度 (Velocity)

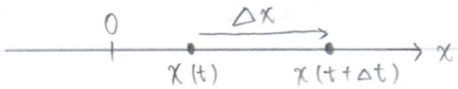
・平均の速さ および 平均速度



時刻 t_1 [s] に基準点Oから距離 S_1 [m] の点を通過し、時刻 t_2 [s] に基準点Oから距離 S_2 [m] の点を通過したとき、時刻 $t_1 \sim t_2$ [s] の間の平均の速さ $\bar{v}$ [m/s] は、

$$\boxed{\bar{v} = \frac{\text{移動距離}}{\text{経過時間}} = \frac{S_2 - S_1}{t_2 - t_1}}$$ … 直線ABの傾き

これを先ほどの x 軸上の物体の運動におきかえてみる。



直線運動では x 軸正の向きに進む物体の速さと負の向きに進む物体の速さを区別する必要がある。そこで登場するのが速度である。

(補) スカラーとベクトル

スカラー … 大きさのみをもつ

例) 質量, エネルギー, 速さ

ベクトル … 大きさと向きをもつ

例) 速度, 加速度, 力

厳密には 速度の大きさ(絶対値) = 速さ

時刻tで位置$x(t)$の物体が、時刻$t+\Delta t$に位置$x(t+\Delta t)$に移動したとすると、時間Δtの平均速度$\bar{v}$は、

$$\boxed{\bar{v} = \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{\Delta t}}$$

$\Delta x = x(t+\Delta t) - x(t)$を時間$\Delta t$での物体の変位という。

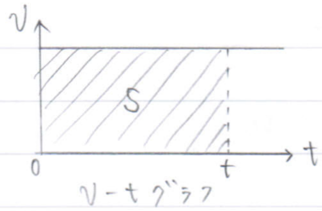
(補) 移動距離と変位
移動距離は物体の移動した距離を表す(あたりまえだけど)のに対し、変位は、最初の位置からどのくらい変化したか、すなわち、最初の位置を始点とし、現在の位置を終点とする矢印の長さとその向きの変化を表す。(『基礎からの力学』P.9参照　変位はベクトル量だよ!!

・速度(瞬間速度)
速度も一般的には時間とともに変化する。この場合、瞬間速度$v(t)$は、上式でΔtを限りなく小さくした極限で表され、

$$\boxed{v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}}$$

・等速運動(等速直線運動・等速度運動とも)
→一定の速さv [m/s]で進む物体の運動。

$$\boxed{x(t) = x_0 + v_0 t}$$ (x_0:最初の位置, v_0:初速度)



t[s]間の移動距離s[m]は、

$$s = v_0 t$$

で表され v-tグラフが囲む面積に等しい。

○ 加速度 (Acceleration)

→ 単位時間あたりの速度の変化

「速度－加速度」と「位置－速度」の関係は同じように考えることができ、平均加速度 $\overline{a}$ と、加速度(瞬間加速度) $a(t)$ は、

$$\boxed{\overline{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t}, \quad a(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt}}$$

で表される。また、$v(t) = \frac{dx}{dt}$ であるので、

$$\boxed{a(t) = \frac{d^2x}{dt^2}}$$

とも表せる。この式は後に出てくる運動方程式を立てる上で重要!!

○ 等加速度直線運動

→ 一定な加速度で速度が変化している直線運動。

加速度を α とおくと、先ほどの式から、

$$\alpha = \frac{d^2x}{dt^2}$$

両辺を t で積分すると、

$$\alpha t + \beta = \frac{dx}{dt} = v \qquad (\beta \text{は積分定数})$$

$t=0$ のとき $v = v_0$ だとすると、$\beta = v_0$ なので、

$$\boxed{v = \alpha t + v_0}$$

また、

$$\alpha t + v_0 = \frac{dx}{dt}$$

の両辺を t で積分すると、

$$\frac{1}{2}\alpha t^2 + v_0 t + \gamma = x \qquad (\gamma \text{は積分定数})$$

$t=0$ のとき $x = x_0$ だとすると、$\gamma = x_0$ なので、

$$\boxed{x = \frac{1}{2}\alpha t^2 + v_0 t + x_0}$$

$v = \alpha t + v_0 \Leftrightarrow t = \frac{v - v_0}{\alpha}$ をこの式に代入して t を消去すると、

$$\begin{aligned}
x &= \frac{1}{2}\alpha\left(\frac{v-v_0}{\alpha}\right)^2 + v_0 \cdot \frac{v-v_0}{\alpha} + x_0 \\
&= \frac{1}{2}\cdot\frac{\cancel{\alpha}}{\alpha^{\cancel{2}}}(v^2 - 2vv_0 + v_0^2) + \frac{1}{\alpha}(v_0 v - v_0^2) + x_0 \\
&= \frac{1}{2\alpha}v^2 - \frac{1}{2\alpha}v_0^2 + x_0
\end{aligned}$$

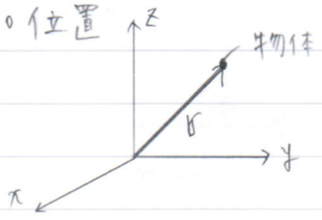
$$\therefore \boxed{v^2 - v_0^2 = 2\alpha(x - x_0)} \quad \leftarrow \text{結構便利!!}$$

$v_0 = 0$ とか $x_0 = 0$ とか代入して使うことが多いかも。

※ x_0, v_0 を初期値,「$x(0) = x_0$, $v(0) = v_0$」を初期条件という。

1-2. 3次元（空間中）の運動

○位置

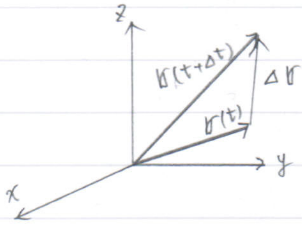


物体の位置は**位置ベクトル $\mathbf{r}$** で表す。
↑ベクトルは"太く"書く。（r × $\mathbf{r}$ ○）

運動…$\mathbf{r}$ が時間とともに変化すること。
$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ と表せる。

○速度

速度は**速度ベクトル $\mathbf{v}$** で表す。



時刻 t で $\mathbf{r}(t)$ であったのが、$t+\Delta t$ では $\mathbf{r}(t+\Delta t)$ であったとすると、

$$\mathbf{v} = \frac{\mathbf{r}(t+\Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t}$$

一般には $\mathbf{v}$ も時間とともに変化するので、$\mathbf{v} = \mathbf{v}(t)$ とおけ、一次元の運動のときと同様、

$$\boxed{\mathbf{v}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{r}(t+\Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right)}$$

↖速さは、
$|\mathbf{v}| = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}$

○加速度

加速度は**加速度（ベクトル）$\mathbf{a}$** で表す。
同様にして、

$$\boxed{\mathbf{a}(t) = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \left(\frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2}, \frac{d^2z}{dt^2}\right)}$$

$\mathbf{a}$ が一定の運動を等加速度運動といい、特に $\mathbf{a} = 0$ の場合、等速運動という。静止も $\mathbf{v} = 0$,（$\mathbf{a} = 0$）の運動状態ということができる。

DATE

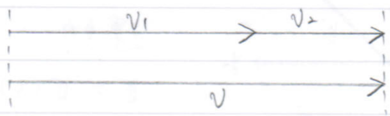
◦ 合成速度と相対速度

• 速度の合成，分解

(1) 一直線上の速度の合成

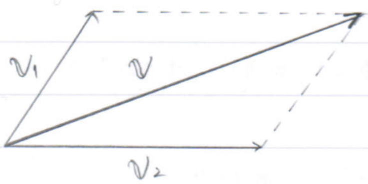
速度 v_1 と v_2 の合成速度 v は、

$$v = v_1 + v_2$$



(2) 平面上の速度の合成

$$\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$$



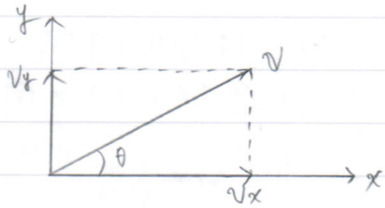
(3) 速度の分解

速度 $\vec{v}$ の x 成分 v_x，y 成分 v_y は、

$$v_x = v\cos\theta \quad , \quad v_y = v\sin\theta$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \quad , \quad \tan\theta = \frac{v_y}{v_x}$$

↑ $\vec{v}$ の大きさ(速さ)

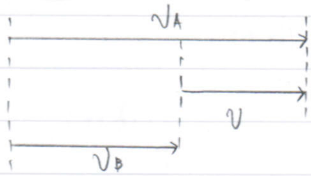


• 相対速度

(1) 一直線上での相対速度

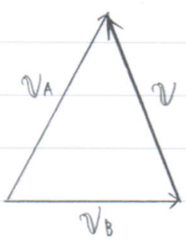
一直線上で速度 v_A で運動している物体 A を速度 v_B で運動している物体 B から見たとき、B に対する A の相対速度 v は、

$$\underline{v = v_A - v_B}$$



(2) 平面上での相対速度

同様にして、 $\underline{\vec{v} = \vec{v}_A - \vec{v}_B}$



「$\vec{v}_B$ の先」から「$\vec{v}_A$ の先」に引いたベクトルが $\vec{v}$ である。

また、 $\underline{\vec{v}_A = \vec{v} + \vec{v}_B}$ と表せる。

2. 運動の法則

2-1. 運動の3法則(by ニュートン)

- 運動の第1法則

→「物体が外から力をうけないとき、あるいは力を受けても
その合力が0ならば、静止している物体は静止し続け、
運動している物体は等速直線運動を続ける。」
というもの。慣性の法則 ともよばれる。
(※慣性…物体が同一の運動状態を持続しようとすること。)
この法則が成立する座標系を慣性系という。

