'09 年度試験問題

力学A試験問題

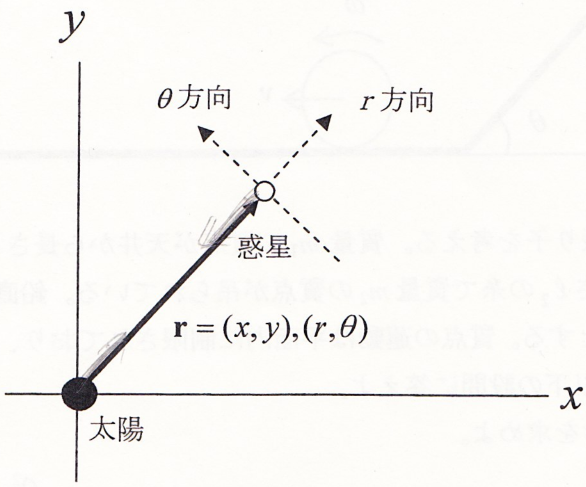
担当教員:小野瀬佳文

[1]　下図のように質量mの惑星が質量Mの太陽を含む一つの平面内で運動している場合を考える。太陽の位置を原点とし、惑星の位置(x,y)を２次元の極座標表示で

$x = r\cos\theta$

$y = r\sin\theta$

のように表して惑星の運動を記述する。ただし、太陽と惑星の間には万有引力 $\mathbf{F} = -G\dfrac{Mm}{r^2}\dfrac{\mathbf{r}}{r}$ ($\mathbf{r}$は惑星の位置ベクトル)が働き、Mはmに比べて十分大きく太陽は静止しているとみなすことが出来る。以下の設問に答えよ。



(1) 動径方向(r方向)とそれに垂直方向(θ方向)の加速度を、r、θとそれらの導関数で表し、r方向、θ方向の運動方程式を書き下せ。

(2) θ方向の運動方程式から角運動量保存則を導け。

(3) 角運動量Lを使って動径方向の方程式から$\dot{\theta}$を消去し、方程式を積分することによりエネルギー保存則を導け。

[2]　質量mばね定数kの調和振動子に、速度に比例する減衰項$-b\dot{x}$　$(b>0)$を導入した運動方程式

$$m\ddot{x} = -kx - b\dot{x}$$

について考える。以下の設問に答えよ。

(1)　一般解をもとめよ。ただし、必要に応じてkとbの大小関係について場合分けを行い、それぞれの場合について解を求めること。

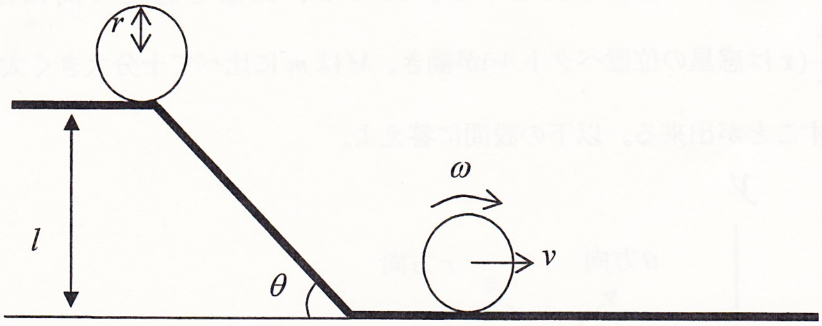
(2)　(1)の全ての場合について$t=0$で$x=x_0$、$\dot{x} = -\dfrac{bx_0}{2m}$の初期条件を代入し、その後の運動を$t$の関数として求めよ。

[3] 下図に示すように半径 r、質量 m の密度が一様な円柱を斜面の上端から初速 0 でゆっくり転がして落とす。ただし、斜面の落差を l、角度を θ、最大静止摩擦係数を μ とする。以下の設問に答えよ。

