力学シケプリ　for 2010年度入学理科類25組　by 力学シケ対

1　運動の記述

1.1　位置ベクトル

1.2　速度ベクトル

1.3　加速度ベクトル

1.3.1　加速度

省略

1.3.2　接線成分と法線成分

範囲外

1.4　ベクトルの積

2つのベクトル $\boldsymbol{A}(= A_x\boldsymbol{e}_x + A_y\boldsymbol{e}_y + A_z\boldsymbol{e}_z)$ と $\boldsymbol{B}(= B_x\boldsymbol{e}_x + B_y\boldsymbol{e}_y + B_z\boldsymbol{e}_z)$ があり、両者のなす角を θ とする。

1.4.1　スカラー積

$\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ のスカラー積（内積）は

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A} = |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|\cos\theta = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z$$ [*1]

である。また、

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A} = |\boldsymbol{A}|^2$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}) = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t}\cdot\boldsymbol{B} + \boldsymbol{A}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{B}}{\mathrm{d}t}$$

が成り立つ。

1.4.2　ベクトル積

$\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ のベクトル積（外積）は

$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B} = -\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{A} = (A_yB_z - A_zB_y)\boldsymbol{e}_x + (A_zB_x - A_xB_z)\boldsymbol{e}_y + (A_xB_y - A_yB_x)\boldsymbol{e}_z$$ [*2]

$$|\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}| = |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|\sin\theta$$

である。

このベクトルの向きは、$\boldsymbol{A}$ を $\boldsymbol{B}$ に重ねるように回転させたときに右ねじが進む向きであり、$\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ の両方に直交する向きである。

[*1] $\boldsymbol{e}_x\cdot\boldsymbol{e}_x = \boldsymbol{e}_y\cdot\boldsymbol{e}_y = \boldsymbol{e}_z\cdot\boldsymbol{e}_z = 1,\quad \boldsymbol{e}_x\cdot\boldsymbol{e}_y = \boldsymbol{e}_y\cdot\boldsymbol{e}_z = \boldsymbol{e}_z\cdot\boldsymbol{e}_x = 0$　を利用した。

[*2] $\boldsymbol{e}_x\times\boldsymbol{e}_x = \boldsymbol{e}_y\times\boldsymbol{e}_y = \boldsymbol{e}_z\times\boldsymbol{e}_z = 0,\quad \boldsymbol{e}_x\times\boldsymbol{e}_y = -\boldsymbol{e}_y\times\boldsymbol{e}_x = \boldsymbol{e}_z,\quad \boldsymbol{e}_y\times\boldsymbol{e}_z = -\boldsymbol{e}_z\times\boldsymbol{e}_y = \boldsymbol{e}_x,\quad \boldsymbol{e}_z\times\boldsymbol{e}_x = -\boldsymbol{e}_x\times\boldsymbol{e}_z = \boldsymbol{e}_y$ を利用した。

1.4.3　3 つのベクトルの積

- スカラー 3 重積
  2 つのベクトルのベクトル積ともう 1 つのベクトルとのスカラー積。次の式が成り立つ。

$$\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}) = \boldsymbol{C}\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{B}\cdot(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{A})$$

  この値は、ベクトル $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$ を 3 辺とする平行 6 面体の体積である。

- ベクトル 3 重積
  3 つのベクトルのベクトル積。次の式が成り立つ。

$$\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}) = (\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C})\boldsymbol{B} - (\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})\boldsymbol{C}$$

  ベクトル $\boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$ の作る平面上のベクトルとなる。

1.5　座標の回転とベクトルの変換

範囲外

1.6　極座標

1.6.1　2 次元極座標

- 極座標による表示
  平面上に xy 座標をとり、極座標 (r, θ) で表す。

$$x = r\cos\theta, \quad y = \sin\theta$$

  となるから、位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ およびその時間微分 $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{a}$ は、

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{r} =& r\cos\theta\boldsymbol{e}_x + r\sin\theta\boldsymbol{e}_y \\
\boldsymbol{v} =& (\dot{r}\cos\theta - r\dot{\theta}\sin\theta)\boldsymbol{e}_x + (\dot{r}\sin\theta + r\dot{\theta}\cos\theta)\boldsymbol{e}_y \\
\boldsymbol{a} =& [(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\cos\theta - (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\sin\theta]\boldsymbol{e}_x \\
&+ [(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\sin\theta + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\cos\theta]\boldsymbol{e}_y
\end{aligned}$$

  暗記する必要はないが、瞬時に導けるようにしよう。

- 極座標の単位ベクトル
  動径・角度方向の単位ベクトル $\boldsymbol{e}_r, \boldsymbol{e}_\theta$ を次のように定義する。

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{e}_r \equiv& \frac{\partial}{\partial r}\boldsymbol{r} = \cos\boldsymbol{e}_x + \sin\boldsymbol{e}_y \\
\boldsymbol{e}_\theta \equiv& \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\boldsymbol{r} = -\sin\boldsymbol{e}_x + \cos\boldsymbol{e}_y
\end{aligned}$$

  これを用いれば、

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{v} &= \dot{r}\boldsymbol{e}_r + r\dot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta \\
\boldsymbol{a} &= (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\boldsymbol{e}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\boldsymbol{e}_\theta
\end{aligned}$$

と表せる。これは暗記したほうがいいかも。

- 例：等速円運動
  半径 $r = R$、角速度 $\dot{\theta} = \omega$ の等速円運動では、$\dot{r} = 0$、$\ddot{\theta} = \dot{\omega} = 0$ であるから、

$$\boldsymbol{v} = R\omega \boldsymbol{e}_\theta \qquad |\boldsymbol{v}| = R\omega$$

$$\boldsymbol{a} = -R\omega^2 \boldsymbol{e}_r = -\frac{v^2}{R}\boldsymbol{e}_r \qquad |\boldsymbol{a}| = -R\omega^2 = -\frac{v^2}{R}$$

  となり、高校物理でさんざん出てきた円運動の速さと加速度の大きさが導かれる。

1.6.2　3 次元極座標

範囲外

2　運動法則

2.1　ニュートンの 3 法則

- 第 1 法則（慣性の法則）力を受けない質点は、等速直線運動を行う。
- 第 2 法則（運動方程式）質量 m の質点に力 $\boldsymbol{F}$ が作用すると、力の方向に加速度 $\boldsymbol{a}$ が生じる。

$$m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F} \tag{A}$$

- 第 3 法則（作用反作用の法則）物体 A が物体 B に力 $\boldsymbol{F}$ を及ぼすとき、物体 A は物体 B から力 $-\boldsymbol{F}$ を及ぼされる。