- 運動の第2法則

→「物体の加速度は、その物体に作用する外力に比例し、
その物体の質量に反比例する。」
というもの。物体の質量は、物体の慣性、つまり運動状態の
変化しにくさの度合を示す物体固有の量で単位はkg。

※重力加速度を g として、mg で表される

(補) 質量と重さ
質量は上記の通り。重さは物体に働く重力の大きさ。
すなわち質量は場所によらないが、重さは場所による。

1次元ならば、x 軸方向を向いた力 F の作用で、x 軸にそって
直線運動している質量 m の物体の運動の法則は、

$$ma = F$$

3次元ならば、力をベクトルと考えて、加速度はこの力と
同じ方向に生じるものとし、加速度の大きさは力の大きさを
質量で割ったものに等しいとして、(こうなるように力というベクトル
を定義するということ)加速度を $\boldsymbol{a}$, 力を $\boldsymbol{F}$ として、

$$\boxed{m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F}}$$ ← 運動方程式という。

力の単位は、$kg \cdot m/s^2 = N$ である。
ニュートン

$1N = 1kg$ の物体に $1m/s^2$ の加速度を生む力

※重力による落下運動の加速度

1つの物体(質点)にいくつかの力 $\mathbb{F}_1, \mathbb{F}_2, \cdots, \mathbb{F}_n$ が同時に作用するときは、$\mathbb{F} = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{F}_i$ と考えることができ、運動方程式は、

$$\underline{m\mathbb{a} = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{F}_i}$$

とかける。$\mathbb{F}$ を $\mathbb{F}_1, \mathbb{F}_2, \cdots, \mathbb{F}_n$ の合力という。

※物体のつりあいの(必要)条件

合力 = 0 $\left(\sum_{i=1}^{n} \mathbb{F}_i = 0\right)$

質点ならこれで十分だが、有限の拡がりをもつ物体の場合には、Σ(力のモーメント) = 0 も必要である。(後々)

ex)

合力=0だがこれだと回ってしまう。

・運動の第3法則

→「力は2つの物体の間に働く。物体Aが物体Bに力 $\mathbb{F}_{B \leftarrow A}$ を及ぼしていれば、物体Bも物体Aに力 $\mathbb{F}_{A \leftarrow B}$ を及ぼしている。2つの力は互いに逆向きで、大きさが等しい」

↑経験事実

というもの。

作用・反作用の法則ともいう。

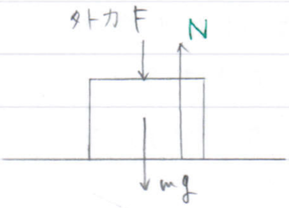
式に表すと、

$$\boxed{\mathbb{F}_{B \leftarrow A} = -\mathbb{F}_{A \leftarrow B}}$$

注)・働く物体が異なるので、作用と反作用はつりあうわけではない
・物体同士接触している必要ない

2-2. 垂直抗力と摩擦力

○垂直抗力



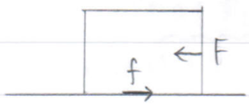
2つの物体が接触しているときに、接触面を通して面に垂直に相手の物体に作用する力を垂直抗力という。Normalの頭文字Nで表すことが多い。

上図の場合、つり合いの式は $F + mg - N = 0$ なので、

$$N = F + mg$$

となる。

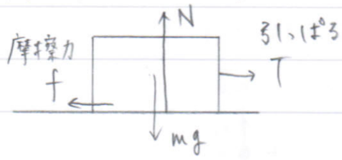
◦ 摩擦力



物体を水平方向に力Fで押すと、力Fが小さい場合物体は動かない。物体が動かないのは、物体の運動を妨げる向きに床が物体に力を作用するからである。
床が物体との接触面に平行な向きに作用する力fを摩擦力という。
(friction)

• 一般に摩擦が無い場合 「滑らかな面」
→ 2つの物体には、その接触面に垂直な方向のみに力が働く

• 摩擦がある場合(まだ静止) 「粗い面」

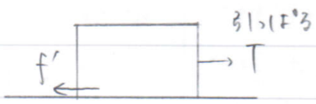


Tを0から徐々に大きくすると、あるf_{max}をこえたところ($T > f_{max}$となったところ)で動きはじめる。動く前は $f = T$ (大きさ)
静止しているときの摩擦力fを静止摩擦力といい、
f_{max}を最大静止摩擦力という。
経験則的に、f_{max}はNに比例することが知られており、

$$\boxed{f_{max} = \mu N}$$

このμを静止摩擦係数という。(表面の状態, 材質による)

• 既に動いている場合



このとき、f'を動摩擦力という。
経験則的にf'もNに比例することが知られており、

$$\boxed{f' = \mu' N}$$

このμ'を動摩擦係数という。
一般に、

$0 < \mu' < \mu$ (接触面積によらない)

NO. 10

DATE

3. 様々な運動

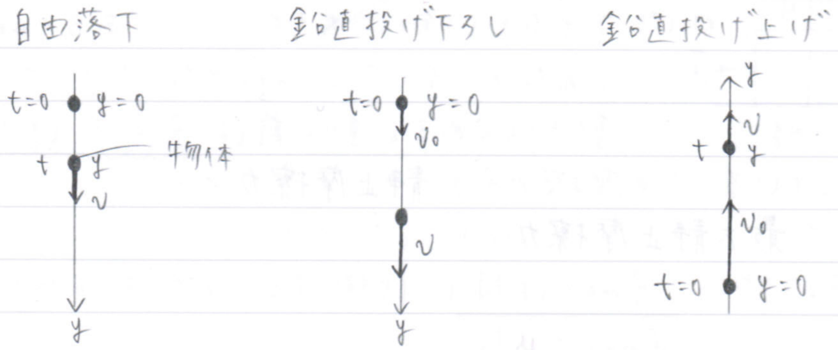
3-1. 落体の運動

ガリレオの落体の法則 … 物体の自由落下は等加速度運動で、
　　　　　　　　　　　その加速度の大きさ g は物体によらない。

注)・地表付近では $g \cong 9.8\,m/s^2$
　　・「自由」… 空気抵抗などの重力以外の力をうけない
　　・上昇中も含む

具体的に…

- 自由落下 … 初速度 0 で落下する物体の運動
- 鉛直投げ下ろし … 初速度 v_0 で鉛直下向きに投げ下ろされた物体の運動
- 鉛直投げ上げ … 初速度 v_0 で鉛直上向きに投げ上げられた物体の運動



上のように座標を設定した場合、下表のようになる。

	y軸	加速度	速度	位置	v-y関係式
自由落下	下向き正	g	$v=gt$	$y=\frac{1}{2}gt^2$	$v^2=2gy$
鉛直投げ下ろし	下向き正	g	$v=v_0+gt$	$y=v_0t+\frac{1}{2}gt^2$	$v^2-v_0^2=2gy$
鉛直投げ上げ	上向き正	$-g$	$v=v_0-gt$	$y=v_0t-\frac{1}{2}gt^2$	$v^2-v_0^2=-2gy$

積分すればいいね!!

本当は運動方程式立ててこれらの式を導けるが略します。

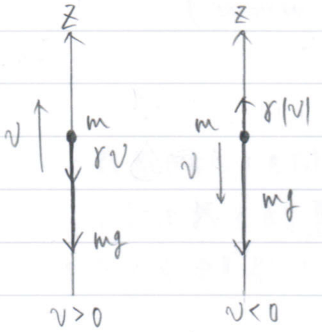
☆ 最高点に達するとき → $v=0$ (自由落下なら $t=\frac{v}{g}$ より $y=\frac{v^2}{2g}$)
　元の位置に返ってくるとき → $y=0$
　　↑投げ上げについてのみ。

○ 空気抵抗がある場合

例えば雨滴

空気中を移動する物体は速さvまたはv^2に比例する抵抗力を受ける。（速度が小さければvに比例するらしいよ…）

・vに比例する場合（授業ノートと文字を同じにしてみました）



ここでは落ちる場合に限らず、ついでに上昇する場合も含めて考えてみる。質量をm，抵抗（くうき）をγvとする。比例定数。

上方に運動するときの運動方程式は、

$$m\frac{dv}{dt} = -mg - \gamma v$$

下方に運動、すなわち落ちる場合、$v<0$で、抵抗は上向きに$\gamma|v|$となるので、

$$m\frac{dv}{dt} = -mg + \gamma|v|$$

となる。$v<0$なので、これは上方の場合と一致する。

よって、上昇，落下に限らず、

$$\Leftrightarrow\quad m\frac{dv}{dt} = -mg - \gamma v$$

$$\Leftrightarrow\quad \frac{dv}{dt} = -g - \frac{\gamma}{m}v$$

$$\Leftrightarrow\quad \frac{dv}{dt} = -\frac{\gamma}{m}\left(v + \frac{mg}{\gamma}\right)$$

$$\Leftrightarrow\quad \frac{1}{v + \frac{mg}{\gamma}}\cdot\frac{dv}{dt} = -\frac{\gamma}{m}$$

$$\Leftrightarrow\quad \int \frac{dv}{v + \frac{mg}{\gamma}} = -\int \frac{\gamma}{m}\,dt$$

$$\Leftrightarrow\quad \log\left(v + \frac{mg}{\gamma}\right) = -\frac{\gamma}{m}t + A \quad (A\text{：積分定数})$$

従って、$v + \frac{mg}{\gamma} = e^{-\frac{\gamma}{m}t + A} \Leftrightarrow v = e^{-\frac{\gamma}{m}t + A} - \frac{mg}{\gamma}$