(1) 円柱の中心軸周りの慣性モーメントを m と r で表せ。

(2) すべりがないことを仮定して斜面が転がり落ちるときの摩擦力を導出し、それと最大静止摩擦力との比較から円柱と斜面にすべりがない条件を答えよ。

(3) すべりがない場合は、エネルギー散逸がないとする。この場合に円柱が斜面を下りきり平面に達したときの角速度 ω と重心の速度 v を求めよ。

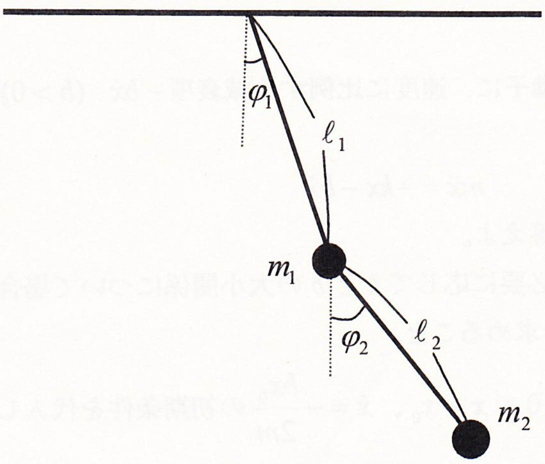


[4] 下図のような２重平面振り子を考える。質量 m_1 の質点が天井から長さ ℓ_1 の糸で吊られており、さらにその下に長さ ℓ_2 の糸で質量 m_2 の質点が吊られている。鉛直方向と糸 ℓ_1, ℓ_2 のなす角をそれぞれ φ_1, φ_2 とする。質点の運動は平面内に制限されており、空気抵抗や糸の重さは無視できるとする。以下の設問に答えよ。

(1) この系のラグランジアンを求めよ。

(2) 微小振動、すなわち $\varphi_1, \varphi_2, \dot{\varphi}_1, \dot{\varphi}_2 << 1$ と仮定し、近似式 $\cos\theta \approx 1 - \dfrac{\theta^2}{2}$ を用いることによりラグランジアンの中でこれらの微小量の２次まで残し、φ_1, φ_2 に関するラグランジュ方程式を書き下せ。

(3) (2)の方程式からこの系の振動モードの角周波数 ω を求めよ。



09'

【1】

(1) $\begin{cases} F_r = m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) \\ F_\theta = m(2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi}) \end{cases}$ より

$\begin{cases} r方向: m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) = -G\dfrac{M \cdot m}{r^2} \\ \theta方向: m(2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi}) = 0 \end{cases}$

(2) θ方向より

$2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi} = 0$

$\Leftrightarrow 2r\dot{r}\dot{\varphi} + r^2\ddot{\varphi} = 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{d}{dt}\left[r^2\dot{\theta} \right] = 0$

$\therefore r^2\dot{\theta} = C$

$mr^2\dot{\theta} = C'$ となる.

ここで, $L_z = mr^2\dot{\varphi}$ …(*) より

角運動量は保存する. 答

(3) (2)より

$\dot{\varphi} = \dfrac{L}{mr^2}$

r方向に代入して,

$m\ddot{r} - \dfrac{L^2}{mr^3} = -G \cdot \dfrac{Mm}{r^2}$

$\Leftrightarrow m\ddot{r} - \dfrac{L^2}{mr^3} + G \cdot \dfrac{Mm}{r^2} = 0$

$\Leftrightarrow m\dot{r}\ddot{r} - \dfrac{L^2}{mr^3}\dot{r} + G\dfrac{Mm}{r^2}\dot{r} = 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{d}{dt}\left[\dfrac{1}{2}m\dot{r}^2 - G\dfrac{Mm}{r} + \dfrac{L^2}{2mr^2} \right] = 0$

$\therefore E = \dfrac{1}{2}m\dot{r}^2 - G\dfrac{Mm}{r} + \dfrac{L^2}{2mr^2}$

となり, これは一定である 答

[2]