これらの法則は力学の全ての基礎にある。常に頭の片隅に置いておこう。

2.2　基本的な力

2.2.1　地表近くの物体にはたらく重力

省略

2.2.2　万有引力

- ケプラーの第 1 法則
  各惑星は、太陽を焦点の一つとする楕円軌道上を運動する。
- ケプラーの第 2 法則（面積速度一定の法則）
  太陽と惑星を結ぶ動径が単位時間に通過する面積は惑星ごとに常に一定となる。
- ケプラーの第 3 法則
  楕円軌道の長軸半径の 3 乗と公転周期の 2 乗の比は、すべての惑星で同じ値となる。

これらの法則をもとに極座標を用いて考えると、万有引力の公式

$$F_r = -G\frac{Mm}{r^2} \tag{B}$$

が導かれる[*3]（G は万有引力定数 $= 6.673 \times 10^{-11}\mathrm{Nm^2/kg^2}$）。

2.3 その他の力

- ばねやゴムの力
  省略
- 流体の抵抗
  流体中を運動する物体には、進行方向と反対向きの抵抗がはたらく。
  速度が小さい場合、この抵抗は粘性抵抗という。半径 a の球が粘性係数 η の流体中を速さ v で運動するとき、

$$f_v = 6\pi a\eta v$$

  速度が大きい場合は慣性抵抗という。上と同様の設定では、流体の密度を ρ_0 として、

$$f_I = \frac{1}{4}\pi\rho_0 a^2 v^2$$

- 摩擦力
  省略

2.4 運動方程式の積分

運動方程式 $m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F}$ は 2 階の微分方程式である。一般に n 階の微分方程式は n 回の積分で解くことができ、解には n 個の任意定数（力学では初期条件と呼ばれる）が含まれる。任意の力に対して運動方程式を一般的に解くことはできない。

- 運動量と力積
  運動量ベクトル $\boldsymbol{p}$ を定義する。

$$\boldsymbol{p} \equiv m\boldsymbol{v}$$

運動方程式の両辺を時刻 t_1から t_2 まで積分すると、

$$m\boldsymbol{v}(t_2) - m\boldsymbol{v}(t_1) = \boldsymbol{p}(t_2) - \boldsymbol{p}(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{F}(t)\mathrm{d}t \tag{C}$$

最右辺の $\int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{F}(t)\mathrm{d}t$ は力積という。力積はベクトル量である。

式 (C) より、

  - 運動量の変化は、その間に与えられた力積に等しい
  - 力がはたらかない質点の運動量は変化しない
  - 力が時間の関数として与えられれば、運動量の変化がわかる
  - 力に垂直な方向の運動量は保存される

[*3] 万有引力の公式 (B) における質量 m は力の結合定数であり、重力質量と呼ぶことがある。これに対し、運動方程式 (A) における質量 m は加速度の係数であり、慣性質量と呼ぶことがある。

といったことが分かる。

- 角運動量と力のモーメント

 角運動量ベクトル $\boldsymbol{l}$ を定義する。角運動量は原点の選び方に依存する。

$$\boldsymbol{l} \equiv \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p} = m\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v}$$

運動方程式の両辺に左から位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ をかけたもの（$m\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{a}\mathrm{d}t = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}\mathrm{d}t$）を時刻 t_1 から t_2 まで積分すると、

$$\begin{aligned}\int_{t_1}^{t_2} m\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{a}\mathrm{d}t &= [m\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v}]_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} m\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{v}\mathrm{d}t \qquad \text{（部分積分）} \\ &= [\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}]_{t_1}^{t_2} \qquad \text{（同方向の 2 ベクトルの外積は } \vec{0}\text{）} \\ &= \boldsymbol{l}(t_2) - \boldsymbol{l}(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}\mathrm{d}t\end{aligned}$$

最右辺の $\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}$ は τ と書き、力のモーメントという。力のモーメントはベクトル量である。最下段の式より、

- 角運動量の変化は、その間に与えられた力のモーメントの積分に等しい
- 力のモーメントがゼロであれば、力がはたらいていても角運動量は変化しない（角運動量保存の法則）

といったことが分かる。

力が中心力[*4]であるときは、力の源を原点にとれば、力を受けても角運動量は保存する。

3 エネルギー

3.1 仕事

運動エネルギー K を定義する。

$$K \equiv \frac{1}{2}m\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v} = \frac{1}{2}mv^2$$

運動方程式の両辺と速度ベクトルのスカラー積（$m\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{a} = \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{v}$）の両辺を時刻 t_i から t_f まで積分すると、左辺は

$$\int_{t_i}^{t_f} m\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{a}\mathrm{d}t = [\frac{1}{2}mv^2]_{t_i}^{t_f} = K(t_f) - K(t_i) \tag{D}$$

右辺は

$$\begin{aligned}\int_{t_i}^{t_f} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{v}\mathrm{d}t &= \int_{t_i}^{t_f} \boldsymbol{F} \cdot \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t \\ &= \lim_{\Delta t_j \to 0} \sum_j \boldsymbol{F}(t_j)\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}(t_j)}{\mathrm{d}t}\Delta t_j \\ &= \lim_{\Delta r_j \to 0} \sum_j \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}(t_j)) \cdot \Delta \boldsymbol{r}_j \equiv \int_{\boldsymbol{r}(t_i)}^{\boldsymbol{r}(t_f)} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}\end{aligned}$$

[*4] 一定の中心（力の源）に作用線が集中する力を中心力という。

ただし、最後の行で線積分を定義した。この線積分の結果を仕事 W という。式 (D) も合わせれば、

$$W = \int_{\boldsymbol{r}(t_i)}^{\boldsymbol{r}(t_f)} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} \left(= \int_{t_i}^{t_f} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{v} \mathrm{d}t = \int_{t_i}^{t_f} m\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{a} \mathrm{d}t \right) = K(t_f) - K(t_i)$$

つまり、仕事は力の線積分に等しく、運動エネルギーの変化量に等しい。これは力積が運動量の変化に等しいことに対応する。

3.2 力の場

力が速度に依存しないで位置と時刻のみに依存するとき、すなわち $\boldsymbol{F}$ が $\boldsymbol{r}$ と t の関数であるとき、時空には質点に力を及ぼす何かがあると考え、「力の場」があるという。

