2006 夏・倉田過去問解答例　※解説含みの冗長な解答かつ有効数字怪しい

問 1

(1)　出生男児の体重を X とすると，X は正規分布 N(3.2，0.4^2)に従う．よって X を標準化した $Z=\dfrac{X-3.2}{0.4}$ は正規分布 N(0，1)に従う．ゆえに正規分布表で値を参照しつつ，

$$P(2.7\le X\le 3.7)=P(-1.25\le Z=\frac{X-3.2}{0.4}\le 1.25)=1-P(|Z|>1.25)=1-2P(Z>1.25)$$

＝1－2･0.10565＝<u>0.7887 (答)</u> である．

(2)　16 人の出生男児の体重を X_1，X_2，･･･，X_{16} とすると，これらはそれぞれ独立に正規分布 N (3.2 , 0.4^2)に従う．よって 16 人の体重の合計 $X_1+X_2+\cdots+X_{16}$ は正規分布 N (3.2×16 , 0.4^2×16) に従い，16 人の体重の平均 $\bar{X}=\dfrac{X_1+X_2+\cdots+X_{16}}{16}$ は正規分布 N ($\dfrac{3.2\times 16}{16}$, $\dfrac{0.4^2\times 16}{16^2}$)，すなわち N(3.2，0.01)に従う．ゆえに(1)と同様にして X を標準化して

$$P(\bar{X}\le 3.35)=P(Z'=\frac{\bar{X}-3.2}{\sqrt{0.01}}\le 1.5)=1-P(Z'\ge 1.5)=1-0.066807=0.933193\fallingdotseq \underline{0.933\ (答)}$$ である．

(3) 数 B の条件付確率の問題と同じ.「A : 患者が感染者と診断される」「T : 患者は感染者である」「F : 患者は感染者でない」と，3 つの事象 A・T・F を定める．すると求める確率は(ベイズの定理)

$$P(T|A)=\frac{P(A\cap T)}{P(A)}=\frac{P(T)P(A|T)}{P(T)P(A|T)+P(F)P(A|F)}=\frac{0.0005\times 0.998}{0.0005\times 0.998+0.9995\times 0.003}=0.1426$$

となり，<u>約 14.3% (答)</u>　である．

(4) (3)で求めた確率はとても低い．よってこの検査法では患者が感染者かどうかは正確に判定できないと思われる．誤って健常者を感染者と判定してしまう確率は 0.3%と低いが，健常者の人数が感染者に比べて圧倒的に多いので結果として誤判定が多くなる．

問 2　顧客の内の 20 歳代女性の割合を p とする．i 番目にアンケートした顧客が 20 代女性だったら X_i＝1，そうでないときは X_i＝0 とする確率変数 X_i を導入する．各々の X_i は独立に二項分布 $Bi(1,p)$に従い，600 人分の和 $S=X_1+X_2+\cdots+X_{600}$ は 二項分布 $Bi(600,\mathrm{p})$ に従う．

二項分布 Bi(1,p)について，平均 $\mu=p$，分散 $\sigma^2=p(1-p)$　であり，n＝600 と十分大きいので中心極限定理が使えるから，S は正規分布 N($600p$，$600p(1-p)$) に近似的に従う．

　さて，帰無仮説 $H_0:p=0.7$ を対立仮説 $H_1:p\neq 0.7$ に対して有意水準 5%で検定する．前述のように S は近似的に正規分布 N($600p$，$600p(1-p)$) に従うので，標準化した $Z=\dfrac{S-600p}{\sqrt{600p(1-p)}}$ は近似的に正規分布 N（0，1）に従う．この式に S＝360，p＝0.7 を代入すると Z＝－5.345 であるが，$Z_{0.025}$＝1.96 より，帰無仮説 H_0 は有意水準 5%で棄却される．則ち，<u>顧客の割合に変化があった．</u>□

問 3　(1) 溶液 1ml 中に x 個のバクテリアが含まれる確率を $f(x)$とすると，これは平均が 3 の *Poisson* 分布だから $f(x)=\dfrac{e^{-3}3^x}{x!}$ である．

$\therefore P(x\ge 4)=1-P(x\le 3)=1-\{f(0)+f(1)+f(2)+f(3)\}$＝0.339532≒<u>0.34 (答)</u>

