1章

(1.1) $\mathbb{r}$：位置ベクトル

$$\mathbb{r} = x\mathbb{i} + y\mathbb{j} + z\mathbb{k}$$

(1.2) $v = \frac{d\mathbb{r}}{dt}$, $a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2\mathbb{r}}{dt^2}$

(1.3)

・運動方程式

$$m\mathbb{a} = \mathbb{F} \Leftrightarrow m\frac{d^2\mathbb{r}}{dt^2} = \mathbb{F}$$

・運動量 $\mathbb{p}$

$$\mathbb{p} = mv$$

$$\mathbb{p}(t_2) - \mathbb{p}(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \mathbb{F}\, dt$$

(1.4)

(1.5) 抵抗力 $\begin{cases} \text{粘性抵抗：} v \text{に比例} \\ \text{慣性抵抗：} v^2 \text{に比例} \end{cases}$

(1.6) 単振動

・$F = -kx$（変位に比例する復元力）が働く際に起こる運動

（解き方）

運動方程式 $m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx$

$$\Leftrightarrow \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x = -\omega^2 x \quad \left(\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \text{とした}\right)$$

これを解いて

$$x = C_1 \sin \omega t + C_2 \cos \omega t$$
$$\text{or} = A\cos(\omega t + \alpha)$$

（C_1, C_2, A, α は初期条件による）

◎ 微分方程式の解き方

① $\frac{dx}{dt} = c(x - x_0)$ 型（c, x_0：定数）

xを左辺によせる

$$\frac{dx}{x - x_0} = c\,dt$$

$\int$つける

$$\int \frac{dx}{x - x_0} = \int c\,dt$$

$$\log(x - x_0) = ct + C_0 \quad (C_0\text{：積分定数})$$

$\log$とる

$$x - x_0 = e^{ct + C_0}$$
$$= Ae^{ct} \quad (A = e^{C_0}\text{：定数})$$

$$\therefore x = Ae^{ct} + x_0$$

② $\frac{d^2x}{dt^2} + a_1\frac{dx}{dt} + a_2 x = 0$ 型

$x = e^{\alpha t}$ とおき、代入

$$\alpha^2 e^{\alpha t} + a_1 \alpha e^{\alpha t} + a_2 e^{\alpha t} = 0$$

$$\alpha^2 + a_1 \alpha + a_2 = 0$$

これを解いて

$\alpha = \alpha_1, \alpha_2$ を得る

このとき

$$x = Ae^{\alpha_1 t} + Be^{\alpha_2 t}$$

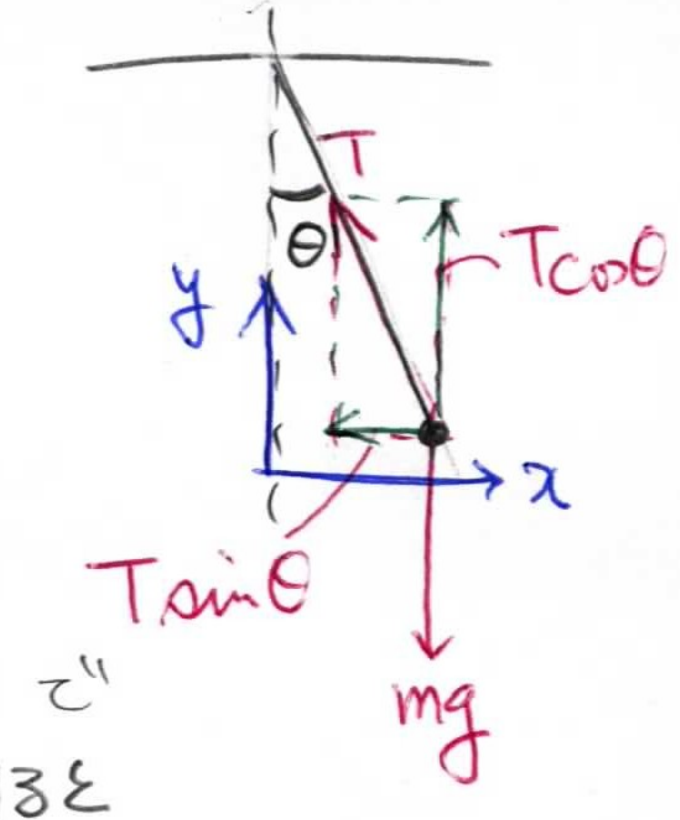
（A, B：任意定数 初期条件に依る）

※ α_1, α_2 が複素数の場合

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

を用いて整理する

(1.7) 単振り子



$|\theta| \ll 1$ とし、

$\begin{cases} \sin\theta \simeq \theta \\ \cos\theta \simeq 1 \end{cases}$ とする。

$\begin{cases} x = l\sin\theta \simeq l\theta \\ y = l(1 - \cos\theta) \simeq 0 \end{cases}$ で

運動方程式を整理すると

$$ml\frac{d^2\theta}{dt^2} = -T\theta$$
$$= -mg\theta$$

$$\Leftrightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l}\theta = -\omega^2\theta \quad \left(\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}\right)$$

(1.6)と同様に、

$$\theta = \theta_0 \cos(\omega t + \alpha)$$

（θ_0, α は任意定数）

を得る。

(1.8) 減衰振動，強制振動

・復元力＋速度に比例する抵抗力

$$\left(F = -kx - c\frac{dx}{dt}\right)$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - c\frac{dx}{dt} \quad (\text{運方})$$

$$\Leftrightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{c}{m}\frac{dx}{dt} + kx = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$$

$\left(\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \text{（1.6と同じ）}, \ \gamma = \frac{c}{2m} \text{とした}\right)$