とくに $\boldsymbol{F}$ が $\boldsymbol{r}$ に依存し t に依存しないとき、「定常的な力の場」という。このとき仕事は始点・終点・経路のみで決まり、速度に依存しない。

3.3 保存力

仕事が始点と終点のみで決まり経路によらないとき、その仕事を及ぼす力の場を保存力という。

保存力の下では、始点と終点が同じ場合仕事 W はゼロである。逆に、力の場が保存力であることの必要十分条件は、任意の閉じた経路での仕事がゼロになることである[*5]。

3.4 力学的エネルギー

- 原点 $\boldsymbol{r}_O$からの点 $\boldsymbol{r}_A$のポテンシャルエネルギー $U(\boldsymbol{r}_A)$ を次のように定義する。

$$U(\boldsymbol{r}_A) \equiv \int_{\boldsymbol{r}_A}^{\boldsymbol{r}_O} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} \tag{E}$$

  つまり、ポテンシャルエネルギーとは、質点がその点から原点へ向かうときにされる仕事である。
- 任意の 2 地点 $\boldsymbol{r}_A, \boldsymbol{r}_B$ を質点が移動するときにされる仕事は、ポテンシャルエネルギーの差に等しい。

$$\int_{\boldsymbol{r}_A}^{\boldsymbol{r}_B} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = U(\boldsymbol{r}_A) - U(\boldsymbol{r}_B)$$

- 保存力の場合、力学的エネルギー（運動エネルギー K とポテンシャルエネルギー U の和）E は保存される。

$$E \equiv K(t) + U(\boldsymbol{r}(t)) = const.$$

- 保存力の場が与えられたとき、式 (E) の線積分を用いてポテンシャルエネルギーが計算できる。逆に、ポテンシャルエネルギーから保存力を導くには、

$$\boldsymbol{F} = -\nabla U \equiv -\mathrm{grad}U$$

  の式を用いる[*6]。

[*5] rot$\boldsymbol{F}$ とかの話は授業範囲外。興味ある人は各自教科書を読んでください。

[*6] $\nabla U(\boldsymbol{r}) = \left(\frac{\partial U(\boldsymbol{r})}{\partial x}, \frac{\partial U(\boldsymbol{r})}{\partial y}, \frac{\partial U(\boldsymbol{r})}{\partial z} \right)$ である。

4　いろいろな運動

4.1　放物運動

放物運動の運動方程式は

$$m\boldsymbol{a} = m\boldsymbol{g}$$

これを時間で積分することで、

$$\boldsymbol{v}(t) = \boldsymbol{g}t + \boldsymbol{v}(0)$$

$$\boldsymbol{r}(t) = \frac{1}{2}\boldsymbol{g}t^2 + \boldsymbol{v}(0)t + \boldsymbol{r}(0)$$

これらは $\boldsymbol{v}(0)$ と $\boldsymbol{r}(0)$ の値（初期条件）によって一意に決まる。
運動エネルギー、ポテンシャルエネルギー、力学的エネルギーは、それぞれ

$$\begin{aligned}
&K(t) = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mv(0)^2 - mg\{z(t) - z(0)\} \\
&U(\boldsymbol{r}(t)) = mgz(t) \\
&E(t) = K(t) + U(\boldsymbol{r}(t)) = \frac{1}{2}mv(0)^2 + mgz(0) = E(0)\,(= const.)
\end{aligned}$$

となり、力学的エネルギーが保存していることがわかる。

4.2　単振動

単振動の運動方程式は

$$ma = m\ddot{x} = -kx$$

これを解くと[*7]

$$x(t) = a\cos(\omega t + \alpha)$$

$$v(t) = -a\omega\sin(\omega t + \alpha)$$

ただし、$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$（角振動数）である。周期 T は $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ となる。
運動エネルギー、ポテンシャルエネルギー、力学的エネルギーは、それぞれ

$$\begin{aligned}
&K(t) = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}ma^2\omega^2\sin^2(\omega t + \alpha) \\
&U(\boldsymbol{r}(t)) = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}a^2k\cos^2(\omega t + \alpha) = \frac{1}{2}ma^2\omega^2\cos^2(\omega t + \alpha) \\
&E(t) = K(t) + U(\boldsymbol{r}(t)) = \frac{1}{2}ma^2\omega^2 = const.
\end{aligned}$$

となり、力学的エネルギーが保存していることがわかる。

[*7] 解き方は教科書を参照。

4.3　振り子

振り子運動の動径・角度方向の運動方程式はそれぞれ

$$m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = mg\cos\theta - T$$
$$m(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) = -mg\sin\theta$$

糸が伸びないとすると $r = l$ で$\dot{r} = \ddot{r} = 0$、さらに微小振動の場合[*8]$\theta \ll 1$ より $\sin\theta \simeq \theta$ であるから

$$T = mg\cos\theta + ml\dot{\theta}^2 \tag{F}$$
$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l}\theta \tag{G}$$

式 (F) は θから張力 T を求める式、式 (G) は $\theta(t)$ の変化を求める式である。式 (G) より、振り子は単振動することがわかる。

4.4　減衰振動

流体中での微小振動では、質点は粘性抵抗を受けて減速し、やがて止まる。運動方程式は、

$$m\ddot{x} = -kx - 2m\gamma\dot{x}$$

右辺第 1 項はばねの復元力、第 2 項は粘性抵抗を表す。これを解くと[*9]
1)$\gamma > \omega$ の場合

$$x(t) = A_+e^{-\gamma t+\sqrt{\gamma^2-\omega^2}t} + A_-e^{-\gamma t-\sqrt{\gamma^2-\omega^2}t}$$

ただし、A_+, A_- は任意定数。
2)$\gamma < \omega$ の場合

$$x(t) = ae^{-\gamma t}\cos[\sqrt{\omega^2 - \gamma^2}t + \alpha]$$

ただし、a, α は任意定数。
3)$\gamma = \omega$ の場合

$$x(t) = (a_1t + a_0)e^{-\omega t}$$

ただし、a_1, a_2 は任意定数。初期条件によって定まる。
いずれも、定数が 2 つあることに注意。
ある時点以後の変位 $|x(t)|$ が微小変位 $\varepsilon(\ll x_0)$ 未満にとどまるまでの時間が一番短いのは $\gamma = \omega$ のときで、この場合の運動を臨界減衰、臨界減衰になるよう抵抗を調整することを臨界制動という。