$t=0$で$v=0$という初期条件とすると、

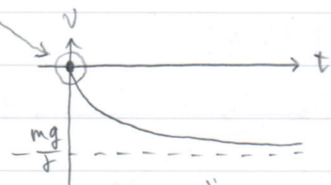
$$e^A = \frac{mg}{\gamma}$$

ゆえに、

$$v = -\frac{mg}{\gamma}\left(1 - e^{-\frac{\gamma}{m}t}\right)$$

$t\to\infty$とすると、$e^{-\frac{\gamma}{m}t}\to 0$なので、

$$\boxed{v_\infty = -\frac{mg}{\gamma}}$$



v-tグラフ

これを終端速度という。

（$t\to 0$では自由落下のvと同じ。）

さらに積分すればzも求まる。

・v^2に比例する場合

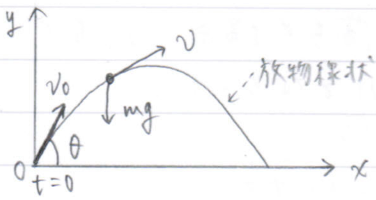
上昇：$m\frac{dv}{dt} = -mg - \gamma v^2$

落下：$m\frac{dv}{dt} = -mg + \gamma v^2$

となる。これについては、先生作？のWEB演習問題にあるので、そっちを見て下さい。($\tanh x$とか出てくるんだがwww)

3-2. 放物運動

・斜方投射



水平方向から角度θ上向きに初速度v_0で投げ出された物体の運動を考える。
水平にx軸，鉛直上方にy軸をとると、運動方程式は、

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = 0, \quad m\frac{d^2y}{dt^2} = -mg \cdots (*)$$

初期条件を、$t=0$で$x=0, y=0$とし、また、v_0をx, y方向に分解すると、$v_{0x} = v_0\cos\theta$, $v_{0y} = v_0\sin\theta$なので、$(*)$を積分すると、

$$\boxed{x = (v_0\cos\theta)t, \quad y = (v_0\sin\theta)t - \frac{1}{2}gt^2}$$

また、速度の成分をv_x, v_yとおくと、

$$\boxed{v_x = v_0\cos\theta, \quad v_y = v_0\sin\theta - gt}$$

☆着地するとき → $y=0$ $\left(\Leftrightarrow t = \frac{2v_0\sin\theta}{g}\right)$

よって、最高点に達するのは、$t = \frac{v_0\sin\theta}{g}$で高さは$y = \frac{v_0^2\sin^2\theta}{2g}$

また、軌道の式は、x・yの式から、tを消去して、

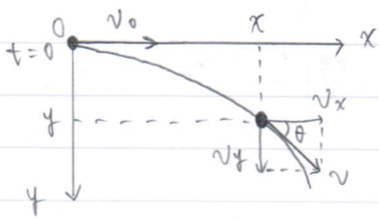
$$y = \tan\theta\cdot x - \frac{g}{2v_0^2\cos^2\theta}x^2$$

全体の飛距離は、$t = \frac{2v_0\sin\theta}{g}$をxの式に代入して、

$$x = \frac{v_0^2\sin 2\theta}{g} \leq \frac{v_0^2}{g}$$

=はθが45°のとき

・水平投射

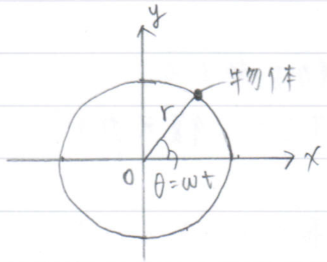


求め方略。(『基礎からの力学』P.37〜38)

このとき、

$$\boxed{\begin{array}{l} v_x = v_0, \quad v_y = gt \\ x = v_0 t, \quad y = \frac{1}{2}gt^2 \\ \text{軌道}: y = \frac{g}{2v_0^2}x^2 \end{array}}$$

3-3. 等速円運動



このとき、$x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ (極座標)

$\theta=\omega t$ (+定数のときもあるが) とする。

この ω を角速度という。(単位はたいてい 1/s)

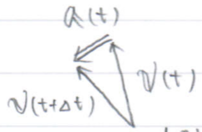
$$\left(\begin{array}{l}\omega>0 \to \text{反時計回り}\\ \omega<0 \to \text{時計回り}\end{array}\right)$$

$r=$一定かつ $\theta=\omega t$ のとき等速円運動という。

$\boldsymbol{r}=(r\cos\omega t,\ r\sin\omega t)$ なので、

$$\boldsymbol{v}=\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}=(-r\omega\sin\omega t,\ r\omega\cos\omega t)$$

↑軌道の接線方向を向いている



$$\boldsymbol{a}=\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}=(-r\omega^2\cos\omega t, -r\omega^2\sin\omega t)=-\omega^2\boldsymbol{r}$$

↑常に円運動の中心に向かう
(向心加速度)

大きさに注目すると、

$$\left.\begin{array}{l}|\boldsymbol{r}|=r\\ |\boldsymbol{v}|=r\omega \quad (\omega>0\text{のとき})\\ |\boldsymbol{a}|=r\omega^2\end{array}\right\}\ \text{一定}$$

また、$\boxed{|\boldsymbol{a}|=\frac{v^2}{r}}$ とわかる。

1秒あたりの回転数を f とおくと、$\omega=2\pi f$

また、周期(1周するのにかかる時間)を T とおくと、$T=\frac{1}{f}$

よって、ω と T の関係式は、

$$\omega=2\pi f=\frac{2\pi}{T}\quad, T=\frac{2\pi}{\omega}$$

また、運動方程式により、

$$F=m\frac{v^2}{r}=m\frac{(r\omega)^2}{r}=m\omega^2 r$$ ←Fの大きさ!!

↑向心力という。

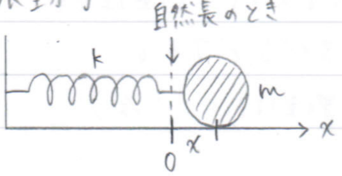
の力が物体に働いていることがわかる。

NO. 14

DATE

3-4. 単振動

。振動子 ← ばね振り子とも。



左図のような振動子の運動を考える。物体には、元に戻ろうとする力、復元力が働く。

$x=0$ が、ばねが自然長（伸びても縮んでもないときの長さ）にあるときだとする。$x>0$ なら伸びており、$x<0$ なら縮んでいる。

フックの法則により、ばねの復元力は変形の大きさに比例するので、

ばねの復元力 $F=-kx$

と表せる。このときの k をばね定数（弾性定数）とよぶ。

$k>0$ である。

このとき、運動方程式は、

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=-kx \quad \cdots (*)$$

と表される。これは $x=x(t)$ に関する微分方程式だが、

「振動子の動き的に $(*)$ 解は三角関数と考えられる…」

みたいに授業ではやっていたが、せっかくなので、

まともな解き方?をのせときます。（授業のはノート見て!!）

〈まともな解法?〉 そこまでまともでない。かなり数学チック。

$(*)$ の両辺に $\frac{dx}{dt}$ をかけると、

$$m\frac{dx}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}=-kx\frac{dx}{dt}$$

両辺を t で積分して、

$$\frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2=-\frac{1}{2}kx^2+A \quad (A:\text{積分定数})$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\frac{1}{2}kx^2=A$$

左辺をみると、正の項のみなので、$A>0$。よって、$A=\frac{1}{2}ka^2$

とおいてみると、（a が定数の役目）

$$\frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\frac{1}{2}kx^2=\frac{1}{2}ka^2$$

$$\frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2=\frac{1}{2}k(a^2-x^2)$$

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2=\frac{k}{m}(a^2-x^2)$$

$$\frac{dx}{dt}=\pm\sqrt{\frac{k}{m}}\sqrt{a^2-x^2}$$

$$\frac{\pm dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\sqrt{\frac{k}{m}}dt$$

両辺を積分すれば、

$$\mp \cos^{-1}\frac{x}{a} = \sqrt{\frac{k}{m}}\,t + \alpha \quad (\alpha：定数)$$

↑おぉぉ…

両辺のcosをとり、aをかければ、

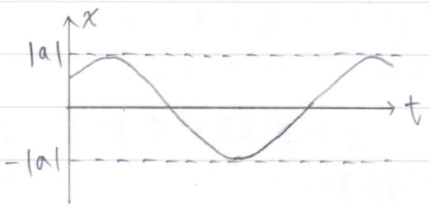
$$\boxed{x = a\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t + \alpha\right)}$$

αの代わりに $\alpha - \frac{\pi}{2}$ とかくと、

$$\boxed{x = a\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t + \alpha\right)}$$

$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ とした。

このグラフを書いてみると ($x = a\cos(\omega t + \alpha)$ で)



授業ノート参照

(一般解として、
$x = A\cos\omega t + B\sin\omega t$
も覚えよう。)

このとき　振幅：$|a|$

角振動数：$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

周期：$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ ←ミカン by マリリン

位相：$\omega t + \alpha$

初期位相：α

であり、このような式で表される運動を**単振動**という。

- 速度に比例する抵抗があるとき ←先生が問で出題していたため

運動方程式は、

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - b\frac{dx}{dt} \quad (**) \quad (b>0,\ 定数,\ b十分小)$$

となる。$x = Ae^{\lambda t}$ とおくと、$\frac{dx}{dt} = A\lambda e^{\lambda t}$, $\frac{d^2x}{dt^2} = A\lambda^2 e^{\lambda t}$ なので

代入すると、

$$mA\lambda^2 e^{\lambda t} = -kAe^{\lambda t} - bA\lambda e^{\lambda t}$$

$$\Leftrightarrow \quad m\lambda^2 = -k - b\lambda$$

$$\Leftrightarrow \quad m\lambda^2 + b\lambda + k = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \lambda = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4mk}}{2m}$$

よって、

$$x = Ae^{\frac{-b+\sqrt{b^2-4mk}}{2m}t},\ Ae^{\frac{-b-\sqrt{b^2-4mk}}{2m}t}$$

となる。

今、bが十分小さいので、$b^2 < 4mk$であるから、

$$x = Ae^{\frac{-b+i\sqrt{4mk-b^2}}{2m}t},\ Ae^{\frac{-b-i\sqrt{4mk-b^2}}{2m}t}$$

