数 理 科 学 Ⅱ

常微分方程式

2009年入学東京大学教養学部理科一類26組 編

シケプリ

試験対策委員会

目　次

ガイダンス　微分方程式とは…… 3

Ⅰ. 解の存在と一意性 …… 4
解説１　べき級数の方法…… 5
解説２　ピカールの逐次近似法…… 6
解説３　折れ線の方法…… 7
解説４　まとめ…… 8

Ⅱ. 求積法 …… 9
解説５　求積フローチャート…… 10
解説６　変数分離法…… 12
解説７　階数の下げ方（１）…… 13
解説８　階数の下げ方（２）…… 14
解説９　完全微分方程式…… 15

Ⅲ. 線形方程式…… 16
解説１０　重ね合わせの原理…… 17
解説１１　定数変化法…… 18

Ⅳ. 定数係数線形方程式…… 19
解説１２　高階単独方程式…… 20
解説１３　たたみこみによる特解表現…… 21
解説１４　一階連立方程式…… 22
解説１５　行列の指数関数とその計算…… 23

Ⅴ. ０８年度期末試験解答例 …… 別

ガイダンス

微分方程式とは

１．目的

この授業を取っていながら微分方程式が何かさえ分からない愚か者を救済し、時間がない人のためにこのシケプリの中で特に重要な箇所を挙げます。

２．ぶっちゃけ、微分方程式って何？

まず、方程式ってなんでしょう。なんか宗教チックな問いかけですね。未知数（xとか）が満たす関係式のことです。で、方程式を解くというのはその関係式を操作して未知数の値を求めることでした（*1）。ただ、求めるのが数ではなく関数で、関係式に求める関数の導関数が含まれているものを特にそう呼びます。

*1　より正確に言うと、関係式を満たすxを求めることです。

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -x$$

たとえば、上の式も微分方程式です。力学や振動波動論の講義で見たことがあると思いますが、これは単振動の運動を記述しています。これを解くと

$$x = c_1 e^{it} + c_2 e^{-it}$$

となり、xがtの関数となっているのがわかると思います（*2）。

*2　$c1,c2$は積分定数です。解は複素数ですが、実部を取り出すと質点の座標が得られます。

３．時間ねえええ！　試験って何が出るの？　このシケプリのどこを読めばいい？

このシケプリは授業の内容に沿いつつ、証明などの部分を省いて試験で点が取れるように編集していますが、それでも時間がない人にとっては多すぎる内容であると思います。そんな人は以下にあげる部分だけでも読めばよいでしょう。

・解説４　　まとめ

　　内容を頭に叩き込んでおけばボーナス問題で10点は取れるでしょう。

・解説５　　求積フローチャート

　　微分方程式を見たときにあなたが取るべき対応をまとめておきました。

・解説６　　変数分離法

　　基本的にこれに帰着させることが求積法の肝ですが、帰着させた後の処理が分からなかったらヤバいのでここは見ておきましょう。

・解説１０　重ね合わせの原理

・解説１２　高階単独方程式

・解説１４　一階連立方程式

　　この三つを見ておけば定数係数線形常微分方程式が解けるようになりますが、斉次形に限ります。さらに、一階連立は解説１５の内容もやや必要です。

・過去問　　これを解けるようになりましょう。

I

解の存在と一意性

微分方程式は数学の一分野であるが、物理学においても重要な役割を果たしている。運動方程式をはじめとする物理法則は微分方程式で記述されているからだ。つまり、微分方程式と物理現象には一対一の対応があるとも言えるわけで、物理学者としては（数学者としても？）微分方程式の解は必ず存在して一意であってほしいわけだ。

そんな願いをかなえてくれるのがこの章で紹介する「微分方程式の解の存在と一意性」である。だが、困ったことにこれを示す定理はいくつもありそれぞれ一長一短なのだ。**そして、それぞれの特徴についての記述問題が試験で出題される公算が非常に大きいのだ！**　この章の内容を勉強しない手はない。特に、最後のまとめだけは見ておこう。

解説 1

べき級数の方法

1．概要

微分方程式やその解がべき級数で表示できる（テイラー展開できる）(*1) と思って、そのべき級数が存在し一意に定まることを確認する。

*1　このような性質を「解析的である」ということもある。

2．アイデア

次のような単独n階常微分方程式を考える。

$$\frac{d^n x}{dt^n} = F\left(t, x, \frac{dx}{dt}, \cdots, \frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}\right)$$

