期 末 試 験 対 策

数　学(IB)

前

（配点 100 点）

平成 21 年 9 月 1 日　10 時 55 分—12 時 25 分

注　意　事　項

1 試験開始の合図があるまでに，この試験対策プリントを開きなさい。

2 この試験対策プリントは全部で 22 ページあります。落丁，乱丁または印刷不鮮明な箇所があったら，メールまたはクラス掲示板でシケタイに知らせなさい。

3 ただし，デザインに関する苦情は一切受け付けません。

4 勉強には，必ず黒色鉛筆（または黒色シャープペンシル）を用いて手を動かしなさい。

5 **解答用紙の指定欄に，学生証番号，科類，氏名，語学符号を記入しなさい。指定欄以外にこれらを記入してはいけません。**

6 この試験対策プリントの余白は，落書用に使用してもよいが，そのせいで単位を落としてはいけません。

7 試験終了後，数学のことは忘れてすぐに熱力学の勉強をしなさい。

◇S1-26-2009

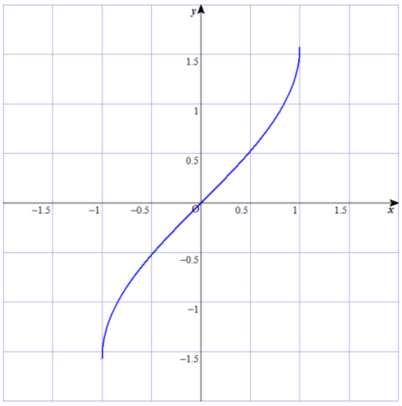
1

逆三角関数

Introduction

逆三角関数とは、三角関数の逆関数である。つまり、三角関数の値を与えればその時の角度 [1]
を返すような関数のことである。

Description



▲ $y = \mathrm{Arcsin}\, x$ のグラフ

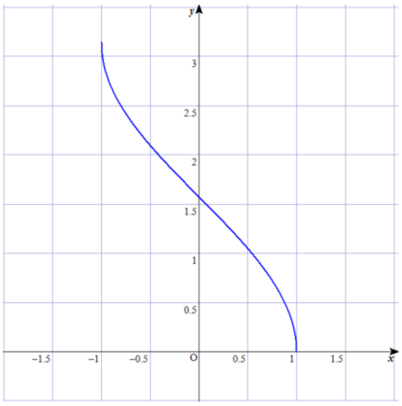
1. Arcsin（あーくさいん）関数

Arcsin 関数は sin 関数の逆関数である。

定義域：$[-1,1]$ [5]

値域　：$[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

$$(\mathrm{Arcsin}\, x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$



▲ $y = \mathrm{Arccos}\, x$ のグラフ

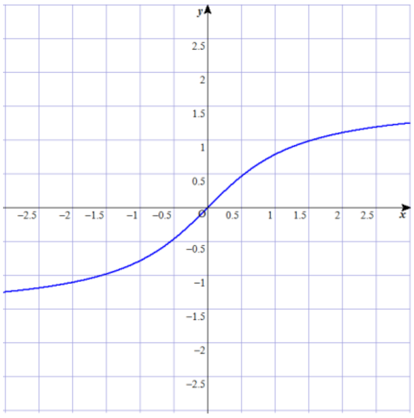
2. Arccos（あーくこさいん）関数

Arccos 関数は cos 関数の逆関数である。

定義域：$[-1,1]$ [10]

値域　：$[0, \pi]$

$$(\mathrm{Arccos}\, x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$



▲ $y = \mathrm{Arctan}\, x$ のグラフ

3.　Arctan（あーくたんじぇんと）関数

Arctan 関数は tan 関数の逆関数である。

定義域：**R**(実数全体) [15]

値域　：$(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

$(\mathrm{Arctan}\, x)' = \frac{1}{1+x^2}$ [17]

2
平均値の定理とその系

Introduction

平均値の定理といえば高校数学で登場した存在定理であるが、これは一般にはラグランジュの平均値の定理と呼ばれているものである。世の中にはコーシーの平均値の定理というものもあり、こちらはラグランジュの平均値の定理をさらに一般化したものである（さらに、というのはラグランジュの平均値の定理はロルの定理の一般化であるからである）。

