数学II 2005年度第1学期期末試験 解答

1.

(1) 成立する

(証明)

$A=(a_{ij})$, $B=(b_{ij})$ とする。

ここで、

$$(\text{積}AB\text{の}(k,p)\text{成分}) = \sum_{m=1}^{n} a_{km} b_{mp}$$

$$= 0 \quad (\because \text{仮定より}, m=1,2,\cdots,n \text{で} b_{mp}=0)$$

が k によらず成立する。

よって、積 AB の第 p 列はすべて 0 である。□

(2) 成立しない

(証明)

$l=m=p=2$ とし、 $A=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix}$

と定めると、

$$BA=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$$

よって反例が存在するので、与えられた命題は不成立。□

2.

(1) 左基本変形により逆行列を求める。

$$\begin{pmatrix}1&1&2&1&0&0\\3&6&7&0&1&0\\2&3&4&0&0&1\end{pmatrix} \xrightarrow{①} \begin{pmatrix}1&1&2&1&0&0\\0&3&1&-3&1&0\\0&1&0&-2&0&1\end{pmatrix} \xrightarrow{②} \begin{pmatrix}1&1&2&1&0&0\\0&1&0&-2&0&1\\0&3&1&-3&1&0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{③} \begin{pmatrix}1&0&2&3&0&-1\\0&1&0&-2&0&1\\0&0&1&3&1&-3\end{pmatrix} \xrightarrow{④} \begin{pmatrix}1&0&0&-3&-2&5\\0&1&0&-2&0&1\\0&0&1&3&1&-3\end{pmatrix}$$

① 2行目から1行目の3倍を引く。3行目から1行目の2倍を引く。
② 2行目と3行目を交換する。
③ 1行目から2行目を引く。3行目から2行目の3倍を引く。
④ 1行目から3行目の2倍を引く。

以上より、求める逆行列は、 $\begin{pmatrix} -3 & -2 & 5 \\ -2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -3 \end{pmatrix}$ //

(2)

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 2 & 2 \\ -2 & -2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2+2 & 2+2 & 2+2 & 2+2 \\ -2+2 & -2+2 & 2+2 & 2+2 \\ -1+1 & -1+1 & -1+1 & 1+1 \end{pmatrix}$$

$$= \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= 4\times4\times2 \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= 32 \det\begin{pmatrix} 1 & 1-1 & 1-1 & 1-1 \\ 0 & 1 & 1-1 & 1-1 \\ 0 & 0 & 1 & 1-1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= 32 \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= 32$$ //

3.

(1) 基本変形を用いて考える。

$$\begin{pmatrix} 1 & a & a \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & a^2 & a \\ -a & a & a^2 \end{pmatrix} \xrightarrow{①} \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & a^2-a & 0 \\ 0 & a^2+a & 2a^2 \end{pmatrix} \xrightarrow{②} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -a^2+a \\ 0 & 0 & a^2-a \end{pmatrix} \xrightarrow{③} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -a^2+a \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

① 3行目から1行目を引く。4行目に1行目のa倍を加える。

② 1行目から2行目のa倍を引く。3行目から2行目の(a^2-a)倍を引く。
4行目から2行目の(a^2+a)倍を引く。

③ 3列目から2列目を引く。4行目に3行目を加える。

以上より、$\begin{pmatrix} 1 & a & a \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & a^2 & a \\ -a & a & a^2 \end{pmatrix}$ の階数は、$\begin{cases} -a^2+a=0 \Leftrightarrow a=0,1 \text{ のとき } 2 \\ -a^2+a\neq 0 \Leftrightarrow a\neq 0,1 \text{ のとき } 3 \end{cases}$

また、

$$\begin{pmatrix} 1 & a & a & 1 \\ 0 & 1 & 1 & a \\ 1 & a^2 & a & a \\ -a & a & a^2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{を順に作用させる}]{①,②,③} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1-a^2 \\ 0 & 1 & 0 & a \\ 0 & 0 & -a^2+a & -a^3+a^2+a-1 \\ 0 & 0 & 0 & 2(-a^3+a) \end{pmatrix} \xrightarrow{④} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a^2+a & -a^3+a^2+a-1 \\ 0 & 0 & 0 & 2(-a^3+a) \end{pmatrix} \cdots (*)$$

④ 4列目から1列目の$(1-a^2)$倍、2列目のa倍を引く。

ここで、
$$-a^2+a=0 \Leftrightarrow a=0,1$$
$$-a^3+a^2+a-1=0 \Leftrightarrow a=\pm 1$$
$$2(-a^3+a)=0 \Leftrightarrow a=-1,0,1$$
に注意すると、