(1) $m\ddot{x} = -kx - b\dot{x}$

$\Leftrightarrow m\ddot{x} + kx + b\dot{x} = 0$

$\Leftrightarrow \ddot{x} + \frac{k}{m}x + \frac{b}{m}\dot{x} = 0$

$\frac{k}{m} = \omega_0^2,\ \frac{b}{m} = 2p$ とおく。

$\ddot{x} + 2p\dot{x} + \omega_0 x = 0$ ・・・①

$x = Ce^{\lambda t}$ とおくて、

$\dot{x} = C\lambda e^{\lambda t}$ $\ddot{x} = C\lambda^2 e^{\lambda t}$ より

$C(\lambda^2 + 2\rho\lambda + \omega_0^2)e^{\lambda t} = 0$

$\therefore\ \lambda^2 + 2\rho\lambda + \omega_0^2 = 0$

$\lambda = -\rho \pm \sqrt{\rho^2 - \omega_0^2}$

(i) $\rho^2 - \omega_0^2 < 0$ $\therefore\ \rho < \omega_0$ のとき、

①の解は $C_1 e^{-\rho t + \sqrt{\rho^2 - \omega_0^2}t}$, $C_2 e^{-\rho t - \sqrt{\rho^2 - \omega_0^2}t}$ であり、

よって、xは(xは一般解として)

$x = e^{-\rho t}(C_1 e^{i\sqrt{\omega_0^2 - \rho^2}t} + C_2 e^{-i\sqrt{\omega_0^2 - \rho^2}t})$

$\begin{cases} e^{ix} = \cos x + i\sin x \\ e^{-ix} = \cos x - i\sin x \end{cases}$ をつかって、

$x = e^{-\rho t}\{(C_1 + C_2)\cos\sqrt{\omega_0^2 - \rho^2}t + i(C_1 - C_2)\sin\sqrt{\omega_0^2 - \rho^2}t\}$

C_1, C_2は共役な複素数とし、$C_1 + C_2 \in \mathbb{R}$, $C_1 - C_2 \in \mathbb{C}$ より、

$C_1 + C_2 = A$, $i(C_1 + C_2) = B$ $A, B \in \mathbb{R}$ として、

$x = e^{-\rho t}(A\cos\sqrt{\omega_0^2 - \rho^2}t + B\sin\sqrt{\omega_0^2 - \rho^2}t)$ 合成して、

$x = Ce^{-\rho t}\sin(\sqrt{\omega_0^2 - \rho^2}t + \alpha)$ である。

(ii) $\rho > \omega_0$ のとき,

①の解は $C_1 e^{-\rho + \sqrt{\omega_0^2-\rho^2}t}$. $C_2 e^{-\rho t + \sqrt{\rho^2-\omega_0^2}t}$ となり.

一般解 x は

$$x = e^{-\rho t}\left(C_1 e^{\sqrt{\omega_0^2-\rho^2}t} + C_2 e^{\sqrt{\rho^2-\omega_0^2}t}\right)$$

$\begin{cases} e^{x} = \cosh x + \sinh x \\ e^{-x} = \cosh x - \sinh x \end{cases}$,ってのがあるんですが……

そこまでする必要ないよね?? あんまきれいになんないし.

(iii) $\rho = \omega_0$ のとき

$\lambda = -\rho$.

$\frac{k}{m} > \frac{b^2}{4m^2}$

$$x = (A + tB)e^{-\rho t}$$ となるんです!! 知られているんです.

(2)(i) $x = C e^{-\rho t}\sin(\sqrt{\omega_0^2-\rho^2}t + \alpha)$

$\dot{x} = -Ce^{-\rho t}\sin(\sqrt{\omega_0^2-\rho^2}t+\alpha) + Ce^{-\rho t}\sqrt{\omega_0^2-\rho^2}\cos(\sqrt{\omega_0^2-\rho^2}t+\alpha)$

$t=0$ で $x = x_0$, $\dot{x} = -bx_0/2m$ より.

$C\sin\alpha = x_0$, $-C\sin\alpha + C\sqrt{\omega_0^2-\rho^2}\cos\alpha = -bx_0/2m$

$C\sin\alpha = x_0$ $C\cos\alpha = \sqrt{C^2-x_0^2}$ より.