コーシーの平均値の定理それ自体はさほど重要な定理ではないが、系であるロピタルの定理はきわめて強力であり、受験生時代からお世話になっている方も多いであろう（答案に使うと減点されるという怪しげな噂を持つ定理ではあったが）。

この章では、コーシーの平均値の定理を紹介したのちに他の定理との関連を見ていく形をとり、最後に中間値の定理を紹介する。

……つまり、この章では歴史的な流れ（ロルの定理からコーシーの平均値の定理に至るまでの一般化の流れ）に逆行する形で解説を進める。なんか間違ってる気もするけど気にしない。

Description

１．コーシーの平均値の定理

> f, g は$[a,b]$上定義された連続関数で、(a,b)上で微分可能である。
> また、(a,b)上で$g'(x) \neq 0$である。（このとき、$g(a) \neq g(b)$であることに注意せよ。）
> このとき、ある実数$c \in (a,b)$に対して次式が成り立つ。
>
> $$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

これが、先人が積み上げてきた平均値の定理の結晶である。皆さんはこれだけを覚えればよいということ。証明は、うまい１つの関数を作ってそれにロルの定理を適用して行う。

では、ここで $g(x)=x$ と置いてみよう。

２．ラグランジュの平均値の定理

> f は $[a,b]$ 上定義された連続関数で、(a,b) 上で微分可能である。
> このとき、ある実数 $c\in(a,b)$ に対して次式が成り立つ。
> $$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$$

これは高校時代から慣れ親しんだ定理かと思われる。コーシーの定理の特殊系であるが、2つの関数を扱うようなことはあまりないので、こちらのほうが使い勝手がよい。つまり、この定理が使えることがこの章では最も重要だということ。

ちなみに、この定理はテイラーの定理の $n=1$ の場合と同値である。逆にいえば、テイラーの定理で $n=1$ とすれば、この定理を導くことができる。

ここで、さらに $f(a)=f(b)$ という条件を与えるとロルの定理が導かれる。（本当はロルの定理から平均値の定理が導かれるのでこれはおかしいんだけどね。）

３．ロルの定理

> f は $[a,b]$ 上定義された連続関数で、(a,b) 上で微分可能であり、$f(a)=f(b)$ である。
> このとき、ある実数 $c\in(a,b)$ に対して
> $$f'(c)=0$$

この関数は実用性こそ低いが、上に紹介したさまざまな存在定理の理論的基礎となっている。そのため、この定理は証明が重要なのだが、これはシケプリなのでそこは割愛する。こういうものなのだとだけ知っておいてほしい。

４．ロピタルの定理

> f,g は a の近傍で定義された連続関数で、微分可能である。
> また、a の近傍で $g'(x)\neq 0$ であり、$\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ が収束したとすると次式が成り立つ。
> $$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

知っていた方も多いであろうこの定理、非常に強力である。この定理は $\frac{0}{0}$ 不定形の時のその猛威をふるう。証明は、コーシーの平均値の定理において $b\to a$ とすれば $c\to a$ となるこ

とを利用すればよい。まあ牛腸プリントを読めばわかるけど、これで解決できる問題は必ずテイラーの定理で解決できるんだけどね。

５．中間値の定理

f は $[a,b]$ 上定義された連続関数である。
このとき、 $f(a)$ と $f(b)$ の間にある任意の実数 r に対して、
$f(c)=r$ となる実数 $c\in[a,b]$ が存在する。

ぱっと見た感じ、いまいちよくわからない定理かもしれない。そんな時はグラフを描いてみよう。するとあら不思議！　よくわからない定理がとたんにくだらない定理に早変わり！

そう、この定理の主張はとても簡単。連続関数なんだから上端と下端の間の値もあるに決まっているだろう……ただそれだけ。

3 テイラーの定理

Introduction

テイラーの定理は極めて重要な定理である。どれくらい重要かといえば、今回の試験でいうと 40 点くらい（あくまで予想）。この定理は一般の関数を多項式に近似してその様子を調べることができるために数学的に重要なだけでなく、試験において計算問題も出しやすいために単位狙いの人にも極めて重要である。