4.5　一般の 1 次元運動

4.5.1　$U(x)$ の極小点のまわりの微小振動

極小点を x_0 とする。E が $U(x_0)$ よりわずかに大きいとき、$\frac{\mathrm{d}^2U(x)}{\mathrm{d}x^2}|_{x=x_0} = k$ とすれば、

$$F = -\frac{\mathrm{d}U(x)}{\mathrm{d}x} = -k(x - x_0)$$

[*8] ふれが大きいときは授業範囲外。興味ある人は教科書参照。
[*9] 解き方は教科書を参照。

が成立し[*10]、質点は x_0 のまわりを単振動する。

4.5.2 束縛振動

$U(x) \leq E$ の領域が、ある範囲 $x_1 \leq x \leq x_2$ に限られる場合、質点はこの領域内で往復運動する。この間の各点では、

$$\frac{1}{2}mv(t)^2 + U[x(t)] = E$$

$$\Leftrightarrow \quad v(t) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \pm\sqrt{\frac{2[E-U(x)]}{m}}$$

$$\Leftrightarrow \quad t = \int_{x_1}^{x(t)} \frac{\sqrt{m}}{2[E-U(x)]}\mathrm{d}x$$

ただし、$x_1 = x(0)$ である。これにより t が x の関数として求まり、逆に解くことで $x(t)$ が求まる。

4.6 惑星の運動

- 太陽を質量 M で原点に静止する質点とすると、質量 m の質点の万有引力によるポテンシャルエネルギーは

  $$U(r) = -G\frac{Mm}{r}$$

  となる。なお、実際の太陽は有限の大きさをもつが、ポテンシャルを考える場合では質量 M の質点と考えてよい。
- 角運動量 $\boldsymbol{L}$ に垂直な平面を xy 平面とし、2 次元極座標を設定すると、角運動量の保存と動径方向の運動方程式より

  $$L_z = m(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v})_z = mr^2\dot{\theta} \equiv mh\,(=const.) \quad , \quad m(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2)$$

  $$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}m\dot{r}^2 - G\frac{Mm}{r} + \frac{mh^2}{2r^2} = E\,(=const.)$$

  というエネルギー保存則が得られる。左辺第 2 項と第 3 項を有効ポテンシャル U_{eff} とする 1 次元運動とみなすと、運動できる範囲は運動エネルギー $K = E - U_{eff} \geq 0$ の範囲内である。教科書図 36 より、r が十分に大きい範囲では $U_{eff} < 0$ であるから、$E < 0$ のときは質点は束縛運動、$E \geq 0$ のときは無限遠に去っていく。
- 運動の軌跡 $r(\theta)$ は[*11]

  $$r(\theta) = \frac{l}{1+e\cos(\theta+\alpha)}$$

  $$\text{ただし、}l = \frac{h^2}{GM}$$

  $$e\,(\text{離心率}) \geq 0 \quad ,e^2 = 1 + \frac{2Eh^2}{mG^2M^2}$$

  軌道は $e < 1$ のとき楕円、$e = 1$ のとき放物線、$e > 1$ のとき双曲線となる。

[*10] 詳細は教科書参照。

[*11] 詳細は (ry

5　運動座標系

5.1　ガリレイ変換

　xyz 座標系を基準とし、それに対して運動する $x'y'z'$ 座標系を考える。
運動座標系の原点を基準座標系から見た位置を $\boldsymbol{r}_0(t)$、基準座標系・運動座標系での質点の位置をそれぞれ $\boldsymbol{r}(t)$、$\boldsymbol{r}'(t)$ とすると、

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{r}' &= \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0 \\
\Leftrightarrow \quad m\ddot{\boldsymbol{r}}' &= m\ddot{\boldsymbol{r}} - m\ddot{\boldsymbol{r}}_0 \\
\Leftrightarrow \quad m\ddot{\boldsymbol{r}}' &= \boldsymbol{F} - m\ddot{\boldsymbol{r}}_0
\end{aligned}
$$

$x'y'z'$ 座標系が等速度運動をしている（$\ddot{\boldsymbol{r}}_0 = 0$）ときは $m\ddot{\boldsymbol{r}}' = \boldsymbol{F}$ であり、基準座標系と同じ運動方程式が成り立つ。
　等速度で運動する座標系への変換をガリレイ変換といい、ガリレイ変換によって運動方程式は変わらない。

5.2　加速座標系

　一方、$x'y'z'$ 座標系が加速度をもって（$\ddot{\boldsymbol{r}}_0 \neq 0$）運動するとき、$-m\ddot{\boldsymbol{r}}_0$ を慣性力といい、運動座標系では質点は力 $\boldsymbol{F}' = \boldsymbol{F} - m\ddot{\boldsymbol{r}}_0$ を受けて運動する。慣性力は質点の位置や速度には依存しない。
　慣性力を考える必要がない座標系を慣性座標系という。慣性座標系とガリレイ変換で結ばれる座標系は全て慣性座標系である。

5.3　回転座標系

　基準座標系の単位ベクトルを $\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y, \boldsymbol{e}_z$ とし、回転座標系の基準ベクトルを $\boldsymbol{e}'_x, \boldsymbol{e}'_y, \boldsymbol{e}'_z$ とする。質点の位置ベクトルは、

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{r} &= x\boldsymbol{e}_x + y\boldsymbol{e}_y + z\boldsymbol{e}_z \\
&= x'\boldsymbol{e}'_x + y'\boldsymbol{e}'_y + z'\boldsymbol{e}'_z
\end{aligned}
$$

と表される。回転の角速度を ω とし、回転軸の方向に z 軸をとると、

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{e}'_x &= \cos\omega t\boldsymbol{e}_x + \sin\omega t\boldsymbol{e}_y \\
\boldsymbol{e}'_y &= -\sin\omega t\boldsymbol{e}_x + \cos\omega t\boldsymbol{e}_y \\
\boldsymbol{e}'_z &= \boldsymbol{e}_z \\
\boldsymbol{\omega}(\text{角速度ベクトル}) &= \omega\boldsymbol{e}_z
\end{aligned}
$$