が(**)の解であり、

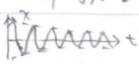
$$x = Ae^{-bt}\left(\alpha e^{\frac{i\sqrt{4mk-b^2}}{2m}t} + \beta e^{\frac{-i\sqrt{4mk-b^2}}{2m}t}\right) \quad \alpha, \beta : 定数$$

も解であるから、オイラーの式を用いると、

$$\underline{x = Ae^{-bt}\cos\left(\sqrt{4mk-b^2}\,t + \delta\right)}$$

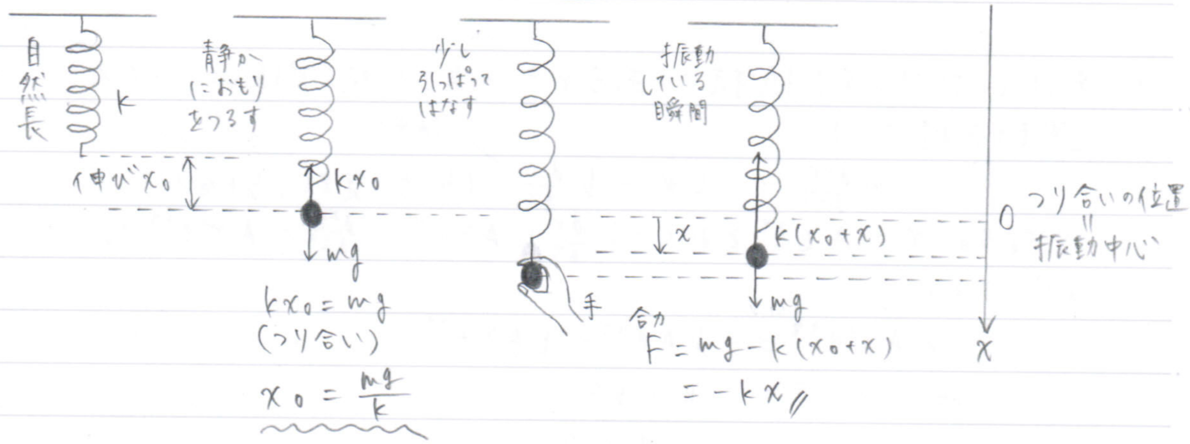
が出てくる。(ふう…)

すなわちこれは、Ae^{-bt}にしたがって、時間に対して、振幅が指数関数的に小さくなってゆく単振動と考えることができる。

これを**減衰振動**という。 ←こんなヤツ。

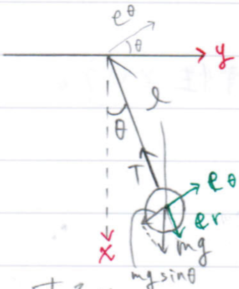
これに対し、振動している物体が一定の周期で変動する外力の作用で、外力の周期と同じ周期で振動しているとき、この振動を**強制振動**という。また、振り子のような振動する物体には、その物体に固有の振動数(**固有振動数**)に一致するときには、強制振動の振幅は大きくなる。これを**共振**あるいは**共鳴**という。

○ 鉛直につるしたばね振り子 (補足)



○（単）振り子　（授業ノート通りに）

長い糸の一端を固定し、他端におもりをつけ、鉛直面内で



∵おもりに振幅の小さな振動をさせる装置のこと。

左図のように文字をおくと、振り子の位置について、

$$x = l\cos\theta,\ y = l\sin\theta$$

ここでは重力（重心？）の軌道の接線方向（e_θ方向）について運動方程式を立てる。

すると、

$$ma_\theta = -mg\sin\theta \quad \cdots ①$$

ここで、$\dot{} = \frac{d}{dt}$として、

$$\underbrace{\begin{pmatrix}\ddot{x}\\ \ddot{y}\end{pmatrix}}_{加速度} = a_\theta e_\theta + a_r e_r$$

（e_θ, e_rは単位ベクトルとする）

で表したい。

$x = l\cos\theta,\ y = l\sin\theta$より、

$$\begin{pmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\end{pmatrix} = l\begin{pmatrix}-\dot{\theta}\sin\theta\\ \dot{\theta}\cos\theta\end{pmatrix}$$

さらに微分

$$\begin{pmatrix}\ddot{x}\\ \ddot{y}\end{pmatrix} = l\begin{pmatrix}-\ddot{\theta}\sin\theta - \dot{\theta}^2\cos\theta\\ \ddot{\theta}\cos\theta - \dot{\theta}^2\sin\theta\end{pmatrix}$$

e_θとe_rをx, y軸方向に分解すると、$|e_\theta| = |e_r| = 1$から、

$$e_\theta = \begin{pmatrix}-\sin\theta\\ \cos\theta\end{pmatrix},\ e_r = \begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix}$$

なので、$\begin{pmatrix}\ddot{x}\\ \ddot{y}\end{pmatrix} = l\ddot{\theta}e_\theta - l\dot{\theta}^2 e_r$

となるから、$a_\theta = l\ddot{\theta},\ a_r = l\dot{\theta}^2$とわかる。

従って、

$$① \Longleftrightarrow ml\frac{d^2\theta}{dt^2} = -mg\sin\theta$$

振幅が小さい、すなわちθが十分小さいという想定なので、

$|\theta| \ll 1$として、$\sin\theta \simeq \theta$と近似できる。（$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$のイメージ）

よって、$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l}\theta$

これはさっきからの単振動の方程式と同じ形。

NO. 18

DATE

従って、$\theta = \theta_0 \cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}}\,t + \delta\right)$ が求まる。

単振動だ!!（θ_0, δ は定数）　$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$ とおくと、

周期 $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ ← リンゴ by マリリン

θ_0 によらない。これを（振り子の）等時性という。

（振幅）

4. 運動量と力積

4-1. 運動量

質量mの物体が速度ベクトル$\mathbf{v}$で運動するとき、

$$\boxed{\mathbf{p}=m\mathbf{v}}$$

の**運動量**をもつという。運動方程式は、$\mathbf{a}=\frac{d\mathbf{v}}{dt}$ より、

$$\frac{d}{dt}(m\mathbf{v})=\mathbf{F}\qquad ※\mathbf{F}=\begin{pmatrix}F_x\\F_y\\F_z\end{pmatrix}$$

だから、

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt}=\mathbf{F}$$

と表せる。いま、$\mathbf{F}$をtの関数と考え、$t=t_0$で$\mathbf{v}=\mathbf{v}_0$, $t=t_1$で$\mathbf{v}=\mathbf{v}_1$とすると、上式をtで積分して、

$$\underbrace{\mathbf{p}(t_1)-\mathbf{p}(t_0)}_{\text{運動量変化}}=m\mathbf{v}_1-m\mathbf{v}_0=\underbrace{\int_{t_0}^{t_1}\mathbf{F}(t)\,dt}_{\text{力積}}$$

力積という。

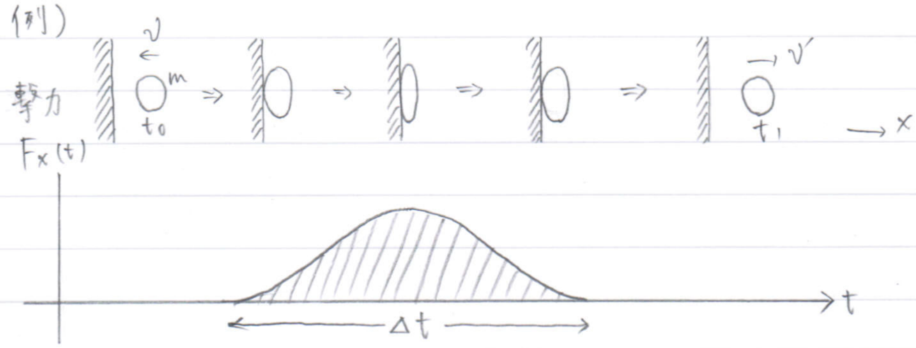
(力$\mathbf{F}$[N]をΔt[s]の間物体に加えると物体が受ける力積は、$\mathbf{F}\Delta t$)

すなわち、

運動量変化 = 力積 …(☆)

また、球を壁に強く打ちつけるときのように、物体に働く力が非常に短時間で、非常に大きい場合、これを**撃力**という。

(例)



力積は斜線部の面積に等しく、(☆)のことから、

$$\text{力積} = mv' - m(-v) = m(v+v')$$

また、平均の撃力を$\bar{F}$とすると、

$$\text{力積} = \bar{F}\Delta t \quad \left(\Leftrightarrow \bar{F}=\frac{\text{力積}}{\Delta t}\right)$$

Δt→小だと$\bar{F}$→大, Δt→大だと$\bar{F}$→小である。

☆内力と外力

内力…考えている物体系内の物体間で及ぼしあう力

外力…考えている物体系内の物体が物体系外の物体から受ける力

※物体系…いくつかの物体をひとまとまりにして考えるときのそのまとまりのこと。

4-2. 運動量保存の法則

→「外力が働かない場合、考えている物体系の運動量は保存される」

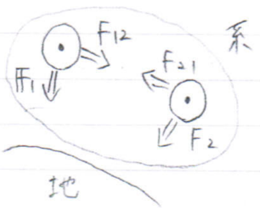
というもの。

この検証は from ノート↓(汗) 腕が死にそうなので許して!!