(2) 溶液 1ml 中にバクテリアが含まれない確率は $f(0)=e^{-3}=0.050805$．よって 2 回測定して 2 回とも含まれない確率は $0.050805^2=0.00258115\fallingdotseq$ <u>0.0026 (答)</u>

(3)「溶液 1ml 中に少なくとも 1 匹バクテリアが居る」確率は $1-f(0)=0.949195$．ゆえに求める確率は ${}_3C_2\times0.050805\times(0.949195)^2=0.1373\fallingdotseq$ <u>0.14 (答)</u>

問 4 (1) スチューデントの t 統計量を用いる．この場合は自由度 14－1＝13 だから

$$-t_{0.025}(13)\le t=\frac{\bar{X}-\mu_1}{s_1/\sqrt{13}}\le t_{0.025}(13)\Leftrightarrow \bar{X}-t_{0.025}(13)\cdot\frac{s_1}{\sqrt{13}}\le\mu_1\le\bar{X}+t_{0.025}(13)\cdot\frac{s_1}{\sqrt{13}}$$ となり、

数値を代入して値を計算すると<u>答は [43.0, 45.4].</u>

(2) $\dfrac{(n-1)s_1{}^2}{\sigma^2}$ は自由度 $n-1=13$ の χ^2 分布に従うから、95%信頼区間は

$$\chi^2{}_{0.975}(n-1)\le\frac{(n-1)s_1{}^2}{\sigma^2}\le\chi^2{}_{0.025}(n-1)\Leftrightarrow\frac{(n-1)s_1{}^2}{\chi^2{}_{0.025}(n-1)}\le\sigma^2\le\frac{(n-1)s_1{}^2}{\chi^2{}_{0.975}(n-1)}$$ となる。

数値を代入して，<u>答は [2.2, 10.9].</u>

(3) 合併した分散 $s^2=\dfrac{(14-1)s_1^2+(10-1)s_2^2}{14+10-2}$ を用いると、2 標本 t 統計量 $t=\dfrac{(\bar{Y}-\bar{X})-(\mu_2-\mu_1)}{s\sqrt{\dfrac{1}{14}+\dfrac{1}{10}}}$

は自由度 14＋10－2＝22 の t 分布に従う。よって 95%信頼区間は

$$-t_{0.025}(22)\le t\le t_{0.025}(22)\Leftrightarrow\bar{Y}-\bar{X}-t_{0.025}(22)\cdot s\sqrt{\frac{1}{14}+\frac{1}{10}}\le\mu_2-\mu_1\le\bar{Y}-\bar{X}+t_{0.025}(22)\cdot s\sqrt{\frac{1}{14}+\frac{1}{10}}$$

に数値を代入して， <u>[1.0, 9.8]. …(答)</u>

問 5 (1)

X	0	1	2
$f(X)$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$

Y	1	2	3
$f(Y)$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$

(2) $E(X)=0\cdot\frac{2}{5}+1\cdot\frac{1}{5}+2\cdot\frac{2}{5}=1$, $V(X)=\frac{2}{5}\cdot(0-1)^2+\frac{1}{5}\cdot(1-1)^2+\frac{2}{5}\cdot(2-1)^2=\frac{4}{5}$．(答)

(3) $E(Y)=1\cdot\frac{2}{5}+2\cdot\frac{1}{5}+3\cdot\frac{2}{5}=2$, $E(XY)=0\cdot1\cdot\frac{3}{20}+1\cdot1\cdot\frac{1}{10}+2\cdot1\cdot\frac{3}{20}+0\cdot2\cdot\frac{1}{10}+1\cdot2\cdot0+2\cdot2\cdot\frac{1}{10}+0\cdot3\cdot\frac{3}{20}$

$+1\cdot3\cdot\frac{1}{10}+2\cdot3\cdot\frac{3}{20}=2.$

だから、 <u>$\mathrm{Cov}(X, Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=2-1\cdot2=0$ (答)</u>

(4) $P(X=0)=\frac{2}{5}$ であり，$P(Y=1)=\frac{2}{5}$ だから $P(X=0)\cdot P(Y=1)=\frac{4}{25}\neq\frac{3}{20}=P(X=0, Y=1)$ となり、

<u>X と Y は独立でない．(答)</u>