となる。基準ベクトルの時間微分は

$$
\begin{aligned}
\dot{\boldsymbol{e}}'_x &= \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{e}'_x & \dot{\boldsymbol{e}}'_y &= \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{e}'_y & \dot{\boldsymbol{e}}'_z &= 0 \\
\ddot{\boldsymbol{e}}'_x &= \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{e}'_x) & \ddot{\boldsymbol{e}}'_y &= \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{e}'_y) & \ddot{\boldsymbol{e}}'_z &= 0
\end{aligned}
$$

以上の式より、速度ベクトル・加速度ベクトルは

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{v} &= \boldsymbol{v}' + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r} \\
\boldsymbol{a} &= \boldsymbol{a}' + 2\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}' + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r})
\end{aligned}
$$

回転座標系での運動方程式は

$$m\boldsymbol{a}'(=\boldsymbol{F}') = \boldsymbol{F} - 2m\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}' - m\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r})$$
$$(\ = \boldsymbol{F} - 2m\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}' - m\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{r}) + m\omega^2\boldsymbol{r})$$

1 行目の第 2 項 $-2m\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}'$ はコリオリ力、第 3 項 $-m\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r})$ は遠心力と呼ばれ、ともに慣性力である。

- 例：回転系で止まっている質点
  静止系から見ると向心力 $\boldsymbol{F} = -m\omega^2\boldsymbol{r}$ がはたらいている。
  回転系から見ると、速度 $\boldsymbol{v}' = 0$ よりコリオリ力ははたらかず、遠心力 $m\omega^2\boldsymbol{r}$ がはたらく*12。 結果、

  $$\boldsymbol{F}' = \boldsymbol{F}\,(\text{静止系から見た力}) + 0\,(\text{コリオリ力}) + m\omega^2\boldsymbol{r}\,(\text{遠心力}) = 0$$

  より質点は静止する。

- 例：静止系で止まっている質点
  静止系から見ると、力がはたらかないので $\boldsymbol{F} = 0$。
  回転系から見ると、慣性力は $-2m\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}' - m\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}) = m\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r})$。
  結果、回転系からは

  $$\boldsymbol{F}' = 0\,(\text{静止系から見た力}) + m\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r})\,(\text{慣性力})$$

  が向心力となって回転しているようにみえる。

- 例：フーコーの振り子
  長いワイヤーに重い錘をつるし、振動の減衰を小さくして、振動面の回転の様子を見えるようにしたものをフーコーの振り子という。
  地球の自転の角振動数を ω、北極からの角度 θ ラジアン（北緯 $90 - 180(\theta/\pi)$ 度)、上方に z' 軸、南方に x' 軸をとると、角速度ベクトルは

  $$\boldsymbol{\omega} = (-\omega\sin\theta, 0, \omega\cos\theta)$$

  質点には重力、張力 T、コリオリ力、遠心力（重力に含まれるので考えなくてよい）がはたらく。
  $x'y'$ 面内*13で運動方程式 $m\ddot{\boldsymbol{r}}' = T - 2m\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}'$ を考えると、xy 面上での振り子の振動面の回転角 ϕ は

  $$\dot{\phi} = -\omega\cos\theta$$

  となることがわかる。つまり、振動面は自転と逆向きに回転し、その角速度は北極から赤道に近づくにつれ小さくなる。

- 例：台風のまわりの風の向き
  北半球では、台風に吹き込む風は、コリオリ力 $-2m\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}'$ による右向きの力と、気圧差による中心向きの力をうける。その結果、風は反時計回りに吹き込むようになり、反時計回りの渦ができる。
  南半球ではコリオリ力が左向きにはたらくから、風は逆回りになり、時計回りの渦になる。

---

*12 遠心力 $-m\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}) = -m\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{r}) + m\omega^2\boldsymbol{r}$ で、$\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{r} = (0,0,\omega)\cdot(x,y,0) = 0$ より。
*13 重力は考えなくてよくなる。

6　質点系

6.1　2 質点系

次項と同じなので省略

6.2　一般の質点系

6.2.1　運動方程式

i 番目の質点にはたらく外力を $\boldsymbol{F}_i$、j 番目の質点に及ぼされる内力を $\boldsymbol{F}_i j$ とすれば、i 番目の質点の運動方程式は、

$$m_i \ddot{\boldsymbol{r}}_i = \boldsymbol{F}_i + \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{F}_{ij}$$

となる。さらに 全質量 M、重心座標 $\boldsymbol{R}$、重心運動量 $\boldsymbol{P}$ を定義すると、

$$M \equiv \sum_{i=1}^{n} m_i \quad , \boldsymbol{R} \equiv \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \boldsymbol{r}_i}{M} \quad , \boldsymbol{P} \equiv \sum_{i=1}^{n} m_i \boldsymbol{v}_i$$

作用反作用の法則より $\boldsymbol{F}_{ij} + \boldsymbol{F}_{ji} = 0$ がなりたつから、 質点系全体の運動方程式は

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \ddot{\boldsymbol{r}}_i = M\ddot{\boldsymbol{R}} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}_i$$

となる。質点系全体でみると、内力は打ち消しあい外力のみがはたらくことがわかる。

6.2.2　相対運動と運動エネルギー

相対座標 $\boldsymbol{r}_i{}'$ を定義する。

$$\boldsymbol{r}_i{}' \equiv \boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{R}$$

相対速度 $\boldsymbol{v}_i{}'$ と運動エネルギー K は、

$$\boldsymbol{v}_i{}' = \dot{\boldsymbol{r}'}_i - \dot{\boldsymbol{R}} = \boldsymbol{v}_i - \boldsymbol{V}$$

$$K = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i \dot{\boldsymbol{r}}_i^2 = \frac{1}{2} M V^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} m_i {v'}_i^2$$

第 2 式は、質点系の運動エネルギーは重心のエネルギーと相対運動のエネルギーに分離できる、ということを示している。

6.2.3　角運動量

個々の質点の原点周りの角運動量は

$$\boldsymbol{l}_i = m_i \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{v}_i$$

全角運動量 $\boldsymbol{L}$ は

$$\begin{aligned} \boldsymbol{L} &= \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{l}_i \\ &= M\boldsymbol{R} \times \boldsymbol{V} + \sum_{i=1}^{n} m_i \boldsymbol{r'}_i \times \boldsymbol{v}'_i \quad \equiv \boldsymbol{L}_G + \boldsymbol{L}' \end{aligned}$$

質点系の全角運動量は重心の角運動量 $\boldsymbol{L}_G$ と相対運動の（重心のまわりの）角運動量 $\boldsymbol{L}'$ に分離できる、ということを示している。また、