$-x_0 + \sqrt{C^2-x_0^2}\cdot\sqrt{\frac{k}{m}-\frac{b^2}{4m^2}} = -\frac{bx_0}{2m} \Leftrightarrow (C^2-x_0^2)(\frac{k}{m}-\frac{b^2}{4m^2}) = x_0^2 - \frac{b}{m}x_0^2 + \frac{b^2}{4m^2}x_0^2$

$C^2(\frac{k}{m}-\frac{b^2}{4m^2}) - x_0^2\frac{k}{m} = x_0^2 - \frac{b}{m}x_0^2 \Leftrightarrow C^2\cdot\frac{1}{m}(k-\frac{b^2}{4m}) = x_0^2(m+\frac{k-b}{\cancel{m}})$

$$C = x_0\sqrt{\frac{4m(m+k-b)}{4mk-b^2}} \quad \sin\alpha = \sqrt{\frac{4mk-b^2}{4m(m+k-b)}}$$

となるので.

$$\cos\alpha = \frac{2m+b}{\sqrt{4m(m+k-b)}}$$ より.

$$x = x_0\sqrt{\frac{\cancel{4m(m+k-b)}}{4mk-b^2}} \times \frac{2m+b}{\cancel{\sqrt{4m(m+k-b)}}}\sin\sqrt{\omega_0^2-\rho^2}\,t + x_0\sqrt{\frac{\cancel{4m(m+k-b)}}{\cancel{4mk-b^2}}}\sqrt{\frac{\cancel{4mk-b^2}}{\cancel{4m(m+k-b)}}}\cos\sqrt{\omega_0^2-\rho^2}\,t$$

$$= x_0\frac{2m+b}{\sqrt{4mk-b^2}}\sin\sqrt{\omega_0^2-\rho^2}\,t + x_0\cos\sqrt{\omega_0^2-\rho^2}\,t$$

(ii) $x = e^{-\rho t}(C_1 e^{\sqrt{\rho^2-\omega_0^2}\,t} + C_2 e^{-\sqrt{\rho^2-\omega_0^2}\,t})$

$\dot{x} = -e^{-\rho t}(C_1 e^{\sqrt{\rho^2-\omega_0^2}\,t} + C_2 e^{-\sqrt{\rho^2-\omega_0^2}\,t}) + e^{-\rho t}\{\sqrt{\rho^2-\omega_0^2}\, C_1 e^{+\sqrt{\rho^2-\omega_0^2}\,t} - \sqrt{\rho^2-\omega_0^2}\, C_2 e^{-\sqrt{\rho^2-\omega_0^2}\,t}\}$

$t=0$で

$$\begin{cases} x = C_1 + C_2 = x_0 \\ \dot{x} = -(C_1+C_2) + \lambda(C_1 - C_2) = -\frac{bx_0}{2m} \end{cases} \quad (\lambda = \sqrt{\rho^2-\omega_0^2}$$

$$\therefore \begin{cases} C_1 + C_2 = x_0 \\ \lambda(C_1 - C_2) = \frac{2m-b}{2m} x_0 \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} C_1 + C_2 = x_0 \\ C_1 - C_2 = \frac{2m-b}{2m\sqrt{\rho^2-\omega_0^2}} x_0 \end{cases} \quad C_1 = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{2m-b}{2m\sqrt{\rho^2-\omega_0^2}}\right)x_0,\ C_2 = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{2m-b}{2m\sqrt{\rho^2-\omega_0^2}}\right)x_0$$

よって $x = e^{-\rho t}\left\{\frac{1}{2}\left(1+\frac{2m-b}{2m\sqrt{\rho^2-\omega_0^2}}\right)x_0 e^{\sqrt{\rho^2-\omega_0^2}\,t} + \frac{1}{2}\left(1-\frac{2m-b}{2m\sqrt{\rho^2-\omega_0^2}}\right) e^{-\sqrt{\rho^2-\omega_0^2}\,t}\right.$

(iii) $$\begin{cases} x = (A + tB)e^{-\rho t} \\ \dot{x} = Be^{-\rho t} - (A+tB)e^{-\rho t} \end{cases}$$