実はこれは $x_1 = x, x_2 = \dfrac{dx}{dt}, \cdots, x_n = \dfrac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}$ と置くことによって

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ \vdots \\ x_n \\ F(t, x_1, \cdots, x_n) \end{pmatrix}$$

とできる。したがって、**１階の微分方程式について考えればよい**ことになる (*2)。

*2　以下の章でも同様。

ここで①Fはべき級数で書ける②解$x(t)$はべき級数で書ける (*3) と仮定すれば、上のn連立の各方程式はすべてべき級数の形となり、$x(t)$の各係数を決定することができる（08年期末試験問１で実際にやってみよう）。あとはここで決まった係数が解析的である、すなわちべき級数が収束することを証明すればよい。これはコーシーの優級数の方法による（詳細はもちろん省略）。

*3　$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ と仮定するということ。

3．特徴

手法

方程式をべき級数で近似する。

長所

存在と一意性が言える（しかも割と簡単）。近似解の数値計算が行いやすい。

短所

方程式が解析的でなければならない（①の条件）。実はべき級数の一意性しか言ってない（②の条件）ので、そのべき級数が関数を一意に表すかまでは不明。

解説 2

ピカール(*1)の逐次近似法

*1　坂井教授が「九大のある先生はこのように書く」と渾身のギャグを発したにもかかわらず、教室は微妙な空気に包まれた。５回目の授業のでのことである。

光

１．概要

Fがリプシッツ(Lipschitz)連続ならば、ピカールの逐次近似法によって積分を繰り返すことで解がちゃんと構成できてしまうことを確認する。

２．アイデア

次のような１階の微分方程式を考える（高階方程式が１階に帰着できるのはべき級数のときに見た）。

$$\frac{dx}{dt} = F(x,t)$$

初期値を「$t=a$のとき$x=b$」とし、これの両辺をtについて積分すると、次のようになる（xはtの関数であることに注意しよう）。

$$x(t) = b + \int_a^t F(x(s),s)ds \qquad \cdots\cdots①$$

これを以下のような漸化式と見てそれの与える関数列について考えてみる。

$$x_{n+1}(t) = b + \int_a^t F(x_n(s),s)ds \qquad x_0(t) = b$$

つまり、最初に初期値のままの定数関数をおいて、それを上の漸化式に代入してどんどん解を近似していくのだ。仮にこの関数列が一様収束するならば、漸化式の形からその極限が①式を満たすことが想像できるだろう。実はFがリプシッツ連続という性質をもつならばこの関数列が一様収束することが証明できるのだ。

３．特徴

手法

元の微分方程式を積分形に書きなおし、そこに近似解を次々代入していく。

長所

解の存在と一意性がきちんと言える。

短所

リプシッツ連続はそんなに甘い条件ではないぞ！　たぶん！

*2　要は、どのtに対しても傾きが無限に大きくならないという感じである。ε-δ論法的な書き方。

cf.リプシッツ連続の定義(*2)

$f(t,\mathbf{x})$ がリプシッツ連続であるとは、任意の$\mathbf{x},\mathbf{y}$に対して

ある実数Lが存在して、 $\|f(t,\mathbf{x}) - f(t,\mathbf{y})\| < L\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|$ が成立すること。

解説 3

コーシー・ペアノの定理

1．概要

解をいくつかの直線、すなわち折れ線で近似していきその精度を上げることで解が構成できることを確認する。

2．アイデア

おなじみの下の微分方程式をよく見ると、あることに気づかれるかもしれない。

$$\frac{dx}{dt}=F(x,t)$$

「あれ？　任意のtに対してxの傾きが与えられてね？」と。

このアイデアをもとに、t軸を適当に分割して直線で近似してみよう。

初期値を $a=t_0,b=x(a)$ として、

$$x_0(t)=\begin{cases} x_0(t_0)+f(b,t_0)\cdot(t-t_0) & (t_0\le t\le t_1) \\ x_0(t_1)+f(x_0(t_1),t_1)\cdot(t-t_1) & (t_1\le t\le t_2) \\ \vdots & \vdots \end{cases}$$