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_i$$

が成り立つ。つまり内力は全角運動量の変化に影響しない。

7 剛体

7.1 剛体と釣合い

剛体には、6 つの自由度[*14]がある。

⇔ 剛体の運動には 6 つの変数がある。⇔ 剛体の運動は 6 つの方程式があれば決定できる。

たとえば、剛体の釣り合いの条件を求めるには、全運動量 $\boldsymbol{P} = 0$、全角運動量 $\boldsymbol{L} = 0$ の 2 式（それぞれ x, y, z の 3 座標分の方程式をもつ）があればよい。全運動量の式から、釣り合いには力の和がゼロである必要があることがわかる。また全角運動量の式から、釣り合いを調べるには任意の点のまわりの力のモーメントを調べればよいことがわかる。

剛体を微小な質点の集合と考えると、全質量 M と重心 $\boldsymbol{R}$ は

$$M \equiv \int \rho(\boldsymbol{r})\mathrm{d}V$$

$$\boldsymbol{R} \equiv \frac{\int \boldsymbol{r}\rho(\boldsymbol{r})}{M}$$

と定義できる。剛体に重力 $M\boldsymbol{g}$ がはたらくときは、重心にはたらくと考えてよい。

- 釣合いの例：壁に立てかけた棒
  高校でさんざんやっただろうから省略

7.2 固定軸のある剛体の運動

- 固定軸を z 軸とする。剛体に固定した回転座標系では剛体の各点は静止している（$\boldsymbol{v}'$）ので、各点の速度は

  $$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}^{*15}$$

  これより、剛体の回転軸方向の角運動量 L_z は

  $$\begin{aligned} L_z &= \int \rho(\boldsymbol{r})(\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v})_z \mathrm{d}V \\ &= \int \rho(\boldsymbol{r})[\boldsymbol{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r})]_z \mathrm{d}V \\ &= \omega \int \rho(\boldsymbol{r})(x^2 + y^2)\mathrm{d}V \equiv I\omega \end{aligned}$$

  ここで、慣性モーメント $I \equiv \int \rho(\boldsymbol{r})(x^2 + y^2)\mathrm{d}V$ を定義した[*16]。

[*14] 重心の xyz 座標、軸の角度（3 次元極座標でいうところの θ と ϕ)、軸のまわりの回転角　の 6 つ。

[*15] $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}' + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}$ に $\boldsymbol{v}' = 0$ を代入した。

[*16] [（微小部分の質量）×(軸からの距離)^2] の積分である。

- 自由度は回転角のみだから、次の式のみで運動が記述できる。

$$
\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}L_z}{\mathrm{d}t}\left(=I\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}\right)\\
&\quad=\sum_i[(m_i\boldsymbol{v}_i\times\boldsymbol{v}_i)+(m_i\boldsymbol{r}_i\times\boldsymbol{a}_i)]_z \qquad (m_i\boldsymbol{r}_i\times\boldsymbol{v}_i\ \text{の時間微分})\\
&\quad=\sum_i[(0+\boldsymbol{r}_i\times\boldsymbol{F}_i)]_z \qquad (\text{第 1 項：同方向の 2 ベクトルの外積はゼロ、第 2 項：運動方程式より})\\
&\quad=\tau_z
\end{aligned}
$$

なお、ある軸のまわりの回転を考えるとき、その軸のまわりの力のモーメント τ_z をトルクという。

- 回転運動の運動エネルギー K は

$$
\begin{aligned}
K&=\frac{1}{2}\int\rho(\boldsymbol{r})v^2\mathrm{d}V\\
&=\frac{\omega^2}{2}\int\rho(\boldsymbol{r})(x^2+y^2)\mathrm{d}V\\
&=\frac{1}{2}I\omega^2
\end{aligned}
$$

- x 軸上の質点の運動と比較すると、次のような対応関係がある。

$$
\begin{aligned}
\text{質量 } M &\leftrightarrow \text{慣性モーメント } I\\
\text{位置 } x &\leftrightarrow \text{回転角 } \phi\\
\text{速度 } v &\leftrightarrow \text{角速度 } \omega\\
\text{運動量 } p_x &\leftrightarrow \text{角運動量 } L_z\\
\text{力 } F_x &\leftrightarrow \text{トルク } \tau_z
\end{aligned}
$$

- 回転半径 k を定義する。

$$k^2\equiv\frac{I}{M}$$

- 回転軸が重心を通らない場合、回転軸と重心を通る軸との距離を d、重心を通る軸のまわりの慣性モーメントを I_G とすると、

$$I=I_G+Md^2 \qquad (\text{平行軸の定理というそうです})$$

- 慣性モーメントの例
  - 長さ $2a$、線密度 σ の細い棒の、重心のまわりの慣性モーメント

$$I_G=\int_{-a}^{a}\sigma x^2\mathrm{d}x=\frac{1}{3}Ma^2$$

  - 棒の端のまわりの慣性モーメント

$$I=I_G+Ma^2=\frac{4}{3}Ma^2$$

  - 半径 a、面密度 ρ の薄い円盤の、中心を通り円に垂直な軸のまわりの慣性モーメント

$$I=\int_0^a\rho r^2 2\pi r\mathrm{d}r=\frac{1}{2}Ma^2$$

– 半径 a の球の中心のまわりのモーメント

$$I = \int_0^a r^2 \mathrm{d}r \int_0^\pi \sin\theta \mathrm{d}\theta \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \rho r^2 \sin^2\theta = \frac{2}{5}Ma^2$$

これらは暗記しよう。

- 糸ではなく、固体に釣られた振り子を実体振り子という。微小振動の運動方程式は

$$I\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} \simeq -Mgd\theta$$

一般解は

$$\theta = A\cos(\omega t + \alpha) \qquad \left(\omega = \sqrt{\frac{Mgd}{I}}\right)$$

7.3 剛体の平面運動

剛体が xy 平面上を運動するとき、自由度は重心の xy 座標と回転角 ϕ の 3 つであり、次の運動方程式で記述される。

$$M\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = \sum_i F_{ix}$$

$$M\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} = \sum_y iF_{iy}$$

$$I_G\frac{\mathrm{d}^2\phi}{\mathrm{d}t^2} = \sum_i \tau_z = \sum_i (\boldsymbol{r}'_i \times \boldsymbol{F}_i)_z$$