• 2体系

$$\frac{d\mathbb{P}_1}{dt} = \mathbb{F}_{12} + \mathbb{F}_1$$

$$\frac{d\mathbb{P}_2}{dt} = \mathbb{F}_{21} + \mathbb{F}_2$$



作用 反作用の法則

$\Rightarrow \mathbb{F}_{12} + \mathbb{F}_{21} = 0$

$\left(\begin{array}{ll} \mathbb{F}_{12}, \mathbb{F}_{21} & ; 内力 \\ \mathbb{F}_1, \mathbb{F}_2 & ; 外力 \end{array} \right)$

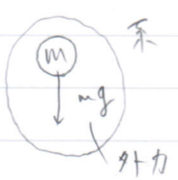
$$\frac{d}{dt}(\mathbb{P}_1 + \mathbb{P}_2) = \mathbb{F}_1 + \mathbb{F}_2$$

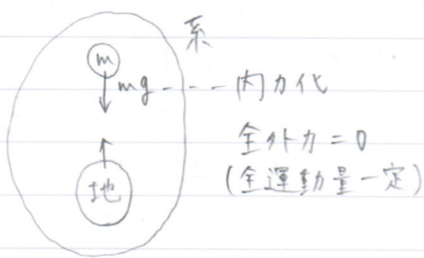
全運動量の変化率 = 全外力

(内力の詳細によらない)

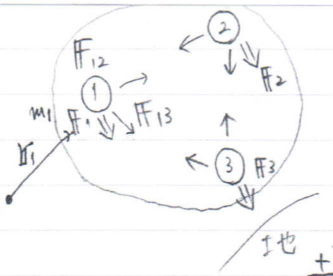
特に全外力0の場合、全運動量一定。保存する。

☆内力,外力の識別はどこまでを(物体)系とみなすかによる。





・多体系



$$\frac{dP_1}{dt} = F_{12} + F_{13} + F_1$$

$$\frac{dP_2}{dt} = F_{21} + F_{23} + F_2$$

$$+)\ \frac{dP_3}{dt} = F_{31} + F_{32} + F_3$$

（F_{ij}：jがiに及ぼす力
F_i：iにかかる外力
$F_{ij} = -F_{ji}$：作用反作用則）

$$\frac{d}{dt}(P_1+P_2+P_3) = F_1 + F_2 + F_3$$ ←内力が全てキャンセルされる

全運動量の変化率 ＝ 全外力

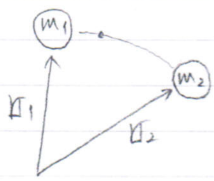
特に全外力＝0ならば、全運動量は保存する（時間と共に変化しない）。

重心 $$r = \frac{m_1 r_1 + m_2 r_2 + m_3 r_3}{m_1 + m_2 + m_3}$$ ←この場合、3体系なので。

$$(m_1+m_2+m_3)\frac{d^2 r}{dt^2} = F_1 + F_2 + F_3$$ ←重心の運動方程式

$$\left(P_i = m_i \frac{dr_i}{dt} \quad i = 1, 2, 3 \text{ なので}\right)$$

4-3. 重心の運動保存の法則



$$r = \frac{m_1 r_1 + m_2 r_2}{m_1 + m_2} \quad \cdots (*)$$

… 重心の位置ベクトル

$$(m_1+m_2)\frac{d^2 r}{dt^2} = m_1 \frac{d^2 r_1}{dt^2} + m_2 \frac{d^2 r_2}{dt^2}$$

$$= F_1 + F_2 \ (\text{全外力})$$

重心は、系のすべての質量をになって、全外力のもとでの運動をする。

特に全外力＝0のとき、重心は等速度運動する。→ 重心の運動保存の法則

$$\left(\frac{d^2 r}{dt^2} = 0 \underset{(*)}{\Longleftrightarrow} \frac{d}{dt}(P_1 + P_2) = 0\right)$$

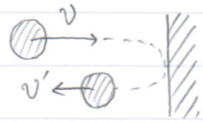
DATE

4-4. はねかえり係数

→ 直線上を運動している2物体が衝突する場合、衝突後に2物体が遠ざかる速さと衝突前に2物体が近づく速さの比のこと。
回復係数，反発係数ともいう。e で表される。

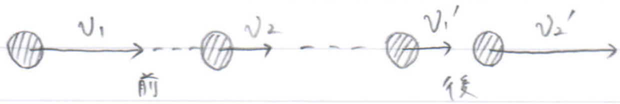
・物体が壁に衝突してはねかえる場合

$$e = \frac{|v'|}{|v|} = \underline{-\frac{v'}{v}}$$



・直線上で2物体が衝突してはねかえる場合

$$e = \underline{-\frac{v_1' - v_2'}{v_1 - v_2}}$$



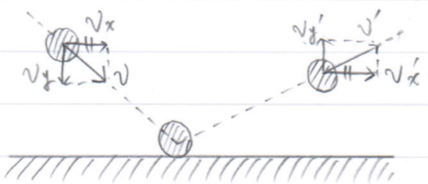
$$\begin{cases} e = 1 & \text{のとき弾性衝突} \\ 0 \leqq e < 1 & \text{のとき非弾性衝突} \\ e = 0 & \text{のとき完全非弾性衝突（合体!!）} \end{cases}$$

← 衝突前後で運エネ保存。

という。

・斜め衝突

滑らかな面への衝突では、
面に平行 $v_x' = v_x$（変化なし）
垂直 $v_y' = -ev_y$
よって、$e = \underline{-\frac{v_y'}{v_y}}$



5. 仕事と力学的エネルギー　両方とも単位は$\overset{ジュール}{J}$ですよー

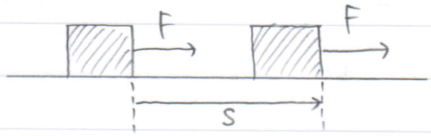
5-1. 仕事

・力の向きに物体が移動した場合の仕事

物体がF[N]の力を受けて、力の向きに距離s[m]移動した場合、この力が物体にした仕事W[$\overset{ジュール}{J}$]は、

$$\boxed{W = Fs}$$

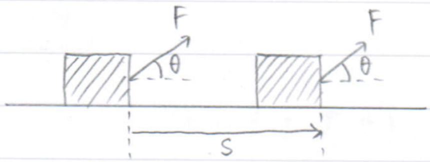
で表される。 $(J = N \cdot m)$



・力の向きと移動の向きが異なる場合の仕事

物体がF[N]の力を受けて、力の向きと角θをなす向きに距離s[m]移動した場合、この力が物体にした仕事W[J]は、

$$\boxed{W = Fs\cos\theta}$$



・仕事の原理

→「道具を使って力を小さくすると、移動距離が増え、仕事の量は変わらない」

というもの。（link→『基礎からの力学』P.99下～P.100上）

・仕事率（パワー）

→単位時間あたりの仕事のこと。

t[s]の間にW[J]の仕事をしたならば、仕事率P[$\overset{ワット}{W}$]は、

$$\boxed{P = \frac{W}{t}} \quad (W = J/s)$$

また、物体が力F[N]をうけながら、力の向きに一定の速さv[m/s]で運動している場合、

$$P = \frac{Fs}{t} = F\frac{s}{t} = Fv$$

☆垂直抗力は仕事をしない。

5-2. 力学的エネルギー　単位 J

・力学的エネルギー

物体が仕事をする能力をもっているとき、この物体はエネルギーをもつという。運動エネルギーKと位置エネルギーUの和を力学的エネルギーという。これをEで表すと、

$$E = K + U$$

・運動エネルギー

速さ v [m/s] で運動している質量 m [kg] の物体がもつ運動エネルギー K [J] は、

$$\boxed{K = \frac{1}{2}mv^2}$$

・位置エネルギー　p.89

① 重力による位置エネルギー

基準の高さより h [m] 上方にある質量 m [kg] の物体がもつ重力による位置エネルギー U [J] は、

$$\boxed{U = mgh}$$

② 弾性力による位置エネルギー

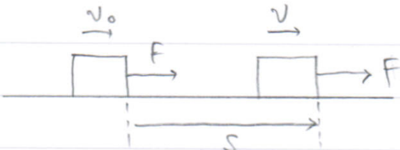
ばね定数 [N/m] のばねが自然長より x [m] 伸びて(縮んで)いるときに、ばねがもつ弾性力による位置エネルギー U [J] は、

$$\boxed{U = \frac{1}{2}kx^2}$$

☆物体の運動エネルギーの変化 ＝ 物体になされた仕事

式で表すと、

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = Fs$$



証明は略(授業ノートにある)

5-3. 力学的エネルギー保存の法則

・保存力と非保存力

保存力…物体が力を受けながら2点間を動くとき、その力がする仕事が移動経路によらず、2点の位置で決まる場合の力。保存力による位置エネルギーを決めることができる。

ex)

	落体	ばね
運動エネルギー以外のエネルギー	mgx (位置エネ)	$\frac{k}{2}x^2$ (弾性エネ)
力	$-mg$ ↑ 重力	$-kx$ ↑ 弾性力

$*-\frac{d}{dx}$

重力と弾性力は保存力。

* 位置xにおける力が$\underline{-\frac{dU}{dx}}$とかける力 = 保存力 ということもできる。
(上の場合、$U(x)=mgx$ or $\frac{k}{2}x^2$ となる。)
$U(x)$のことをポテンシャル(エネルギー)ともいう。

非保存力…物体の移動経路によって、する仕事が異なる力。
ex) 摩擦力, 空気抵抗

物体が非保存力に仕事をされると、物体の力学的エネルギーはその分だけ変化する。その場合でも、変化した分は熱的・電気的・化学的エネルギーなどに転換されており、全体のエネルギーとしては保存するといえる。

・力学的エネルギー保存の法則

物体が保存力だけから仕事をされる場合、力学的エネルギーは保存する。式で表すと、

$$\underline{E=\frac{1}{2}mv^2+U(x)=(一定)}$$

保存力はポテンシャルを小さくする方向に働く。

DATE

重力のみが働く場合、 $E = \frac{m}{2}v^2 + mgx = (一定)$
弾性力のみが働く場合、 $E = \frac{m}{2}v^2 + \frac{k}{2}x^2 = (一定)$