この章ではまずテイラーの定理の理論的な部分に触れ、次の章で例題を交えつつテイラーの定理の応用例を紹介する。

Description

テイラーの定理とは次のような定理である。

> f を実数上の開区間で定義された関数で $n+1$ 回微分可能であるとする。
> このとき、開区間上の実数 a に対して次のようにおく。
>
> $$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$
> $$R_n(x) = f(x) - P_n(x)$$
>
> このとき、開区間上の各 x に対し、 a と x の間にある実数 θ が次式を満たす。
>
> $$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

これが今回の期末最重要と目されるテイラーの定理である。一見何を言っているかわかりにくい表示である。ていうか、牛腸プリントを読んだ後でこれを見るとわざとわかりにくくしているのではないかという疑惑さえ湧いてくる。まあ、わからないと単位は絶対に来ないのでゆっくり解説していこう。

まずはこの定理は何を言わんとしているのか。注目してほしいのは f が一般の関数であるのに対し、$f(x)=P_n(x)+R_n(x)$ の右辺は多項式だということだ。つまり、この定理によって一般の関数を多項式で近似できるというのが肝である。牛腸プリントでは「化かす」という表現を使っているものである。

ここですこし右辺を見てみよう。$P_n(x)$ はテイラー多項式と呼ばれるもので、近似の主人公だ。$R_n(x)$ は剰余項と呼ばれるもので、こいつには誤差が詰め込まれている。近似の誤差評価は剰余項を使って行うということを知っておけばいいだろう。

要は、テイラーの定理を使えば f がどんな多項式に似ているかわかるということだ。どんな多項式に似ているか分かれば「極限計算」がとても簡単になる。

でも、剰余項があるんじゃ使い勝手悪くね？　と思われるかもしれない。そんなあなたには次の公式をどうぞ。

剰余項は次のようにして評価できる。

$$\lim_{x\to a}\frac{R_n(x)}{(x-a)^n}=0$$

$$\lim_{x\to a}\frac{R_n(x)}{(x-a)^{n+1}}=\frac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!}$$

これを使えば剰余項もまとめて評価できてしまう。ああ、素晴らしきかなテイラーの定理。証明は剰余項の形を見れば明らか。ちなみに 1 個目の式は微妙に重要度が高い。

$\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f(x)-P_n(x)}{(x-a)^n}=0$ ならば $P_n(x)$ は f の a まわりでの n 次のテイラー多項式である。

これは 1 個目の式をちょっと変形しただけだが、テイラー多項式の一意性を示す式だ。

具体的には、テイラー多項式に適当に当たりをつけた後でそれが本当にテイラー多項式だったと示すために使う。一般項を推測して数学的帰納法とノリは同じ。

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}R_n(x)=0$ であるとき、テイラー展開可能で、

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

評価するに飽き足りないあなたにはこちら。無限大にまで次数をあげてしまえば剰余項をなんと消し去ることができる。このようにして得られた無限次の多項式を「テイラー展開」と呼ぶ。そしてテイラー展開が可能である条件が $\displaystyle\lim_{n\to\infty}R_n(x)=0$ である。当たり前といえば当たり前であるが、これが重要。

さて、得られたテイラー展開であるがこれは無限個の項の和、すなわち和の極限の形となる。いくらテイラー展開できても、その値が発散してしまっては意味がない。テイラー展開はこの和が収束する範囲においてのみ意味を持つということだ。

後述の収束判定法により、テイラー展開が収束する条件は次のようになる。

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f^{(n+1)}(a)}{f^{(n)}(a)}(n+1)(x-a)<1$$

ならば、テイラー展開は収束して値を持つ。

（左辺）=1 となるときは微妙で、収束するかしないかはケースバイケースだ。

（左辺）>1 となるときは必ず発散する。

式を見ればわかるが、この条件が満たされるか否かは x に依存する。この式を少し変形してみよう。

$\lim_{n\to\infty}\frac{f^{(n+1)}(a)}{f^{(n)}(a)}(n+1)=\frac{1}{r}$ とおくと、上の条件式は以下のように書き換えることができる。

$$(x-a)<r$$

このときの r を収束半径と呼ぶ。

ちなみに、上の極限が 0 に収束するときは $r=\infty$ となるので条件式は常に満たされる。逆に極限が無限大に発散するときは $r=0$ となる。

$(x-a)=r$ となった場合は上と同様やはり微妙で、ケースバイケースとなる。

$(x-a)>r$ となった場合も同様に必ず発散する。

ここに書くと怒られるかもしれないが、収束半径の語が出てきたあたりの内容（つまりこのページの内容）は授業で扱っていない。

4

テイラー展開の応用

Introduction

この章で扱う内容は、前章と比べて技術的である。テイラーの定理では剰余項も含めて扱っていたが、この章で扱うテイラー展開において剰余項は「…」という形で誤魔化される、というか剰余項が 0 に収束するのがテイラー展開可能な条件だから、剰余項自体がない。 [1]