- 例：斜面上をすべらずに転がる円柱

半径 a、長さ l、質量 M、慣性モーメント I、斜面の角度θ、斜面を下る方向に x 軸、斜面と垂直上方に y 軸とする。運動方程式は

$$M\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = Mg\sin\theta - F$$

$$M\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} = N - Mg\cos\theta$$

$$I\frac{\mathrm{d}^2\phi}{\mathrm{d}t^2} = -aF$$

ただし、斜面からの摩擦 F、垂直抗力 N である。これらを、次の拘束条件

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 0 \qquad \text{（円柱が斜面に沿って動く条件）}$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -a\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t} \qquad \text{（円柱がすべらない条件）}$$

を用いて解くと、

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = \frac{Mga^2\sin\theta}{Ma^2 + I}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} = 0$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\phi}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{Mga\sin\theta}{Ma^2 + I}$$

7.4 一般の剛体の運動

※注：これ以降はどこが試験範囲なのかシケ対も把握しきれてません。なので割と適当です。

剛体の運動が完全に自由なとき（自由度が 6 のとき）、運動の仕方には 2 つの可能性がある。固定点がある場合と、どの点も固定されていない場合である。前者では原点を固定点にとり、後者では重心にとるとよい。

原点の取り方を変えても、角速度ベクトルは変化しない。

7.4.1 角運動量と慣性テンソル

角速度 $\boldsymbol{\Omega}$ と角運動量 $\boldsymbol{L}$ の間の関係は、次のようになる。

$$\begin{aligned}\boldsymbol{L} &= \sum m_i \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{v}_i \\ &= \int \rho(\boldsymbol{r})\boldsymbol{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r})\mathrm{d}V \\ &\equiv \boldsymbol{I}\boldsymbol{\omega}\end{aligned}$$

ただし、$\boldsymbol{I}$ は慣性テンソルである。この式を行列表示すれば、

$$\begin{pmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Omega_x \\ \Omega_y \\ \Omega_z \end{pmatrix}$$

I_{xx}, I_{yy}, I_{zz} はそれぞれ、x, y, z 軸の周りの慣性モーメントに等しい。

慣性テンソルを対角化する[*17]ような適当な座標系をとったとき、その座標軸を慣性主軸、対角成分 I_{xx}, I_{yy}, I_{zz} を主慣性モーメントという。要は、安定して回転しそうな軸のまわりの慣性モーメントである。

7.4.2 運動エネルギー

点 $\boldsymbol{r}$ の静止系での速度 $\boldsymbol{v}$ は

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{V}\text{（運動系の原点の速度）} + \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{r}\text{（原点から見た点 }\boldsymbol{r}\text{ の速度）}$$

であることを用いて、運動エネルギー K は、

$$K = \frac{1}{2}\int \rho(\boldsymbol{r})\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v}\mathrm{d}V = \frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}\boldsymbol{\Omega} \cdot \boldsymbol{L}$$

第 1 項は重心の運動エネルギー、第 2 項は回転運動の運動エネルギーである。

7.5 外力が無い場合の運動

7.6 オイラー方程式

※注：この 2 節は先生のホームページでは講義範囲外となっていますが、2008 年度の過去問に 7.6.3 節に関わる問題が出題されているので、そこだけまとめます。

[*17] すなわち、$I_{xy} = I_{xz} = I_{yx} = I_{yz} = I_{zx} = I_{zy} = 0$ となる。

慣性主軸を ξ, η, ζ 軸とし、それぞれの軸方向の角運動量成分を L_ξ, L_η, L_ζ とする。全角運動量 L と運動エネルギー E は、

$$L^2 = L_\xi^2 + L_\eta^2 + L_\zeta^2 \quad ()$$

$$2E = \frac{1}{I_1}L_\xi^2 + \frac{1}{I_2}L_\eta^2 + \frac{1}{I_3}L_\zeta^2 \quad ()$$

$L_\xi L_\eta L_\zeta$ 空間では、式は球面、式は楕円体を表す。

角運動量の各成分 (L_ξ, L_η, L_ζ) は、「式と式をともに満たす」という条件のもとで変化する。すなわち、点 (L_ξ, L_η, L_ζ) は式の球面と式の楕円体の共通部分（交線上）を運動する。よって、運動が可能であるためには、交線が存在しなければならない。

$I_1 < I_2 < I_3$ とすると、交線の存在条件は、

$$2EI_1 < L^2 < 2EI_3$$

となる。交線の様子は教科書の図 58 を参照していただきたい。この図では、E が一定（楕円体が一定）のとき L を変化（球面の半径を変化）させた時の交線の様子を表している。繰り返すが、点 (L_ξ, L_η, L_ζ) はこの交線上を運動する。

L が小さいときは ξ 軸のまわりで安定して運動し、L が大きいときは ζ 軸の周りで安定して運動している。しかし、η 軸のまわりで安定して運動することはなく、角運動量ベクトルが大きくぶれることが分かる。

今、ξ, η, ζ 軸のまわりの慣性モーメントを I_1, I_2, I_3 としており、また $I_1 < I_2 < I_3$ である。つまり、3 つの慣性主軸のうち、慣性モーメントが最も小さいものと最も大きいもののまわりには安定した回転運動が存在するが、中間の大きさのもののまわりには安定した運動は存在しない。

8　解析力学

範囲外

9　公式集

重要だと思われる公式を羅列してみた。運動方程式以外は導出も押さえよう。

$$m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F} \qquad \text{（運動方程式）}$$

$$\boldsymbol{p}(t_2) - \boldsymbol{p}(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{F}(t)\,\mathrm{d}t \qquad \text{（運動量と力積）}$$

$$\boldsymbol{l}(t_2) - \boldsymbol{l}(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}\mathrm{d}t \qquad \text{（角運動量と力のモーメント）}$$

$$K(t_f) - K(t_i) = \int_{\boldsymbol{r}(t_i)}^{\boldsymbol{r}(t_f)} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} \qquad \text{（運動エネルギーと仕事）}$$

$$\oint_{\text{任意の閉曲線}} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = 0 \qquad \text{（力の場が保存力である必要十分条件）}$$

$$\int_{\boldsymbol{r}_A}^{\boldsymbol{r}_B} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = U(\boldsymbol{r}_A) - U(\boldsymbol{r}_B) \qquad \text{（仕事とポテンシャルエネルギー）}$$