補 単振動のエネルギー
振動数f, 振幅Aの単振動を行っている質量mの単振動のエネルギーEは、振幅の2乗と振動数の2乗に比例する。

6. 角運動量と力のモーメント

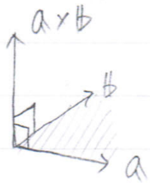
6-1. ベクトル積(外積)

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix},\ \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix}$$ のとき $$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix}$$

すぐわかること

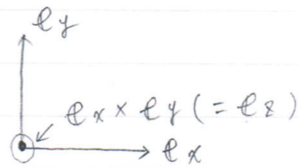
$\mathbf{a}\times\mathbf{b} \perp \mathbf{a}$

$\perp \mathbf{b}$

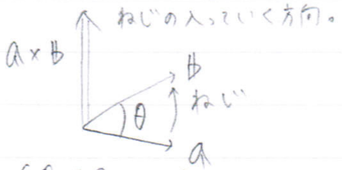


$\mathbf{e}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\mathbf{e}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\mathbf{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ とすると、

$$\begin{cases} \mathbf{e}_x \times \mathbf{e}_y = \mathbf{e}_z \\ \mathbf{e}_y \times \mathbf{e}_z = \mathbf{e}_x \\ \mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_x = \mathbf{e}_y \end{cases}$$



$\mathbf{a}\times\mathbf{b}$の向きは?



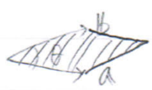
$(0 \leqq \theta < \pi)$

$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = -(\mathbf{b}\times\mathbf{a})$

とくに $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ が平行ならば、 $\mathbf{a}\times\mathbf{b} = 0$

$$|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|^2 + (\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})^2 = |\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2$$

$\therefore$ $|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|^2 = |\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2\sin^2\theta$ 　 $(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})^2 = |\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2\cos^2\theta$



$|\mathbf{a}\times\mathbf{b}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin\theta \quad (0 \leqq \theta < \pi)$

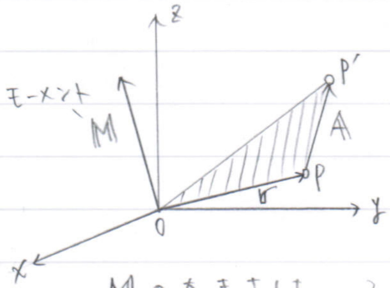
$=$  の面積

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) = \frac{d\mathbf{a}}{dt}\times\mathbf{b} + \mathbf{a}\times\frac{d\mathbf{b}}{dt} \quad \text{e.t.c.}$$

NO. 28

DATE . .

☆ モーメントとは？



1つのベクトル $\mathbb{A}$ がP点から引かれるとき（$\overrightarrow{PP'}$）、Oについての（Oのまわりの）モーメントとは、OからPに引いた位置ベクトルを $\mathbb{r}$ として、

$$\underline{\mathbb{M} = \mathbb{r} \times \mathbb{A}} \quad \cdots ☆$$

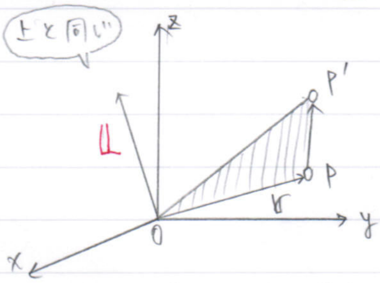
で与えられるベクトルのことである。

$\mathbb{M}$ の大きさは、2△OPP'に等しい。

6-2. 角運動量

質量 m の物体（質点とすればP）が慣性系に対して $\mathbb{v}$ の速度で運動しているとき、その運動量は $m\mathbb{v}$ である。

上と同じ



慣性系の定点Oについての $m\mathbb{v}$ のモーメントを考え、これをOについての運動量のモーメント、または**角運動量**といい、$\mathbb{L}$ で表す。

$\mathbb{L}$ は△OPP'の面に直角に $\mathbb{r} \to \mathbb{v}$ の向きにまわる右まわしのねじの進む向きに向いていて、その大きさは2△OPP'である。上の☆で $\mathbb{A} \to m\mathbb{v}$ としたものなので、

単位 J·s → $\boxed{\mathbb{L} = \mathbb{r} \times m\mathbb{v} = m(\mathbb{r} \times \mathbb{v})}$ ⋯(＊)

ベクトルの始点が原点でない場合は、始点の位置ベクトルを $\mathbb{r}_0$ として、$\underline{\mathbb{L} = (\mathbb{r} - \mathbb{r}_0) \times m\mathbb{v} = m(\mathbb{r} - \mathbb{r}_0) \times \mathbb{v}}$

となる。

6-3. 力のモーメント（トルク）

→物体に作用する力が物体を支点（回転軸）Oのまわりに回転させようとする能力のこと。よく $\mathbb{N}$ で表し、ベクトルの始点が原点にある場合、

$$\boxed{\mathbb{N} = \mathbb{r} \times \mathbb{F}}$$

で定義される。原点でない場合、

$$\underline{\mathbb{N} = (\mathbb{r} - \mathbb{r}_0) \times \mathbb{F}}$$

となる。

授業ノート
（→link てこの原理）

ここで、P.28の(*)の式の両辺をtで微分すると、

$$\frac{d\mathbb{L}}{dt} = m\left(\frac{d\mathbb{r}}{dt}\times\mathbb{v} + \mathbb{r}\times\frac{d\mathbb{v}}{dt}\right)$$

$\frac{d\mathbb{r}}{dt} = \mathbb{v}$ だから、$\frac{d\mathbb{r}}{dt}\times\mathbb{v} = 0$，また、$\frac{d\mathbb{v}}{dt} = \mathbb{a}$（加速度）だから、

$$\frac{d\mathbb{L}}{dt} = m(\mathbb{r}\times\mathbb{a})$$

運動の第2法則から、物体に働いている力を$\mathbb{F}$とすると、

$$m\mathbb{a} = \mathbb{F}$$

なので、代入して、

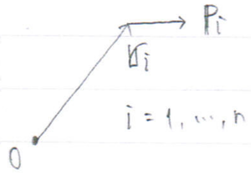
$$\underline{\frac{d\mathbb{L}}{dt} = \mathbb{r}\times\mathbb{F} = \mathbb{N}}$$

従って、

「慣性系の一定Oのまわりにとった1つの質点の角運動量の変化率は、この質点に働く力のOのまわりのモーメントに等しい」

といえる。特に力が中心力なら、$\mathbb{N} = 0 \rightarrow \mathbb{L} = $（一定）とわかる。

6-4. 多体系での角運動量



全角運動量

$$\mathbb{L} = \mathbb{r}_1\times\mathbb{p}_1 + \cdots + \mathbb{r}_n\times\mathbb{p}_n = \sum_{i=1}^{n} m_i(\mathbb{r}_i\times\mathbb{v}_i)$$

（質点系の角運動量ともいう）

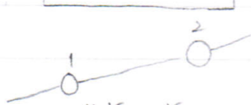
$n = 2$

$$\frac{d\mathbb{p}_1}{dt} = \underbrace{\mathbb{F}_1}_{外力} + \underbrace{\mathbb{F}_{12}}_{2から働く内力}$$

$$\frac{d\mathbb{p}_2}{dt} = \mathbb{F}_2 + \mathbb{F}_{21}$$

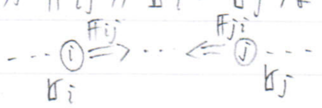
$$\begin{aligned}\frac{d\mathbb{L}}{dt} &= \frac{d}{dt}(\mathbb{r}_1\times\mathbb{p}_1 + \mathbb{r}_2\times\mathbb{p}_2)\\ &= \mathbb{r}_1\times(\mathbb{F}_1 + \mathbb{F}_{12}) + \mathbb{r}_2\times(\mathbb{F}_2 + \mathbb{F}_{21})\\ &= \mathbb{r}_1\times\mathbb{F}_1 + \mathbb{r}_2\times\mathbb{F}_2 + (\mathbb{r}_1 - \mathbb{r}_2)\times\mathbb{F}_{12}\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{F}_{21} = -\mathbb{F}_{12}}$$



$\mathbb{F}_{12} /\!/ \mathbb{r}_1 - \mathbb{r}_2$

内力 $\mathbb{F}_{ij} /\!/ \mathbb{r}_i - \mathbb{r}_j$ ならば、



万有引力，クーロン力 e.t.c はそう

$$\frac{d\mathbb{L}}{dt} = \mathbb{r}_1 \times \mathbb{F}_1 + \cdots + \mathbb{r}_n \times \mathbb{F}_n$$ …外力の全モーメント ← 内力は無関係!!

$$\left(\text{cf. } \frac{d\mathbb{P}}{dt} = \mathbb{F}_1 + \cdots + \mathbb{F}_n \right.$$ …全外力)

全運動量

とくにこれらの式で、右辺 = 0 の場合
$\mathbb{L}$, $\mathbb{P}$ は保存する。(時間と共に変化しない) ← 角運動量保存の法則

注. $\begin{cases} \text{全外力} = 0 \\ \text{ある点のまわりの力のモーメント} = 0 \end{cases}$ ⇒ 任意の点のまわりの力のモーメント = 0

∵) $\begin{cases} \mathbb{r}_1 \times \mathbb{F}_1 + \cdots + \mathbb{r}_n \times \mathbb{F}_n = 0 \\ \mathbb{F}_1 + \cdots + \mathbb{F}_n = 0 \end{cases}$ ⇒ $(\mathbb{r}_1 - \mathbb{r}_0) \times \mathbb{F}_1 + \cdots + (\mathbb{r}_n - \mathbb{r}_0) \times \mathbb{F}_n$
$= \underline{\underline{\mathbb{r}_1 \times \mathbb{F}_1 + \cdots + \mathbb{r}_n \times \mathbb{F}_n}} - \mathbb{r}_0 \times (\mathbb{F}_1 + \cdots + \mathbb{F}_n)$
$= 0$ //