この章では、実戦的な内容としてやや複雑な関数のテイラー展開の求め方や極限計算を例題を交えて紹介する。 [5]

Description

以下の関数はすべてテイラー展開可能であり、テイラー展開の収束半径は∞である。
0 まわりでのテイラー展開は次のようになる。（0 まわりでのテイラー展開を特にマクローリン展開と呼ぶ。）

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} + \cdots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} + \cdots$$

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} + \cdots$$

[10]

試験で出る関数はこれらの関数の組み合わせであるため、これを覚えておくと便利である。なぜ便利なのかは次のページを見ればわかる。

まず、関数の和や差のテイラー展開は元の関数のテイラー展開の和や差に一致する。

関数 $f(x), g(x)$ の n 次のテイラー多項式がそれぞれ $P_n(x), Q_n(x)$ とする。
（この章においては以下すべて同様とする。）

このとき、 $f(x) \pm g(x)$ の n 次のテイラー多項式は

$$P_n(x) \pm Q_n(x) \quad \text{（複合同順）}$$

証明は例によって略。まあ、前章に出たテイラー多項式の一意性を表す式を使えば出来る。

次に、関数の積のテイラー展開は、テイラー展開の積に一致する。

$f(x) \cdot g(x)$ の n 次のテイラー多項式は $P_n(x) \cdot Q_n(x)$ の n 次以下の部分である。

実用上の注意点は、 $P_n(x) \cdot Q_n(x)$ の $n+1$ 次以上の項は計算しなくてもよいということ。

関数の商のテイラー展開はやや面倒だ。

$\dfrac{1}{f(x)}$ の n 次のテイラー多項式を $R_n(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ とする。

$\dfrac{1}{f(x)} \cdot f(x) = 1$ の両辺のテイラー多項式が等しいので、

$R_n(x) \cdot P_n(x) = 1$ の係数を比較することで $R_n(x)$ を求められる。

理論的にはこのように求められるが、結構計算が面倒なので注意。

合成関数のテイラー展開は、テイラー展開の合成関数。まあ想像つくよね。

$g(f(x))$ の n 次のテイラー多項式は $Q_n(P_n(x))$ の n 次以下の部分である。

注意点も積と同じく $n+1$ 次以上の項は計算しなくてもよいこと。
これらを駆使すれば試験に出る関数のテイラー展開は求められるようなる。

最後に極限の求め方を紹介する。

ある関数の極限を求める際は、その関数をテイラー展開してその極限を求めてもよい。

これが正しいことは、テイラー展開する代わりにテイラーの定理を利用して変形し、現れた剰余項を前章で紹介した評価法で評価すれば確認できる。

次のページでは、例題を用いてこれらの定理の応用法を見ていく。

問題.　　極限値 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}+2\cos x-4}{x^4}$ を求めよ。（牛腸プリント第 3 回問 4・改題）

この問題だったらロピタルで十分な気もするが（ロピタルは計算速度が速い）、テイラー展開の解説なのでテイラー展開を用いる。

極限計算にはテイラー展開が使用できるので、まずは分子のテイラー展開を考える。求めるのは $x\to 0$ のときの極限であり、分子をテイラー展開した後各項を x^4 で割ることを考えると、5 次以上のテイラー多項式は $x\to 0$ とした時に消えそうであるから、必要なテイラー多項式は 4 次までだと推測できる。さらに勘が良い方ならば 4 次の係数が極限値になるのではないかという見当がつくかもしれない。

分子のテイラー展開を求めるのだが、和のテイラー展開はテイラー展開の和であるから、

$$
\begin{aligned}
e^x &= 1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots \\
e^{-x} &= 1-x+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots \\
2\cos x &= 2-2\cdot\frac{x^2}{2!}+2\cdot\frac{x^4}{4!}+\cdots \\
-4 &= -4 \\
\hline
(\text{分子}) &= 4\cdot\frac{x^4}{4!}+(\cdots)\cdot x^5
\end{aligned}
$$