という風にすることで、順次折れ線の形で近似解を構成できる。ここでt軸の分割の取り方をうまく定め、どんどん分割を細かくしていくとこの折れ線は一様収束することが言えるのだ(*1)。まあ分割の取り方が一通りとは限らないわけで、取り方を変えると別の式に一様収束することも考えられるから**一意性までは証明できない**のが欠点。

*1　Arzelá-Ascoliの定理という、私には読み方さえ分からないこれが保証してくれます。定理の名前何語？

3．特徴

手法

帰納的に折れ線を書いていって、近似解を構成する。

長所

近似解の構成に微分・積分を使わないうえに直線なので、楽に近似解を構成・計算できる。コンピュータなどでも計算できる。

短所

存在性しか言わない。一意であるかどうかは分からない。

解説 4

解の構成法のまとめ

1．目的

授業で扱った解の構成法を整理し、ほぼ確実に出題されるであろうボーナス問題への解答の指針とする。

2．ボーナス問題って？

これのこと (*1)。

*1　これは2008年のもの。

> **ボーナス問題**：解答によって最大20 点まで加点します．なお合計が100 点を越える場合100 点のままです．
> 　微分方程式にの解法において，(1) 求積法，(2) 巾級数による解法，(3) 逐次近似法，等がある．それぞれの特徴（長所，短所）について存在と一意性に関する定理を念頭に説明し，好き嫌いを含めて論じなさい．

ちなみに、第６回の授業の最後にも似たような問題が板書された。この時は(4)折れ線の方法が追加されていたので、これの対策もしておこう。

3．書いておくべきポイント

(1) 求積法　四則演算・微分演算・不定積分・関数の合成・逆関数の計算という操作を有限回繰り返して（無限操作は微積分以外しないということ）解を表す。

解ける関数は限られているが、怪しげな無限操作をしないので解の存在と一意性は保証される。

(2) べき級数による解法　微分方程式をテイラー展開し、解がべき級数の形で書けると仮定してそのべき級数の係数を求める方法。近似解の求め方として優秀であるが、べき級数の存在と一意性を示すことしかできない。解・方程式の両方が解析的でないと使うことが出来ない。

(3) 逐次近似法　微分方程式を積分形にして得た漸化式から近似解の関数列を得る。リプシッツ連続ならば関数列の一様収束性が証明でき、解の存在と一意性が言える。

(4) 折れ線の方法　微分方程式を直線の傾きを与える式とみなして、t軸をいくつかに分割してそれぞれの部分について解を直線で近似する。分割をうまくとって細かくすることにより近似解は一様収束する。近似解の構成に無限操作を使わないので、コンピュータによる解の近似計算が容易かつ高速であるが、一様収束する先が一意であるとは限らないのが短所。

求積法の具体的な内容については次ページから解説する。

II

求 積 法

　解説４で突如登場した求積法。実はこれこそが超重要なテクニックなのだ。前述の解の存在と一意性定理のうち、我々にその実際の解の姿を与えてくれたものがあっただろうか、いや否である。ところがこれから紹介する求積法はなんと解の姿を実際に書き下すことが出来るのだ！　なんか当たり前な気がするけど気にしない。まあべき級数法はべき級数の姿が得られるわけで、それが２００８年の期末試験に出てるんですけどね。

　実際に試験で出題されるのはほとんどが求積法で解く問題である。この章では求積法で解ける方程式を場合分けし、どのような方程式にはどのように対処すればを懇切丁寧に（？）解説している。