$t=0$で

$x = A = x_0.$

$\dot{x} = B - A = -\frac{b}{2m}x_0$

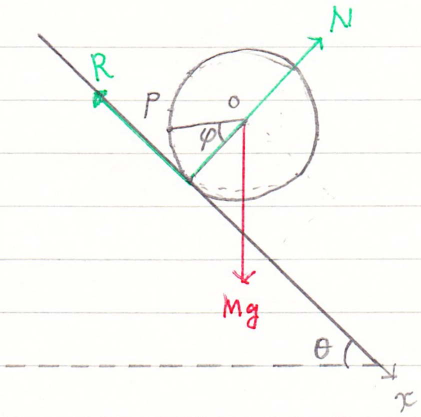
$\therefore A = x_0,\ B = (1 - \frac{b}{2m})x_0$

よって $x = (x_0 + t(1-\frac{b}{2m})x_0)e^{-\rho t}$

[3]

(1) $\frac{mr^2}{2}$ → レポート!!

(2)



重心運動の方程式

$$M\ddot{x}_G = Mg\sin\theta - R$$
$$\ddot{x}_G = g\sin\theta - \frac{R}{M}$$

円柱の軸周りのモーメントより、

$I\dot{\omega} = rR$ という方程式が導かれる。…(*)

ここで、 $\omega = \dot{\varphi}$ $\dot{\omega} = \ddot{\varphi}$

点Pについて考えると、重心が x 動くと、Pは $r\varphi$ 動くので、

つまり $x_G = r\varphi$ $\ddot{x}_G = r\ddot{\varphi}$ となる。

$$I\dot{\omega} = I\ddot{\varphi} = I\frac{\ddot{x}_G}{r} = rR$$
$$\ddot{x}_G = \frac{r^2R}{I}$$

代入して、 $\frac{r^2R}{I} = g\sin\theta - \frac{R}{M} \Leftrightarrow \frac{2R}{M} + \frac{R}{M} = g\sin\theta$

$R = \frac{M}{3}g\sin\theta$ $\max R = \mu Mg\cos\theta$ より、

$\mu \cancel{M}\cancel{g}\cos\theta > \frac{\cancel{M}}{3}\cancel{g}\sin\theta$ $\underline{\mu > \frac{1}{3}\tan\theta}$ //

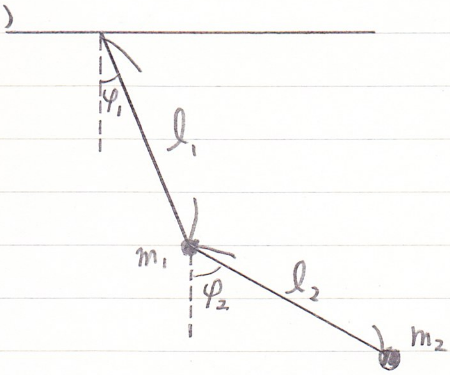
(3) エネルギー保存より、

$$\begin{cases} mgl = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 \\ r\omega = v \end{cases} \Leftrightarrow gl = \frac{1}{2}(r\omega^2) + \frac{(r\omega)^2}{4} = \frac{3}{4}(r\omega)^2$$

$\underline{\omega = \frac{1}{r}\sqrt{\frac{4gl}{3}} \quad v = \sqrt{\frac{4gl}{3}}}$ //

[4]

(1)



m_1について. 座標は. $(l_1\cos\varphi_1,\ l_1\sin\varphi_1)$

$v_1 = (-l_1\sin\varphi_1\dot{\varphi}_1,\ l_1\cos\varphi_1\dot{\varphi}_1)$, $v_1^2 = l_1^2\varphi_1^2$

m_2の座標は. $(l_1\cos\varphi_1 + l_2\cos\varphi_2,\ l_1\sin\varphi_1 + l_2\sin\varphi_2)$