次のようにして計算できる。この場合は和だから分子全体を微分して力技で求めてもできるが、積のテイラー展開だと、各項をテイラー展開したほうが断然速くなる。

したがって、

$$
\frac{(\text{分子})}{(\text{分母})}=\frac{1}{6}+(\cdots)\cdot x \xrightarrow{x\to 0} \frac{1}{6} \qquad (\text{答})
$$

選んだ例題が悪かったので効力がいまいちわからないが、問題を解く流れは把握できたかと思う。

5

多変数関数の微分

Introduction

多変数関数においても微分という概念は存在する。多変数関数における微分には偏微分と全 [1]
微分の二つがあるように授業では思えるが、全微分は偏微分の発展形のようなものととらえてもらって構わない。

この章では、多変数関数において微分をするのに必要な知識をまとめた。説明には 2 変数関数を用いているが、以下の事項は 3 変数以上の場合にも通用する。 [5]

Description

まずは偏微分の定義から。この定義は y についても同様。

2 変数関数を $f(x, y)$ とする。以下同様。

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x, y) - f(a, y)}{x - a}$$

が収束するとき f は a において x に関して偏微分可能であるという。
また、この極限値を a における x に関する偏微分係数という。 [10]

ある区間全体で偏微分可能だったら、区間上の点と偏微分係数を対応させて偏導関数が作れる。これは 1 変数の時の導関数と同じ考え方。

偏導関数は次のようにあらわされ、定まる。

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h, y) - f(x + y)}{h}$$

偏微分は、x 軸または y 軸方向の変化率を見ている。図形的には $z=f(x,y)$ で定まる曲面のある点での x 軸または y 軸方向傾きを意味する。

では、一般の方向の変化率はどのように調べられるだろうか。

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(x+t\cos\theta, y+t\sin\theta)-f(x,y)}{t}$$

が収束するとき、θ 方向に偏微分可能であるという。
その極限値を θ 方向の偏微分係数という。

図形的には、傾き θ の直線に沿って点 (x,y) に近づいた時の傾きの極限をとっている。

さて、ここで接平面について考えてみる。接平面は、曲面上のある点における接線の集合であると考えられる。とすれば、接平面が存在する条件は「その点における接線が同一平面上に存在すること」と言えるだろう（実際にこれは正しい）。
全微分とは、平たく言えばこのような接平面を求めることである。とりあえずここは、講義で扱った定義を確認しておこう。

$f(x,y)=f(a,b)+A(x-a)+B(y-b)+R(x,y)$ としたときに、（A,B は実数）

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)}\frac{R(x,y)}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}}$$

が収束するとき、f は (a,b) において全微分可能であるという。

2 変数関数の極限がよくわからないかもしれないが、これは定義域上にある中心 (a,b) の円を考え、その円周上のあらゆる点を (x,y) とする。この半径を徐々に小さくして (x,y) を (a,b) に近づけるという方法をとる。数学的には、あらゆる方向から (a,b) に近づいていくという意味である。

具体的には 2 変数関数の極限は次のようにして求まる。

$r=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$ とするとき、次の 2 条件を満たすとする。

(1) $\lim_{r\to 0} h(r)=0$

(2) $|f(x,y)-A|\le h(r)$

このとき $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)=A$

要は、(x,y) と (a,b) の距離 r の関数ではさみうちしているということ。r の関数ではさみうちすることで、全方向から近づいていくことを保証している。

全微分に話題を戻すと（以下に全微分可能条件を再掲）

$f(x,y) = f(a,b) + A(x-a) + B(y-b) + R(x,y)$ としたときに、（A,B は実数）

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{R(x,y)}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}}$$

が収束するとき、 f は (a,b) において全微分可能であるという。

この式を解釈すると、(a,b) の近傍では $f(x,y) \fallingdotseq f(a,b) + A(x-a) + B(y-b)$ であるということである。右辺 1 次式であることから、この式は $f(x,y)$ の 1 次近似であると言える。