$$K(t) + U(\boldsymbol{r}(t)) = E = const. \qquad \text{（力学的エネルギーの保存）}$$

$$\boldsymbol{F} = -\nabla U \qquad \text{（ポテンシャルエネルギーから仕事を導く）}$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{F}' &= \boldsymbol{F} - m\ddot{\boldsymbol{r}}_0 \\ &= \boldsymbol{F} - 2m\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}' - m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}) \qquad \text{（運動座標系ではたらく力）} \end{aligned}$$

$$M\ddot{\boldsymbol{R}} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}_i \qquad \text{（質点系の重心の運動方程式）}$$

$$K = \frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i {v'}_i^2 \qquad \text{（質点系の運動エネルギー）}$$

$$L = M\boldsymbol{R} \times \boldsymbol{V} + \sum_{i=1}^{n} m_i \boldsymbol{r}'_i \times \boldsymbol{v}'_i \qquad \text{（質点系の角運動量）}$$

$$L_z = I\omega \qquad \text{（固定回転軸方向の角運動量）}$$

$$K = \frac{1}{2}I\omega^2 \qquad \text{（回転運動の運動エネルギー）}$$

$$I = I_G + Md^2 \qquad \text{（平行軸の定理）}$$

$$I_G \frac{\mathrm{d}^2\phi}{\boldsymbol{d}t^2} = \sum (\boldsymbol{r}'_i \times \boldsymbol{F}_i)_z \qquad \text{（回転角に関する運動方程式）}$$

$$K = \frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}\boldsymbol{\Omega} \cdot \boldsymbol{L} \qquad \text{（剛体の運動エネルギー）}$$

10　過去問解答例

2008 年度の解答例です。

[1] (1) 受けた仕事 $W = \int_{r_A}^{r_B} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$

(2)

$$\text{ニュートンの第 2 法則より} \quad m\dot{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{F}$$

$$\text{両辺と } \boldsymbol{v} \text{ の内積をとって} \quad m\boldsymbol{v} \cdot \dot{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{v}$$

$$\text{時刻 } t_A, t_B \text{に点 } \boldsymbol{r}_A, \boldsymbol{r}_B \text{ にいるとして、両辺を積分} \int_{t_A}^{t_B} m\boldsymbol{v} \cdot \dot{\boldsymbol{v}} \mathrm{d}t = \int_{t_A}^{t_B} \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{F} \mathrm{d}t$$

$$\text{左辺は} \quad \int_{t_A}^{t_B} m\boldsymbol{v} \cdot \dot{\boldsymbol{v}} = [\frac{1}{2}m\boldsymbol{v}^2]_{t_A}^{t_B} = K(t_B) - K(t_A)$$

$$\text{右辺は} \quad \int_{t_A}^{t_B} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{v} \mathrm{d}t = \int_{r_A}^{r_B} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = W$$

$$\text{したがって} \quad K(t_B) - K(t_A) = W$$

[2] 　円盤の半径を r、ボールの質量を m とする。

静止した人から見れば、ボールは $\boldsymbol{v}_0 = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}$ の初速度をもっており、外力ははたらかないから、手を放した位置から接線方向に動いてゆく。

円盤上の人から見れば、ボールは初速度ゼロ、自分から遠ざかる向きの遠心力 $|m\omega^2\boldsymbol{r}|$ と、進行方向左向きのコリオリ力 $|-2m\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}'|$ を受けるから、円盤の中心の回りを反時計回りに渦を描きながら、自分から遠ざかっていくように見える（はず)。

(1)(2) とも、以上のことを適当に書けばよい。

[3] (1)

$$\begin{aligned}
\text{角運動量の } z \text{ 成分 } L_z &= \int \rho(\boldsymbol{r})(\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v})_z \,\mathrm{d}V \\
&= \int \rho(\boldsymbol{r})[\boldsymbol{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r})]_z \,\mathrm{d}V \\
&= \omega \int \rho(\boldsymbol{r})(x^2 + y^2)\mathrm{d}V = I_z\omega
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{運動エネルギー } K &= \frac{1}{2} \int \rho(\boldsymbol{r})\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v} \mathrm{d}V \\
&= \frac{1}{2} \int \rho(\boldsymbol{r})(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}) \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r})\mathrm{d}V \\
&= \frac{1}{2}\omega^2 \int \rho(\boldsymbol{r})(x^2 + y^2)\mathrm{d}V = \frac{1}{2}I_z\omega^2
\end{aligned}$$

(2) 外力がはたらかないので、角運動量は保存するから、

$$I_1\omega_1 = I_2\omega_2 \Leftrightarrow \omega_2 = \frac{I_1}{I_2}\omega_1$$

また、運動エネルギーは、

$$K = \frac{1}{2}I_2\omega_2^2 = \frac{1}{2}\frac{I_1^2}{I_2}\omega_1^2$$

[4] (1) x 軸の回りの慣性モーメント I_x を求める。まず、長辺 b、短辺 c の厚さを無視できる長方形板の慣性モーメント I は、面密度を ρ として

$$I = \iint \mathrm{d}y\ \mathrm{d}z\ \rho(y^2+z^2) \quad ([\text{（微小体積の質量）}\times\text{(軸からの距離)}^2]\text{ の積分})$$

$$= \rho\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \mathrm{d}y \int_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}} \mathrm{d}z\ (y^2+z^2) = \frac{1}{12}\rho(b^3c+bc^3)$$

この長方形板の質量を m とすれば、$\rho = m/bc$ であるから、$I = \frac{1}{12}m(b^2+c^2)$ となる。

この結果を用いれば、問題文の長方形板を x 軸に垂直に切った、質量 $\mathrm{d}m$ の薄い板の慣性モーメントは $\mathrm{d}I_x = \frac{1}{12}\mathrm{d}m(b^2+c^2)$ である。よって、問題文の長方形板の質量を M とすれば、

$$I_x = \int \frac{1}{12}\mathrm{d}m(b^2+c^2) = \frac{1}{12}M(b^2+c^2)$$

同様に、

$$I_y = \frac{1}{12}M(a^2+c^2), \qquad I_z = \frac{1}{12}M(a^2+b^2)$$

一方、題意より $a > b > c$ であるから、結局、

$$I_z > I_y > I_x$$

となる。

(2) よくわかりません。7.6.3 節を参照すれば、たぶん x 軸と z 軸の回りの回転が安定か？

[5] 適当でいいから 2 行書きましょう。「DVD が面白かった」「空調の効きが悪かった」など。