力学　H19　鈴木真二

問題1

$x = b\sin\theta$, $y = b\cos\theta$ (1), (2)

$T = \frac{1}{2}m\left(\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right)$

$= \frac{1}{2}m(b\theta')^2$ (3)

$V = -mgy = -mgb\cos\theta$ (4)

・力学的エネルギー保存則

$\frac{1}{2}m(b\theta')^2 - mgb\cos\theta = -mgb\cos\theta_0$ (5)

両辺tで微分して

$mb^2\theta'\frac{d^2\theta}{dt^2} + mgb\theta'\sin\theta = 0$

よって $\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{b}\sin\theta$ (6)

$L = T - V = \frac{1}{2}m(b\theta')^2 + mgb\cos\theta$

$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \theta'}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = mb^2\frac{d^2\theta}{dt^2} + mgb\sin\theta = 0$ (7)

$H = mb^2\theta'$ (8)

$\frac{dH}{dt} = mb^2\theta'' = -b \times mg\sin\theta = -b\sin\theta\, mg$ (9)

$mx'' = -F\sin\theta$ 　 $my'' = -F\cos\theta + mg$ (10), (11)

$F = mb\theta'^2 + mg\cos\theta$ (12)

質点の重力と遠心力によってその大きさが決まる

問題 2

1) 垂直抗力 $N = mg$ より、運動方程式は

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -\mu N = -\mu mg \quad \therefore \frac{d^2x}{dt^2} = -\mu g$$

両辺 t で積分して

$$\int \frac{d^2x}{dt^2} dt = \int -\mu g dt$$

$$\frac{dx}{dt} = -\mu g t + C \quad \text{--- } (*)$$

$t = 0$ で $\frac{dx}{dt} = 100 \, km/h = \frac{1000}{36} \, m/s$ より

$$C = \frac{1000}{36}$$

$\frac{dx}{dt} = 0$ のとき $t = \frac{C}{\mu g} = 7.08 \cdots \fallingdotseq \underline{7.1 \text{秒}}$

2) ブレーキをかけ始めた位置を $x = 0$ とする

(*) を両辺 t で積分して

$$\int \frac{dx}{dt} dt = \int (-\mu g t + C) dt$$

$$x = -\frac{1}{2}\mu g t^2 + Ct + C'$$

$t = 0$ で $x = 0$ より $C' = 0$

$$\therefore x = -\frac{1}{2}\mu g t^2 + Ct$$

停止距離は $t = \frac{C}{\mu g}$ を代入して

$$x = -\frac{1}{2}\mu g \left(\frac{C}{\mu g}\right)^2 + C \cdot \frac{C}{\mu g} = \frac{C^2}{2\mu g} = 98.6 \cdots \fallingdotseq \underline{99 \, m}$$

問題3

1) 重心まわりの平板の慣性モーメントを考える

$$I_c = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{m}{ah} \left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2 dx\,dy$$

$$= 2\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{0}^{\frac{h}{2}} \frac{m}{ah} (x^2+y^2)\,dx\,dy$$

$$= \frac{m}{a}\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \left(\frac{h^2}{12}+y^2\right) dy$$

$$= \frac{2m}{a}\int_{0}^{\frac{a}{2}} \left(\frac{h^2}{12}+y^2\right) dy \quad = \frac{m}{12}(a^2+h^2)$$

平行軸の定理より、支持点まわりの平板の慣性モーメントIは

$$I = I_c + m\left(\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{h}{2}\right)^2\right) = \underline{\frac{m}{3}(a^2+h^2)}$$

2) 平板全体の運動エネルギーTは $T=\frac{1}{2}I\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$ であり、

力学的エネルギー保存則より

$$\frac{1}{2}I\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 - mg\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{h}{2}\right)^2}\cos\theta = 一定$$

両辺tで微分して

$$I\frac{d\theta}{dt}\cdot\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{1}{2}mg\sqrt{a^2+h^2}\,\frac{d\theta}{dt}\sin\theta = 0$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{\frac{2}{3}\sqrt{a^2+h^2}}\sin\theta$$

単振り子は $\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l}\sin\theta$ より

ひもの長さは $\underline{\frac{2}{3}\sqrt{a^2+h^2}}$

No.

Date

問題 4

1) $x = \underline{r\cos\theta}$, $y = \underline{r\sin\theta}$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dr}{dt}\cos\theta - r\frac{d\theta}{dt}\sin\theta$$

$$= \underline{-v\cos\theta - rw\sin\theta}$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dr}{dt}\sin\theta + r\frac{d\theta}{dt}\cos\theta$$

$$= \underline{-v\sin\theta + rw\cos\theta}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{dv}{dt}\cos\theta + v\frac{d\theta}{dt}\sin\theta - \frac{dr}{dt}w\sin\theta - r\frac{dw}{dt}\sin\theta - rw\frac{d\theta}{dt}\cos\theta$$

$$= vw\sin\theta + vw\sin\theta - rw^2\cos\theta = \underline{2vw\sin\theta - rw^2\cos\theta}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{dv}{dt}\sin\theta - v\frac{d\theta}{dt}\cos\theta + \frac{dr}{dt}w\cos\theta + r\frac{dw}{dt}\cos\theta - rw\frac{d\theta}{dt}\sin\theta$$

$$= -vw\cos\theta - vw\cos\theta - rw^2\sin\theta = \underline{-2vw\cos\theta - rw^2\sin\theta}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{d^2i}{dt^2} \\ \frac{d^2j}{dt^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{d^2x}{dt^2} \\ \frac{d^2y}{dt^2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -rw^2 \\ -2vw \end{pmatrix}$$

2) i, j 軸方向の運動方程式より

$m\frac{d^2i}{dt} = F_i$, $m\frac{d^2j}{dt^2} = F_j$ $\therefore F_i = -mrw^2$, $F_j = -2mvw$

よって、大きさ $m|r|w^2$, 円盤の中心方向

$2m|vw|$ 円盤の回る向きと反対の方向