解説 5

求積フローチャート

*1　行列の形のものについては処理していないが、試験に出る場合は99%定数係数のものなので、解説１４を参照のこと。

１．目的

試験に出る常微分方程式に対する対処の見分け方をまとめておいた(*1)。見分けた後の処理は次ページ以降の各解説を参照のこと。

Yes →

No ⋯→

スタート ⋯→ 不可

$f(x)dx = g(t)dt$ の形に**変数分離**できる

変数分離形（解説６）　両辺を積分

係数が全部定数で（係数にxやtを含まない）交差項もない

定数係数常微分方程式（解説１２）

$\dfrac{d}{dt} = D$ とおいてDについて因数分解

xを陽に含まない（xの項がない）

解説７の方法により１階下がる

$\dfrac{dx}{dt} = y$　と置くとyについての方程式を得る

tを陽に含まない（tの項がない）

解説７の方法により１階下がる

$\dfrac{dx}{dt} = y$　と置くとyについての方程式を得る

独立変数はtではなくxになる

次のページへ

*2　同次形を見つけるときの次数の数え方。導関数はそれぞれただの分数だと見なす。

たとえば、 $\dfrac{d^2x}{dt^2}$ は

xに関して1次、tに関して−2次である。

各項のxについての次数(*2)を数えると全部n次である

xについての同次式（解説８）

両辺を x^n で割り、 $x=e^y$ と置く。

xを消去するとyを含まない式を得る。

各項のtについての次数(*2)を数えると全部n次である

tについての同次式（解説８）

両辺を t^n で割り、 $t=e^s$ と置く。

tを消去するとsを含まない式を得る。

各項のxとtについての次数(*2)を数えると全部n次である

x,tについての同次式（解説８）

$x=ty$と置くとtについての同次式を得る。

$\dfrac{d}{dt}\left\{F\left(t,x,\dfrac{dx}{dt},\cdots,\dfrac{d^nx}{dt^n}\right)\right\}=0$ となり、tについて積分できる

完全微分方程式（解説９）　積分しよう

でも両辺に何かを掛けたら完全微分方程式になる

それが**積分因子（解説９）**　掛けて積分

微分方程式がxとその導関数の線形結合(*3)だよ！

*3　各項の定数倍（tを含んでいてよい）の和であらわされるということ。交差項があったり、２乗とかした項があったらダメ。

線形方程式　**重ね合わせの原理（解説１０）**が効く
非斉次の場合は**定数変化法（解説１１）**を使う

あきらめろ！

Bernouilli形やRiccati形だったら
線形方程式に帰着可能

過去のシケプリを見よ

次の問題へ

解説 6

変数分離法

１．概要

高校生でも知ってるかもしれない、微分方程式のごく簡単な解法である変数分離法を確認しておく。これできないと試験では１問も解けない可能性大。

２．適用できる方程式

１階正規形(*1)で、以下の形をした微分方程式。

$$\frac{dx}{dt}=\frac{g(t)}{f(x)}$$

*1 $\dfrac{dx}{dt}$ について解けているということ。

３．解き方

$$f(x)dx = g(t)dt$$

上のように変形し、左辺をxについて、右辺をtについてそれぞれ積分。このとき積分定数を忘れないようにする。

$$\int f(x)dx=\int g(t)dt+C$$

あとはこれをxについて整理すればよい。

４．蛇足

なんで両辺を別の文字で積分できるんだ、とお怒りの皆様への解説。

もとの方程式は以下のように変形できる。

$$f(x)\frac{dx}{dt}=g(t)$$

これの両辺をtで積分したと考えればよい。

階数の下げ方（１）

解説 7

１．概要

特定の形を持つ微分方程式は、それに応じた対応を取ることで階数を下げることが出来る。その方法をいくつか紹介する。

２．適用できる方程式

①xを陽に含まないもの

$$\frac{d^2x}{dt^2}+t\cdot\frac{dx}{dt}=\sin t$$

②tを陽に含まないもの（自励形という）

$$\frac{d^3x}{dt^3}+x\cdot\frac{dx}{dt}=0$$

３．解き方

ともに、 $y=\dfrac{dx}{dt}$ と置けばよい。このとき、以下の式が成り立つので

① $\dfrac{d^nx}{dt^n}=\dfrac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}$ ② $\dfrac{d^2x}{dt^2}=y\cdot\dfrac{dy}{dx},\dfrac{d^3x}{dt^3}=y\cdot\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2+y^2\cdot\dfrac{d^2y}{dx^2},\cdots$

これをそれぞれに代入することで１階低い方程式を得ることが出来る。②では独立変数がtからxに変わっていることに注意しよう。

ちなみに上であげた方程式はそれぞれ以下のようになる。

① $\dfrac{dy}{dx}+ty=\sin t$

② $y\cdot\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2+y^2\cdot\dfrac{d^2y}{dx^2}+xy=0$

①は非斉次線形方程式なので、解説１１の方法で求積可能である。
②は両辺をyで割ると次のようになりさらに１階下げられる（完全微分方程式）。

$$\frac{d}{dx}\left(y\cdot\frac{dy}{dx}+\frac{1}{2}x^2\right)=0$$

階数の下げ方（２）

解説 8

１．概要

階数の下げ方の続き。ここではとくに同次式を扱う。

２．次数の数え方(*1)