6-5. 重心のまわりの角運動量 ← レポート関連で

質点系の運動を考えるとき、その運動を重心の運動とこれに相対的な運動とに分けて考えることが多い。角運動量についても重心の運動とこれに相対的な運動、つまり重心のまわりの運動に分けて考えることが多い。

慣性系内の一定Oのまわりの一つの質点系の角運動量は、

$$\mathbb{L} = \Sigma m_i (\mathbb{r}_i \times \mathbb{v}_i) \quad (※ \Sigma = \sum_{i=1}^{n})$$

質点系の重心の位置を $\mathbb{r}_G$ とし、重心から i 番目の質点までの位置ベクトルを $\mathbb{r}_i'$ とすると、

$$\mathbb{r}_i = \mathbb{r}_G + \mathbb{r}_i'$$

これを t で微分して、

$$\mathbb{v}_i = \mathbb{v}_G + \mathbb{v}_i'$$

この2式を上の式に代入して、

$$\mathbb{L} = \Sigma m_i \{ (\mathbb{r}_G + \mathbb{r}_i') \times (\mathbb{v}_G + \mathbb{v}_i') \}$$

$M = \Sigma m_i$ として、

$$= M(\mathbb{r}_G \times \mathbb{v}_G) + \Sigma (m_i \mathbb{r}_i' \times \mathbb{v}_i') + \mathbb{r}_G \times \Sigma m_i \mathbb{v}_i' + (\Sigma m_i \mathbb{r}_i') \times \mathbb{v}_G$$

$\Sigma m_i \mathbb{r}_i'$ は重心を原点として質点系の各質点の位置を表したときの重心の位置を求める公式の分子にあたるので、0。したがって、$\Sigma m_i \mathbb{v}_i'$ も 0。

したがって、

$$\boxed{\mathbb{L} = \mathbb{r}_G \times M\mathbb{v}_G + \mathbb{L}_{(G)}} \quad \cdots (**)$$

第1項は質量が全て重心に集まったと考えたときの原点のまわりの角運動量、$\mathbb{L}_{(G)}$は、

$$\mathbb{L}_{(G)} = \sum \mathbb{r}_i' \times (m_i \mathbb{v}_i')$$

で重心のまわりの角運動量である。

また、$(**)$をtで微分して、

$$\frac{d\mathbb{L}}{dt} = \mathbb{v}_G + M\mathbb{v}_G + \mathbb{r}_G \times M\mathbb{a}_G + \frac{d\mathbb{L}_{(G)}}{dt}$$

$\mathbb{v}_G \times \mathbb{v}_G = 0$, $M\mathbb{a}_G = \sum \mathbb{F}_i^{外力}$ だから、

$$\underline{\frac{d\mathbb{L}}{dt} = \mathbb{r}_G \times \sum \mathbb{F}_i + \frac{d\mathbb{L}_{(G)}}{dt}}$$

さらに、

$$\mathbb{N} = \sum (\mathbb{r}_i \times \mathbb{F}_i) = \sum (\mathbb{r}_G + \mathbb{r}_i') \times \mathbb{F}_i = \sum (\mathbb{r}_i' \times \mathbb{F}_i) + \mathbb{r}_G \times \sum \mathbb{F}_i$$

となるので、

$$\underline{\frac{d\mathbb{L}_{(G)}}{dt} = \sum (\mathbb{r}_i' \times \mathbb{F}_i) = \mathbb{N}_{(G)}}$$

$\mathbb{N}_{(G)} = 0$ なら $\mathbb{L}_{(G)} = $(一定)だとわかる。

すなわち、

「質点系に働く外力の重心のまわりのモーメントが0であるときには、
重心のまわりの角運動量は保存される。」

ということ。

DATE

7. 剛体のつり合いと運動

☆ 剛体とは?
→ 外から力を加えたとき変形が無視できる硬い物体のこと。

7-1. 剛体のつり合い

いくつかの力が作用している剛体が静止し続けている場合、これらの力はつり合っているという。

剛体に作用する力 $\mathbb{F}_1, \mathbb{F}_2, \cdots$ がつり合うための条件は、

① 重心が運動しないこと

重心の運動方程式: $M\ddot{\mathbb{r}}_G = \sum \mathbb{F}_i$ のことを考えると、

① $\Leftrightarrow$ $\sum \mathbb{F}_i = 0$ である。

② 剛体が回転しないこと

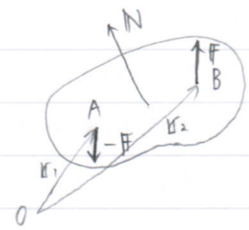
$\Leftrightarrow$ ある点のまわりの外力のモーメントの和 $\sum \mathbb{N}_i = 0$

($\xrightarrow{\text{link}}$ P.30 上方の注)

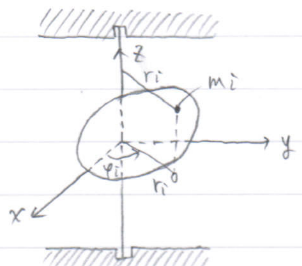
・偶力

図のように剛体の2点A, Bに大きさが等しく方向が反対の2つの力 $-\mathbb{F}, \mathbb{F}$ が作用するとき、これを偶力という。このとき合力は0であり、

偶力のモーメント $\mathbb{N} = (\mathbb{r}_2 - \mathbb{r}_1) \times \mathbb{F} = \mathbb{r}_{12} \times \mathbb{F}$



7-2. 固定軸をもつ剛体の(回転)運動 ← レポート関連で



剛体を左図のようにz軸で固定する。

このとき剛体の位置は、剛体が固定軸のまわりに標準の位置からどれだけまわったかを示せば決まるので、自由度は1。

よって一つの式で運動は決まり、それには角運動量の式のz方向の成分である、

$$\frac{dL_z}{dt} = \sum (x_i Y_i - y_i X_i) = N_z$$

を使う。

$$L_z = \sum m_i \left(x_i \frac{dy_i}{dt} - y_i \frac{dx_i}{dt} \right)$$

だが、さっきの図のように、r_i, φ_iを設定すると、

$$x_i = r_i \cos\varphi_i \ , \ y_i = r_i \sin\varphi_i$$

これをtで微分すると、r_iは時間に対してかわらないので、

$$\frac{dx_i}{dt} = -r_i \sin\varphi_i \frac{d\varphi_i}{dt}, \quad \frac{dy_i}{dt} = r_i \cos\varphi_i \frac{d\varphi_i}{dt}$$

剛体なので、どの質点でも$\frac{d\varphi_i}{dt}$は一定で、これは固定軸のまわりの角速度ωに等しい。したがって、

$$\frac{dx_i}{dt} = -r_i \omega \sin\varphi_i \ , \ \frac{dy_i}{dt} = r\omega \cos\varphi_i$$

これをL_zの式に代入すると、

$$L_z = \left(\sum m_i r_i^2 \right) \omega$$

ここで、

$$\boxed{I = \sum m_i r_i^2}$$

とおくと、Iは剛体の固定軸のまわりの慣性モーメントという。

N_zをNとかくことにすると、

$$\boxed{\begin{aligned} L_z &= I\omega \\ I\frac{d\omega}{dt} &= N \end{aligned}}$$

剛体が標準の位置から回った角をφとすれば$\omega = \frac{d\varphi}{dt}$だから、

$$I \frac{d^2\omega}{dt^2} = N$$

ともかける。

☆ Iは剛体の回転についての慣性の大小を示すもの。

- Iが大 → ωの変化小
- mが同じでもrが大（質量が軸から遠くに分布）なほどIが大

この

・剛体の運動エネルギー

固定軸のまわりの回転の角速度ωのとき、m_iの速さは$r_i\omega$であって、その運動エネルギーは、$\frac{1}{2}m_i(r_i\omega)^2 = \frac{1}{2}m_i r_i^2 \omega^2$