さらに、全微分可能であるとき次のことがわかる。

$f(x,y)$ が (a,b) で全微分可能ならば次のことが言える。

(1) $f(x,y)$ は (a,b) で x,y について偏微分可能であり、次式が成り立つ。

$$f_x(a,b) = A, \quad f_y(a,b) = B$$

(2) $f(x,y)$ は θ 方向に偏微分可能で、偏微分係数は次の式で与えられる。

$$f_x(a,b)\cdot\cos\theta + f_y(a,b)\cdot\sin\theta$$

(3) $f(x,y)$ は (a,b) で連続である。

ただし、 $f_x(a,b) = \dfrac{\partial f}{\partial x}$

すごい！　全微分可能であるとわかるだけでこんなことがわかってしまうなんて！
これらのことから、先ほどの 1 次近似はやはり接平面であるということも分かる。

では、全微分可能であるかどうかを調べる定理を紹介しよう。

開区間 D 上定義された多変数関数 f が次の 3 条件を満たすとき、 f は D 上で全微分可能。

(1) f は D 上で連続である。

(2) f は D 上で各変数について偏微分可能である。

(3)各偏導関数は D 上で連続である。

（これらの条件を満たす関数は C_1 級であるという。）

ちなみに、各偏導関数がすべて C_1 級であるとき、その関数は C_2 級であるという。

次は、合成関数の全微分法だ。いわゆる連鎖律と呼ばれているものを紹介する。

$z = f(x,y), \quad x = g(t), \quad y = h(t)$ であるとき、

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}(g(t),h(t)) \cdot g'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(g(t),h(t)) \cdot h'(t)$$

すなわち

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}$$

[65]

$z = f(x,y), \quad x = g(s,t), \quad y = h(s,t)$ であるとき、

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x}(g(s,t),h(s,t)) \cdot \frac{\partial g}{\partial s}(s,t) + \frac{\partial f}{\partial y}(g(s,t),h(s,t)) \cdot \frac{\partial h}{\partial s}(s,t)$$

すなわち

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial s}$$

[70]

この中では後者が重要で、これは変数変換をかませた多変数関数の微分と見ることもできる。[72]

6

多変数関数の極値

Introduction

多変数関数の微分ができるようになったら、その極値を求めたくなるのが自然だろう（？）。この章では、多変数関数の極値を求める理論を紹介する。

講義のうちの 1 回はこれの解説に使われたことを考えると、試験におけるウェイトはかなり大きいと思われるので十分に対策してほしい。

Description

1 変数関数における極値とは、十分小さい区間において最大値・最小値となる点を指した。これの類推から 2 変数関数の極値も定義される。

> $f(x,y)$ が (a,b) で極大（極小）となる
> $\Leftrightarrow$ (a,b) 中心の十分小さな円を定義域とすると、 $f(x,y)$ は (a,b) で最大（小）値をとる。

1 変数関数が極値をとるとき、その点での微分係数は 0 になった。同様のことが 2 変数関数でも起こる。

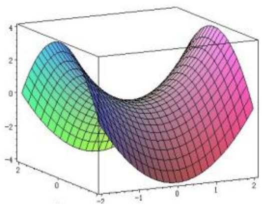
> $f(x,y)$ が (a,b) で極大（極小）となる $\Rightarrow \dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b)=\dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b)=0$

1 変数関数の時と同様、逆は成り立たない。これはその点が変曲点である場合もあるが、2 変数関数の場合に独特の反例もある。

たとえば、右図は $z=x^2-y^2$ のグラフである。

$(x,y)=(0,0)$ において $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b)=\dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b)=0$ だが、極値ではない。

このような点は鞍点（あんてん）とよばれる。



1 変数関数において極大・極小を調べるときは、基本的に 2 階微分を調べていた。2 変数関数の場合もやはり同様に 2 階微分を調べることで極大・極小が大体分かる。

まずは記号の定義から。

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \text{ を } \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \text{ または } f_{xx} \text{ と書く。}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) \text{ を } \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \text{ または } f_{yx} \text{ と書く。}$$

ここに挙がっていない例や高階導関数も類推可能かと思われるので省略。

高階導関数が書きあらわせるようになったところで重要な定理を述べる。

$$f \text{ が } C_2 \text{ 級ならば } \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