*1　これをよく分かっていなくて過去問の答えを作る際５時間無駄にしました。

xやtはそのままでよいのだが、導関数だけ注意が必要である。

といっても、導関数を普通の分数だと思えばいいだけ。

$$① \ \frac{dx}{dt} \quad ② \ t^2 \cdot \frac{d^2x}{dt^2}$$

上の例だと、①はxについて1次、tについて−1次となり、②はxについて1次、tについて0次となる。

３．解き方

①すべての項がxについてn次だったとき

両辺を x^n で割って $x = e^y$ と置けばこれはyを陽に含まないので解説７の手法により１階下がる。

$$\frac{dx}{dt} = x \cdot \frac{dy}{dt}, \frac{d^2x}{dt^2} = x\left(\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \frac{d^2y}{dt^2}\right), \cdots$$

②すべての項がtについてn次だったとき

両辺を t^n で割って $t = e^s$ と置けばこれは自励形なので解説７の手法により１階下がる。

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx}{ds} \cdot \frac{1}{t}, \frac{d^2x}{dt^2} = \left(\frac{d^2x}{ds^2} - \frac{dx}{ds}\right)\frac{1}{t^2}, \cdots$$

③すべての項がx,tについてn次だったとき（①②の次数の和を取る）

$x=ty$と置けば②に帰着する。

同次形については2008年のテストで重点的に狙われているのでよく勉強しておこう。実際、これ見ただけでは本当に階数が下がるのかわからんと思うので。

解説 9

完全微分方程式

１．概要

常微分方程式が、ある式を微分した形の場合は儲けものですね！　みたいな。

２．適用できる方程式

次のような微分方程式。

$$\frac{d}{dt}\left(F\left(t,x,\frac{dx}{dt},\cdots,\frac{d^n x}{dt^n}\right)\right)=0$$

もちろん、両辺を積分して次式のようにすることが出来る。

$$F\left(t,x,\frac{dx}{dt},\cdots,\frac{d^n x}{dt^n}\right)=C$$

３．積分因子

そのままだとどうしようもないが、両辺にある関数をかけると完全微分方程式になることがある。このような関数をのことを積分因子という。名前こそ付いているが、これを見つけるのは数学的直観によるところが大きいのであまり覚えておく価値はない。まあ「ちょろっといじったら完全微分方程式になることがある」と思っておく程度でよい。

シケ対の体験談でいうと、解けない方程式にも積分因子があるはずだと血眼になり出すとすぐ時間がなくなるので大変危険。

III

線形方程式

大学において数学を学ぶ上で「線形」という概念は非常に重要である。この語を見ない日はない（かもしれない）くらい、今我々が学ぶ数学には線形という概念が登場する。それゆえ線形空間を取り扱う線形代数学は、解析学とともに数学の基礎を作る重要な柱なのだ。まあ進んだ数学を学ぶ際には集合論によって基礎の下に土台を作んなきゃいけないんだけど。

常微分方程式の中にも、解の集合がこの線形空間をなすものがありそれを線形常微分方程式と呼ぶ。解が線形空間をなす故、求積においては解の基底を求めるのが目的となる。また、線形ではないものの定数項を０にすれば線形方程式となるものを非斉次常微分方程式と呼び、これについてはなにか一つ何でもよいから解をもってきて（これを特解と呼ぶ）おけばよいことも分かっている（非斉次常微分方程式の解空間はアフィン空間である、なんていうとかっこいい）。

この章では線形方程式の解法について詳しく見ていくとしよう。

解説 10

重ね合わせの原理

１．概要

線形常微分方程式の定義を確認し、それについて成り立つ重ね合わせの原理を確認する。これにより、n階線形常微分方程式の求積には一次独立なn個の解を見つければよいことがわかる。

２．線形常微分方程式の定義

以下のような性質を満たす式を、線形常微分方程式という。

常微分方程式 $F\left(t,x,\cdots,\frac{d^n x}{dt^n}\right)=0$ が、 $1,x,\frac{dx}{dt},\cdots,\frac{d^n x}{dt^n}$ の線形結合で表されるとき、

Fは線形常微分方程式である（*1）。

*1　xやその導関数の各係数や定数項にtが含まれることは問題ない。

この調子で斉次、非斉次の定義もしてしまおう。

上の線形結合で、1の係数が0ならばFは斉次方程式、
そうでなければ非斉次方程式である。
また、非斉次方程式においてその定数項を0とした斉次方程式を、その非斉次方程式に属する斉次方程式と呼ぶ。