$v_2 = (-l_1\sin\varphi_1\dot{\varphi}_1 - l_2\sin\varphi_2\dot{\varphi}_2,\ l_1\cos\varphi_1\dot{\varphi}_1 + l_2\cos\varphi_2\dot{\varphi}_2)$

$$v_2^2 = l_1^2\varphi_1^2 + l_2^2\varphi_2^2 + 2l_1l_2(\sin\varphi_1\sin\varphi_2\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2 + \cos\varphi_1\cos\varphi_2\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2)$$
$$= l_1^2\varphi_1^2 + l_2^2\varphi_2^2 + 2l_1l_2\cos(\varphi_1-\varphi_2)\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2$$

$$L = T - U$$
$$= \frac{1}{2}m_1l_1^2\varphi_1^2 + \frac{1}{2}m_2[l_1^2\varphi_1^2 + l_2^2\varphi_2^2 + 2l_1l_2\cos(\varphi_1-\varphi_2)\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2]$$
$$- m_1gl_1(1-\cos\varphi_1) - m_2g[l_1(1-\cos\varphi_1) + l_2(1-\cos\varphi_2)]$$

(2) $\cos\theta \approx 1 - \frac{\theta^2}{2}$ を用いると.

$$L = \frac{1}{2}m_1l_1^2\dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2}m_2[l_1^2\dot{\varphi}_1^2 + l_2^2\dot{\varphi}_2^2 + 2l_1l_2\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2] - \frac{1}{2}(m_1+m_2)gl_1\varphi_1^2 - \frac{1}{2}m_2gl_2\varphi_2^2$$

ラグランジアンの運動方程式に代入して

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_1}\right) = \frac{\partial L}{\partial \varphi_1} \Leftrightarrow m_1l_1^2\ddot{\varphi}_1 + m_2l_1^2\ddot{\varphi}_1 + m_2l_1l_2\ddot{\varphi}_2 = -(m_1+m_2)gl_1\varphi_1 \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_2}\right) = \frac{\partial L}{\partial \varphi_2} \Leftrightarrow m_2l_2\ddot{\varphi}_2 + m_2l_1l_2\ddot{\varphi}_1 = -m_2gl_2\varphi_2 \end{cases}$$

(3) つまり.

$$\begin{cases} (m_1+m_2)l_1\ddot{\varphi}_1 + m_2l_2\ddot{\varphi}_2 + (m_1+m_2)g\varphi_1 = 0 \\ l_2\ddot{\varphi}_2 + l_1\ddot{\varphi}_1 + g\varphi_2 = 0 \end{cases}$$

(3) つづきより.

$$\begin{cases} (m_1+m_2)l_1\ddot{\varphi}_1+m_2l_2\ddot{\varphi}_2+(m_1+m_2)g\varphi_1=0 \\ l_2\ddot{\varphi}_2+l_1\ddot{\varphi}_1+g\varphi_2=0 \end{cases} \quad \begin{cases} \varphi_1=A_1e^{i\omega t} \\ \varphi_2=A_2e^{i\omega t} \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{\varphi}_1=A_1i\omega e^{i\omega t} \\ \dot{\varphi}_2=A_2i\omega e^{i\omega t} \end{cases} \quad \begin{cases} \ddot{\varphi}_1=-A_1\omega^2e^{i\omega t} \\ \ddot{\varphi}_2=-A_2\omega^2e^{i\omega t} \end{cases}$$

代入して.

$$\begin{cases} -(m_1+m_2)l_1A_1\omega^2-m_2l_2A_2\omega^2+(m_1+m_2)gA_1=0 \\ -l_2A_2\omega^2-l_1A_1\omega^2+gA_2=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} \omega^2(m_1+m_2)l_1-(m_1+m_2)g & \omega^2m_2l_2 \\ l_1\omega^2 & l_2\omega^2-g \end{pmatrix}}_{=\mathbb{B}\text{ とおく.}}\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}=0.$$

$\det\mathbb{B}$ が 0となればよく.

$$\det\mathbb{B}=\omega^4(m_1+m_2)l_1l_2-(m_1+m_2)gl_2\omega^2-\omega^2(m_1+m_2)gl_1+(m_1+m_2)g^2$$

$$-\omega^4m_2l_1l_2$$

$$=m_1l_1l_2\omega^4-(m_1+m_2)g(l_1+l_2)\omega^2+(m_1+m_2)g^2=0$$

$$\Leftrightarrow \omega^2=\frac{g(m_1+m_2)(l_1+l_2)\pm\sqrt{g^2(m_1+m_2)^2(l_1+l_2)^2-4m_1l_1l_2(m_1+m_2)g^2}}{2m_1l_1l_2}$$