勤勉な理一 26 組の諸君は熱力学の第 1 回レポートにこの事実が書かれていたのですでに知っていることかと思われるが重要な定理なのでここに挙げる。

話題を極大・極小に戻そう。というわけで、極大・極小の判定法を述べる。いきなり結論とは、論理の飛躍も甚だしいがシケプリだからしょうがない。

C_2 級 2 変数関数 $f(x,y)$ の極大・極小は、以下のように定義されるヘッセ行列 H の行列式を調べることで大体分かる。

$$H = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix} \text{ とすると、}$$

$\det H > 0 \Rightarrow f(x,y)$ は (a,b) で極値

$\det H < 0 \Rightarrow f(x,y)$ は (a,b) で鞍点

$\det H = 0 \Rightarrow$ なにもわからない

極大か極小かは、$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ または $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ の正負を調べれば分かる。どちらでも同じ結論。正ならば極小で、負ならば極大である。

行列式が 0 になるときは、さらに高階の導関数をそれぞれ調べなければならない。どのように調べるかは授業では説明されなかったので安心されたい（？）。

最後はある集合を定義域とする関数の最大・最小。これもやはりいきなり結論。

> 最大・最小の候補は次の点
> (1)定義域の境界上の点
> (2) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$ となる点

(2)を見て、鞍点や変曲点も候補になってしまうと思われた方もいるかもしれないが大丈夫だ。鞍点や変曲点は候補にはなっても結局最大・最小にはならないのだから議論に影響は及ぼさない。これらの点はかませ犬といえよう。

7

収束判定法

Introduction

これは試験範囲ではないが、クラス掲示板でわからないと言っていた方がいたので解説する。テイラーの定理にも若干関連がある、というかこのシケプリにおいてテイラーの定理の解説内で使用しているが、もういちど言うように試験範囲外であるので基本的にはおまけである。ゆるい気持ちで読んでいただきたい。

Description

収束判定法の肝は一つだ。すなわち、ある数列が等比数列とみなせるとすればその仮想的な公比を調べることによって収束・発散がわかるだろう、ということだ。

ある数列$\{a_n\}$があるとして、その仮想的公比Mはどのように与えられるだろうか。

等比数列ならば、十分大きいnに対して$a_n = M^n$であると考えられる。この考え方で与えられる仮想的公比は次の式であらわされる。

$$M = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$$

また、等比数列ならば、$\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = M$となっているはずである。この考え方で与えられる仮想的公比は次の式であらわされる。

$$M = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$$

この考え方の欠点は、分数形であるために考察の対象となる数列が 0 になるときがある場
合は使えないことだ。 [15]

どちらの考え方を使ったにせよ、判定法は同じである。以下に示す。

> $M<1$ならば、数列は収束する。
> $M>1$ならば、数列は発散する。
> $M=1$のときは、収束・発散は場合による。

大方諸君の予想通りの結果だと思う。$M=1$の場合は微妙で、収束するかどうかは個別に [20]
判定しなければならない。 [21]

8 あとがき

Introduction

あとがきとは、筆者の愚痴である。

Description

みなさん、ここまでの読破お疲れ様です。ここまで書いた俺も御苦労さま。

せっかくのチャンス（？）なのでシケプリの間違いを修正しました。追試験を受験する皆さん、頑張ってください。今回の追試って、電磁気学の授業と同じ時間帯にやるんですね。ちょっと予想外です。

それはともかく、せっかく本試験という貴重な情報が手に入ったのですからそれを踏まえて軽い解説などを加えたいと思います。

問 1 は基本的な問題が並んでいます。（1）はテイラー展開、（2）は逆三角関数の微分、（3）はおそらく sin のテイラー展開（これだけ解けんかった）です。（3）が意外と難しいので問 1 も油断禁物です。

問 2 は 2 変数関数の微分。導関数が 0 になる点を探してヘッセ行列を確認すれば終了です。

問 3 はテイラーの定理。（2）では剰余項の扱いがポイント。（3）は近似次数を落とせばいいらしいのですが受験数学に染まった俺はグラフの面積比較で解きました。

問 4 は合成関数の微分です。 f が a の値のみによって決まるのがポイント。

問 5 は問 2 と同じです。立式できればこちらの方が計算は簡単。

要求があれば模範解答も作りたいと思います。では追試験頑張ってください。

理一 26 組数学 IB 試験対策委員