文字ばっかりで読むのがたるいかと思われるので実例を示す。

$$\frac{dx}{dt}+p(t)\cdot x+q(t)=0 \quad \cdots\cdots①$$

$$\frac{dx}{dt}+p(t)x=0 \quad \cdots\cdots②$$

①は非斉次方程式であり、②は①に属する斉次方程式である。

３．重ね合わせの原理

*2　微分方程式は単独である（連立していない）ことを仮定する。

①n階斉次方程式の解の集合を**V**とすると、**V**は線形空間で $\dim\mathbf{V}=n$ が成り立つ。
②n階非斉次方程式の解の集合を**V'**、それに属する斉次方程式の解の集合を**V**とする。もとの方程式の解の一つがx^*であるとき、$\mathbf{V}' = \{x+x^* \mid x\in\mathbf{V}\}$となる。

この原理が意味するところは簡潔にいうと以下の通りになる。

①方程式を満たす解を見つけてくればそれの定数倍はもちろん解だし、他の解をもってきて線形結合を作っても解となる（線形空間）。そして、一次独立な解はn個（$\dim\mathbf{V}=n$）であるということ。

②非斉次方程式については、まずなんでもいいから解を一つ（x^*：特解）を持ってくれば、あとは属す斉次方程式の解に特解を足せばよいということ。

積分定数は線形結合の自由度として現れることに注意しよう。

解説 11

定数変化法

１．概要

一階線形常微分方程式は非斉次形について、特解を求める方法とは別に積分定数が定数項のtによって変化すると仮定しても求積できることを見ていく。

２．詳細

一般に、一階線形常微分方程式は以下の式であらわされる。

$$\frac{dx}{dt}+p(t)\cdot x+q(t)=0$$

これは $q(t)\neq 0$ なら非斉次である。これを求積したい。

ここでまずはこれに属する斉次方程式を解く。$q(t)=0$ とするとこれは変数分離法で解くことができ、解は下のようになる。

$$x=C\exp\left(-\int^t p(s)ds\right)$$

ここで、もとの非斉次方程式の解を積分**定数**Cが$q(t)$によって**変化**すると仮定するとあれよあれよという感じで解けてしまうのだ(*1)。

*1　なんででしょうね。

$$x=C(t)\cdot\exp\left(-\int^t p(s)ds\right)$$

として元の方程式に代入・整理すると、

$$\frac{dC}{dt}=-\exp\left(\int^t p(s)ds\right)\cdot q(t)$$

となる。これの両辺をtで積分すると

$$C(t)=\int^t-\exp\left(\int^s p(r)dr\right)\cdot q(s)ds+C_0$$

となりCの式を得るので、初めに仮定した解に代入して、

$$x(t)=\left\{\int^t-\exp\left(\int^s p(r)dr\right)\cdot q(s)ds+C_0\right\}\cdot\exp\left(-\int^t p(s)ds\right)$$

となる。これは元の微分方程式を満たすので暇があれば計算するとよいだろう。

IV

定 数 係 数 線 形 方 程 式

今までは未知関数xやその導関数の係数に独立変数tが含まれる一般の微分方程式について議論してきたが、今回はもう少し簡単な場合について考えてみることにする。なんと係数がすべて真の意味で定数、すなわち独立変数を含まないのだ！　これなら簡単に解けそうだ。

まあ簡単に解けそうとなると、別の方向で難しいのを解きたくなるのが人情なわけで、今回は高階の微分方程式でも一発で解けちゃう方法を説明する。さらに、非斉次方程式の場合でも簡単に特解が表現できる方法も考察してしまう。実に内容盛りだくさんの発展編である。

ちなみにラストは線形代数の知識のオンパレードなので自信のない人は要注意。わからんかったら数Ⅱのシケ本読もう。

解説 12

高階単独方程式

*1　実際に対学生用必殺技としてかなりの威力を誇るとされている。

*2　シケ対的使ってみたい定理No. 1なので使った。反省はしていない。

*3　αが１種類の場合の解や微分作用素の交換可能性を考えれば証明できます。多分。

１．概要

単独高階定数係数線形常微分方程式という必殺技みたいな(*1)名前の微分方程式は名前が長い分拘束条件が多いので瞬殺できてしまうことを確認する。要は見かけ倒し。テストで解けたら「その技は見切った！」とつぶやいてください。