・$a\neq 0,\pm 1$のとき、$(*)$の4列目から3列目の$\dfrac{-a^3+a^2+a-1}{-a^2+a}$倍を引き、3行目、4行目に適当な倍数をかけることで$(*)$を4次単位行列に変形できる。このとき、階数は4

・$a=-1$ のとき,

$$(*) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[-\frac{1}{2}\text{倍}]{3\text{行目を}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

より,階数は3

・$a=0$ のとき,

$$(*) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{3列目と4列目を交換}]{\text{3行目を}(-1)\text{倍し,}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

より,階数は3

・$a=1$ のとき,

$$(*) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ より,階数は2

以上より,
$$\begin{pmatrix} 1 & a & a & 1 \\ 0 & 1 & 1 & a \\ 1 & a^2 & a & a \\ -a & a & a^2 & 1 \end{pmatrix}$$
の階数は,
$$\begin{cases} a \neq 0, \pm 1 \text{ のとき, } 4 \\ a = -1, 0 \text{ のとき, } 3 \\ a = 1 \text{ のとき, } 2 \end{cases}$$

(2)
$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & a^2 & a \\ -a & a & a^2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ a \\ 1 \end{pmatrix}$$
とおく。

$A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ が解をもつ必要十分条件は,拡大係数行列 $\widetilde{A} = (A \mid \mathbf{b})$ について,

$$\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} \widetilde{A}$$

が成立することである。したがって,(1)の結果を用いると,

「$A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ の解が存在する」$\iff$ $a = \pm 1$

また、唯一つの解が存在するのは、自由度が0となるときだから、
未知数の個数(=3)とAの階数が一致すればよい。(もちろん
$a=\pm 1$の条件の下で)
よって、(1)の結果より、唯一つの解が存在する必要十分条件は $a=-1$

4.

(1) まず、$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3$は線型独立でなければならない。
$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$が線型独立であることは明らかなので、

$$\boldsymbol{x}_3 = k\boldsymbol{x}_1 + m\boldsymbol{x}_2 \quad (k, m \in \mathbb{R}) \quad \cdots ①$$

をみたすk, mが存在しない条件を求める。

①を解くと、$(b, k, m) = \left(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$ を得る。

したがって、$b \neq \frac{4}{3}$ならば、①をみたすk, mは存在せず、$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3$は
線型独立であることが分かる。

このとき、Wの任意の元$\boldsymbol{x}$が$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3$の線型結合で表されることを示す。
すなわち、

$$\boldsymbol{x} = a_1\boldsymbol{x}_1 + a_2\boldsymbol{x}_2 + a_3\boldsymbol{x}_3 \quad (a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R})$$

$$\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & b & x_1 \\ -2 & 1 & b-2 & x_2 \\ 0 & -2 & -b & x_3 \\ 1 & 0 & -b+2 & -x_1-x_2-x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ -1 \end{pmatrix} = 0 \quad (\because x_4 = -x_1-x_2-x_3) \quad \cdots ②$$

をみたす(a_1, a_2, a_3)がどんな(x_1, x_2, x_3)に対しても一意的に定まれ
ばよい。

実際、

$$② \Longleftrightarrow \cdots \left(\begin{array}{l}\text{面倒なので省略} \\ \text{本番はちゃんと書いてね}\end{array}\right) \cdots \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x_1-x_2}{3} - \frac{2}{3b-4} \cdot \frac{4x_1+2x_2+3x_3}{3} \\ \frac{2x_1+x_2}{3} - \frac{3b-2}{3b-4} \cdot \frac{4x_1+2x_2+3x_3}{3} \\ \frac{4x_1+2x_2+3x_3}{3b-4} \end{pmatrix} \quad \cdots ③$$

となるから、(a_1, a_2, a_3)は一意的に定まる。
よって、$\boldsymbol{x}$は$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3$の線型結合で表されるから、求める条件は、$b \neq \frac{4}{3}$

(2) ③で $x_1 = x_2 = 1$, $x_3 = -1$ として.

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{3b-4}\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\therefore\ y = -\frac{2}{3b-4}x_1 - \frac{2}{3b-4}x_2 + \frac{3}{3b-4}x_3 \ /\!/$$

[コメント]

1〜3は基本的な問題。ひっかかるとすれば4くらいか。
てか問題自体の難易度はともかく,途中経過はどれくらい書けば良いのだろう? 2は基本変形を全部書き出してもさほど時間はかからないが,3,4あたりはさすがに面倒だ。

というわけで時間を節約するためにも,例えば2(1)のような単なる計算問題は経過を詳しく書いて,4のような応用的な問題は計算経過を多少省くのが良いのではなかろうか? 実際全部細かく書いてたら時間足りないしね。まあ経過省きすぎて減点食らっても責任は負いませんが…。

後,4でもっと良い解答があったら教えて下さいな。