従って、剛体の運動エネルギーKは、$I = \sum m_i r_i^2$より、

$$\boxed{K = \frac{1}{2} I \omega^2}$$

剛体が保存力の作用をうけているとき、力学的エネルギー保存の法則は、

$$\frac{1}{2} I \omega^2 + U = (一定)$$

NO. 34

DATE

7-3. 剛体の慣性モーメント

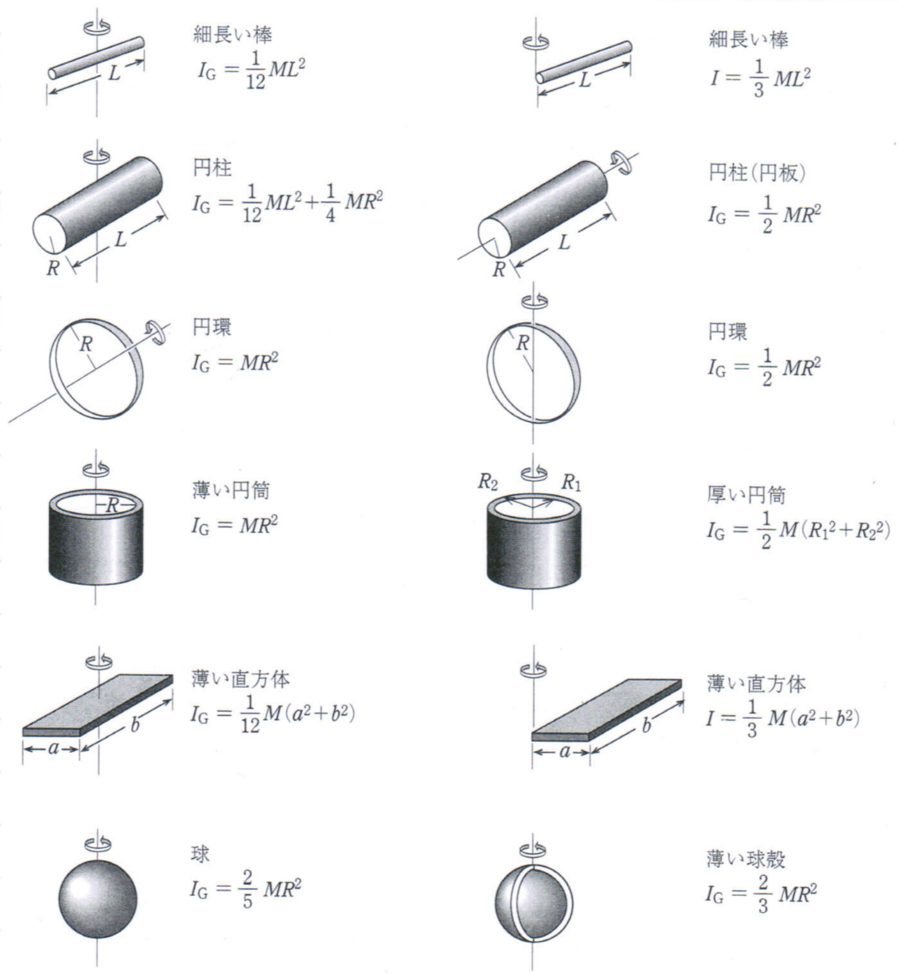
$$I = \sum m_i r_i^2$$

で与えられる。剛体の全質量をMとするとき、

$$I = MK^2$$

で与えられる量Kを回転半径という。(←だいぶ余談かも)

簡単な形の剛体の慣性モーメントをまとめる。(コピーです汗)



from
『基礎からの力学』P.105

求め方も『力学』P.160~163のコピー(汗)をのせておくので(P.35~37)
よかったら読んでみて下さい。(全部じゃないですが)

簡単な形の剛体の慣性モーメントを求めておこう．いくつかのものの慣性モーメントは記憶しておいた方がよいが，つぎに説明する順序で憶えると憶えやすいであろう．密度はすべて一様なものとし，細い剛体では単位長さの質量，すなわち，線密度を，薄い面では面密度を使うことにする．

(a_1)　長さ l の棒．軸：中点を通って棒に垂直な線．

$$I=\int_{-l/2}^{l/2}x^2\sigma\,dx,\quad \sigma：線密度\quad \sigma=\frac{M}{l}.$$

これから

$$I=\frac{1}{12}Ml^2,\quad \kappa=\frac{l}{2\sqrt{3}}.\qquad (9.3-8)$$

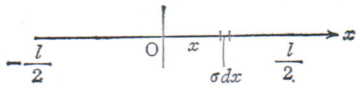


図 9.3－3

(a_2)　辺の長さ $a,\ b$ の長方形の板．中点を原点に，長さ a の辺に平行に x－軸，b の辺に平行に y－軸，これに直角に z－軸をとる．x－軸についての慣性モーメントは，板を y－軸に平行な多くの棒に分けこれを合わせたと考える．その１つの質量を dm とすれば (9.3－8) から

$$dI_x=\frac{1}{12}b^2dm,\quad \therefore\quad I_x=\frac{1}{12}Mb^2.$$

同様に　$I_y=\frac{1}{12}Ma^2.$

(9.3－7) により

$$I_z=I_x+I_y=M\frac{a^2+b^2}{12}.\qquad (9.3-9)$$

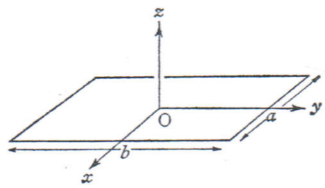


図 9.3－4

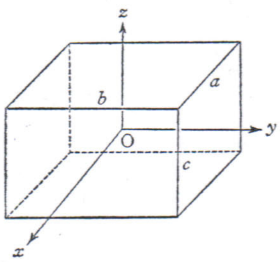


図 9.3－5

(a_3)　稜の長さ $a,\ b,\ c$ の長方体．中点を通り図のように x－, y－, z－軸をとる．x－軸についての慣性モーメントを考えるのには，長方体をこれに垂直な多くの薄い板に分けると考える．おのおのについて (9.3－9) を使うことができるから

$$\left.\begin{aligned}&dI_x=\frac{b^2+c^2}{12}dm,\quad \therefore\quad I_x=M\frac{b^2+c^2}{12}.\\ &同様に\quad I_y=M\frac{c^2+a^2}{12},\quad I_z=M\frac{a^2+b^2}{12}.\end{aligned}\right\}\qquad (9.3-10)$$

(b_1)　半径 a の細い輪．中心を通り輪の面内に x－, y－軸，これに垂直に z－軸をとる．I_z がもっとも簡単である．輪の小部分を dm とすれば

$$\left.\begin{aligned}&dI_z=a^2dm,\quad \therefore\quad I_z=Ma^2.\\ &(9.3-7)\ を使って\\ &I_x=I_y=\frac{1}{2}I_z=M\frac{a^2}{2}.\end{aligned}\right\}\qquad (9.3-11)$$

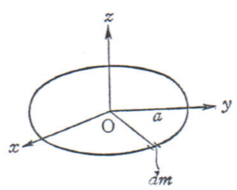


図 9.3－6

(b₂) 半径 a の薄い円板．中心を通り円板の面内に x－，y－軸，これに垂直に z－軸をとる．O から r，$r+dr$ の間にある輪の部分を考えればその z－軸のまわりの慣性モーメントは

$$dI_z = r^2 \cdot \underbrace{2\pi r\sigma\, dr}_{m}, \qquad \sigma：面密度．$$

$$\therefore\quad I_z = 2\pi\sigma\int_0^a r^3 dr = \frac{\pi\sigma}{2}a^4.$$

円板の質量は　$M=\sigma\pi a^2$

であるから

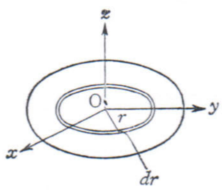


図 9.3－7

$$\left.\begin{aligned} &I_z = M\frac{a^2}{2}. \\ &(9.3-7)\text{ を使って} \\ &I_x = I_y = M\frac{a^2}{4}. \end{aligned}\right\} \qquad (9.3-12)$$

(b₃) 半径 a，高さ l の直円柱．軸を z－軸に，中点を通り，軸に直角に x－軸をとる．I_z を求めるのには，円柱を多くの薄い円板に輪切りにしたものを考える．その1つの質量を dm とすれば　$dI_z = \dfrac{a^2}{2}dm.$

したがって

$$I_z = M\frac{a^2}{2}. \qquad (9.3-13)$$

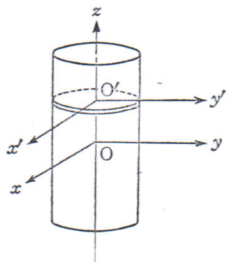


図 9.3－8

(x, y) 面から z の距離にある円板の x－軸のまわりの慣性モーメントをまず求める．この円板の中心を通り x'－軸に平行な軸のまわりの慣性モーメントは (9.3－12) によって

$$dI_x' = \frac{a^2}{4}dm.$$

したがって，(9.3－6) によって

$$dI_x = \left(\frac{a^2}{4}+z^2\right)dm.$$

$dm=\rho\pi a^2\,dz$ であるから

$$I_x = \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}}\left(\frac{a^2}{4}+z^2\right)\rho\pi a^2\,dz.$$

全質量は $\rho\pi a^2 l$ であるから，

$$I_x = M\left(\frac{a^2}{4}+\frac{l^2}{12}\right). \qquad (9.3-14)$$

(c₁) 半径 a の薄い球殻．中味のない球殻の中心 O を通って，x－，y－，z－軸をとる．

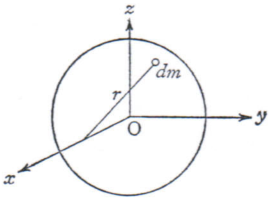


図 9.3－9

$$I_x=\int(y^2+z^2)dm,\quad I_y=\int(z^2+x^2)dm,$$

$$I_z=\int(x^2+y^2)\,dm.$$

I_x, I_y, I_z はどれも直径のまわりの慣性モーメントであるから等しい値をもつ．これを I とすれば，上の3式を加え合わせて，

$$3I=2\int(x^2+y^2+z^2)dm=2a^2\int dm=M\cdot 2a^2.$$

したがって

$$I=M\frac{2}{3}a^2. \qquad (9.3-15)$$

(c₂) 半径 a の一様な球．1つの直径のまわりの慣性モーメントを求めるのに，まず半径 $r, r+dr$ の間にある球殻の慣性モーメントを考える．

$$dI=\frac{2}{3}r^2dm.$$

$dm=\rho\cdot 4\pi r^2dr$ であるから

$$I=\int_0^a\frac{2}{3}r^2\cdot\rho\cdot 4\pi r^2dr=\rho\cdot\frac{8}{15}\pi a^5.$$

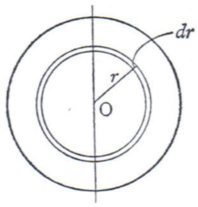


図 9.3－10

これと，$M=\rho\cdot\frac{4}{3}\pi a^3$ とから

$$I=M\cdot\frac{2}{5}a^2. \qquad (9.3-16)$$

☆ 剛体の平面運動

→ 授業とかレポートであんまりやっていない気がする…

けれども『基礎からの力学』P.118～121にあるので、見ておいてもよいと思います。