２．詳細

単独高階定数係数線形常微分方程式は以下のような姿をしている。

$$\frac{d^n x}{dt^n}+a_1\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+\cdots+a_n x+a=0$$

まずは斉次、すなわち $a=0$ の場合について考えてみる。

微分作用素 $\dfrac{d}{dt}=D$ をのように置くと斉次方程式は以下のようになる。

$$\left(D^n+a_1D^{n-1}+\cdots+a_n\right)x=0$$

これの右側、つまり微分作用素の多項式を形式的に因数分解すると、この多項式は代数学の基本定理(*2)から重複度を合わせてn個の解を持つことがわかるので、

$$\left(D-\alpha_1\right)^{m_1}\cdot\left(D-\alpha_2\right)^{m_2}\cdots\left(D-\alpha_l\right)^{m_l}x=0$$

となる。このとき、この方程式は以下の解をもつことが知られている(*3)。

$$x=\left(c_1t^{m_1-1}+\cdots+c_{m_1}\right)e^{\alpha_1 t}+\cdots+\left(c_{n-m_l+1}t^{m_l-1}+\cdots c_n\right)e^{\alpha_l t}$$

３．マジカオスなので過去問で例をみる

問３（ろ）１．　$D^5x+3D^4x+3D^3x+D^2x=0$

$$(D+1)^3D^2x=0$$

と因数分解できるので、

$$x=(c_1t^2+c_2t+c_3)e^{-t}+\left(c_4t+c_5\right)e^0$$

すなわち、

$$x=(c_1t^2+c_2t+c_3)e^{-t}+c_4t+c_5$$

が求める解である。

解説１３

たたみこみによる特解表現

１．概要

解説１２で高階単独（ｒｙ　の斉次方程式は解くことが出来た。今回は非斉次方程式の解を求める際に必要な特解の求め方を見ていく。正直に言ってここは発展編なので、授業にちゃんと出た人がノートを見ながら勉強してください(*1)。

*1　出てない奴は捨てろ☆の婉曲表現です。

２．たたみこみの定義と基本的性質

解説１１で解いた非斉次線形方程式で、定数係数だったとしよう。

$$\frac{dx}{dt} - ax = f(t)$$

解説１１の結果を用いるとこれの解は次のようになる。

$$x(t) = \int^t e^{a(t-s)} f(s) ds + Ce^{at}$$

ここで、以下のようにたたみこみを定義しよう。

一変数関数 f,g に対し、たたみこみ $f*g$ を次式で定義する。 $$f*g = \int_0^t f(t-s)\cdot g(s)ds$$

たたみこみは**可換性、結合律、スカラー倍に対する線形性**という便利な性質を持つことを知りつつ、さっきの解を書きなおすと下のようになる。

$$x(t) = e^{at} * f(t) + Ce^{at}$$

これで一階についてたたみこみで解を表現できた。これを一般に拡張しよう。

$$(D-a_1)\underline{(D-a_2)\cdots(D-a_n)x} = f(t)$$

いま上のように微分作用素を因数分解できたとする（重解をもちうるとする）。

これを、下線部を未知関数とする微分方程式とみなすと、一階の結果から

$$(D-a_2)\cdots(D-a_n)x = e^{a_1 t} * f(t) + Ce^{a_1 t}$$

となる。今は特解を求めているのでC=0として上の操作を帰納的に繰り返すと、

$$x = e^{a_n t} * \cdots * e^{a_1 t} * f(t)$$

として特解をたたみこみ表示で得ることが出来た。あとはこれを計算するだけ。

指数関数のたたみこみの公式。これは覚えておくとすこぶる便利。 （１）$\lambda \neq \mu$ のとき、　$e^{\lambda t} * e^{\mu t} = \dfrac{e^{\lambda t} - e^{\mu t}}{\lambda - \mu}$ （２）（n個のたたみこみ）　$e^{\lambda t} * \cdots * e^{\lambda t} = \dfrac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{\lambda t}$

解説 14

一階連立方程式

１．あらすじ

微分怪人サカイ(*1)の繰り出す**単独高階定数係数線形常微分方程式**を打ち破った理Ｉ２６組。しかしこれは小手調べにすぎなかった。サカイはあらたに**一階連立定数係数常微分方程式**を繰り出してきたのだ！　次々と倒れる理Ｉ２６組の数理科学Ⅱ履修者。絶体絶命のピンチにどうする、シケ対！？

*1　坂井先生の専門は微分方程式らしいので本当に微分怪人である。授業内容が難しいわけだ。あと先生ごめんなさい。

２．定義

$\mathbf{x}$:未知関数のベクトル　$\mathbf{A}$:係数行列　$\mathbf{b}$:定数ベクトル　として、

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}$$

であらわされる行列を一階連立微分方程式という(*2)。$\mathbf{b}=\mathbf{0}$ならば斉次、そうでなければ非斉次である。今回は$\mathbf{A}$がすべてxもtも含まない定数である時を考える。

*2　左辺は$\mathbf{x}$の各要素を微分しただけです。あと式の各成分はそれぞれn次元ベクトルとn次正方行列です。

３．一階連立と単独高階の同値性

左のように置いて実際に計算することで、この二つの同値性を確かめることが出来る。

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} x_1 &= x \\ x_2 &= \frac{dx}{dt} \\ &\vdots \end{aligned}$$

４．一階連立方程式の解

実は死ぬほど簡単に書くことが出来る(*3)。斉次の場合の解は以下の通り。

$$\mathbf{x} = e^{\mathbf{A}t} \cdot \mathbf{c}$$

１連立の（すなわち行列表示するまでもない）ものとまったく同じである。ちなみに$\mathbf{c}$は積分定数である。非斉次の場合はこの$\mathbf{c}$に定数変化法を適用することで解ける。なお、ここで出てくる積分は線積分であることに注意。

*3　ただし計算は死ぬほどめんどくさい。

$$\mathbf{x} = e^{\mathbf{A}t} \cdot \int^{t} e^{-\mathbf{A}s}\mathbf{b}(s)\,ds$$

で、いまこれを読んでるみなさまが疑問に思っていること、すなわち「行列の指数関数ってなに！？　頭おかしいんじゃない？」だが、おっしゃる通りとしかいいようがない。これが曲者なのだ。これの説明は次ページ。

解説 15

行列の指数関数とその計算

１．概要

解説１４により行列の指数関数がわかれば一階連立（ｒｙ　の解が表示できるのを見た。そこでそれを定義して計算するうえでの注意を述べる。

２．指数関数の行列への拡張

これがその定義である。

$$e^{\mathbf{A}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\mathbf{A}^n}{n!}$$

要はマクローリン展開の中に行列をぶっこんだだけなのだが、これを計算するのが辛い、辛すぎる。今はとりあえずそれは置いといて、簡単な性質を見ていこう。

$$\mathbf{AB}=\mathbf{BA}\Rightarrow e^{\mathbf{AB}}=e^{\mathbf{A}}e^{\mathbf{B}}$$

$$e^{\mathbf{O}}=\mathbf{E}$$

$$e^{\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP}}=\mathbf{P}^{-1}e^{\mathbf{A}}\mathbf{P}$$

$$\frac{d}{dt}e^{\mathbf{A}t}=\mathbf{A}e^{\mathbf{A}t}$$

だいたい実数の指数関数と似たような感じである。①は可換な行列に対して指数法則が成り立つこと、②は零行列乗は単位行列になること、③は基底の取り換え行列はくくり出せること、④は微分の公式である。③と④が重要である。

３．実際の計算

ここで恐るべきは、たかだか指数関数の計算なのに行列のn乗を求めなければならないことである。というわけで、対角化してください。幸い上で見たように基底の取り換え行列はくくりだせるのでそれで頑張ってください。あとは、

$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ とおくと

$$\begin{aligned}
e^{\mathbf{A}t}&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}\mathbf{A}^n\\
&=\begin{pmatrix} \sum_{n=0\backslash}^{\infty}\frac{(at)^n}{n!} & 0 \\ 0 & \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(bt)^n}{n!} \end{pmatrix}\\
&=\begin{pmatrix} e^{at} & 0 \\ 0 & e^{bt} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

となることに注意しておくとよいでしょう。

……え？　ジョルダン標準形？　過去のシケプリ見てください……。

たぶん試験には対角化できるのしか出ないよ。たぶんね。