これを解いて整理

$x = e^{\alpha t}$ とおくと

$\alpha^2 + 2\gamma\alpha + \omega_0^2 = 0$

$\Leftrightarrow \alpha = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$

(i) $\gamma < \omega_0$ のとき：減衰振動

$\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$ として整理

$$x(t) = \underbrace{e^{-\gamma t}}_{\text{減衰}} \underbrace{\{A\sin(\omega_1 t) + B\cos(\omega_1 t)\}}_{\text{単振動}}$$

(A, B：任意定数)

(ii) $\gamma > \omega_0$ のとき：過減衰

$\beta = \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$ として整理

$$x(t) = e^{-\gamma t}(Ae^{\beta t} + Be^{-\beta t})$$

→振動せず減衰

(iii) $\gamma = \omega_0$ のとき：臨界減衰

$\alpha = -\gamma$ のみ $\Rightarrow x = e^{-\gamma t}$ のみ

一般解を作るために

$x = e^{-\gamma t}u(t)$ とおいて代入

$\frac{d^2u}{dt^2} = 0$ を得る $\Rightarrow u = At + B$

(A, B：任意定数)

$$\therefore x(t) = e^{-\gamma t}(At + B)$$

(1.8.2) 強制振動

・周期的な外力 $F\cos\omega t$ をも受ける質点の振動

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - c\frac{dx}{dt} + F\cos(\omega t) \quad (\text{運方})$$

ー処理ムズイんで無視。ー

○時間が経過すると初期条件に依らず、外力と同じ角振動数の振動のみ残る。

○$\omega = \omega_0$ のとき振幅最大になる。

→共鳴、共振

(2.1) 仕事 W

$$W_{AB} = \int_C \mathbb{F} \cdot d\mathbb{r}$$

$\left(\begin{array}{l} W_{AB}：\text{AからBへ移動するのに} \\ \quad \mathbb{F}\text{がした仕事} \\ C：\text{軌跡} \end{array}\right)$

・仕事率 P

$$P = \frac{dW}{dt} = \mathbb{F} \cdot \frac{d\mathbb{r}}{dt} = \mathbb{F} \cdot \mathbb{v}$$

(2.2) 運動エネルギー K

$$K = \frac{1}{2}mv^2$$

$$\Delta K_{AB} = W_{AB}$$

(2.3) 保存力：力のする仕事が途中の経過に依らず始点と終点のみで決まる力。

このカが働く場を「保存力場」という。

2.4 ポテンシャルエネルギー：U

保存力場において任意の点Pから基準点Qまで質点が移動するとき保存力がする仕事。

$$\circ\ U_P = W_{PQ} = \int_P^Q \mathbb{F} \cdot d\mathbb{r} = -\int_Q^P \mathbb{F} \cdot d\mathbb{r}$$

$$= \int_Q^P \mathbb{F}' \cdot d\mathbb{r}$$

($\mathbb{F}'$：$\mathbb{F}$ とつりあう力、$\mathbb{F}' = -\mathbb{F}$)

○ W を U で表す

$$W_{AB} = U_B - U_A$$

○ $\mathbb{F}$ を U で表す

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x},\ F_y = -\frac{\partial U}{\partial y},\ F_z = -\frac{\partial U}{\partial z}$$

これを

$\mathbb{F} = -\underset{\text{gradiant}}{\mathrm{grad}}\, U$, $\mathbb{F} = -\overset{\text{ナブラ}}{\nabla} U$ と書く

$$\left(\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)\right)$$

※小ネタ的なの

$$\circ\ W = \int \mathbb{F} d\mathbb{r} = \int (F_x dx + F_y dy + F_z dz)$$

$$= \int |\mathbb{F}||d\mathbb{r}|\cos\theta$$

○ F：中心力のとき $W_{AB} = \frac{k}{2}(r_A^2 - r_B^2)$

◦ 外積

• $|\mathbf{A}\times\mathbf{B}| = |\mathbf{A}||\mathbf{B}|\sin\theta$

• $\mathbf{A}=(A_x, A_y, A_z),\ \mathbf{B}=(B_x, B_y, B_z)$ のとき

• $\mathbf{A}\times\mathbf{B} = (\underbrace{A_yB_z - A_zB_y}_{A_x,\ B_x\text{が入らない}},\ A_zB_x - A_xB_z,\ A_xB_y - A_yB_x)$

• $\mathbf{A}\times(\mathbf{B}+\mathbf{C}) = \mathbf{A}\times\mathbf{B} + \mathbf{A}\times\mathbf{C}$

• $\mathbf{B}\times\mathbf{A} = -\mathbf{A}\times\mathbf{B}$

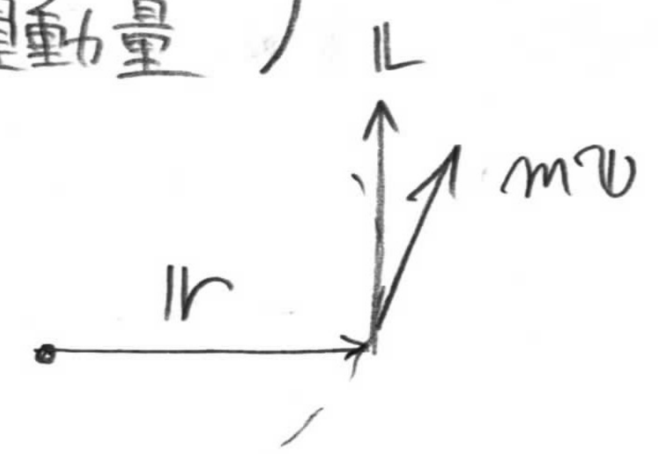
• $\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C}) = \mathbf{B}\cdot(\mathbf{C}\times\mathbf{A}) = \mathbf{C}\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B})$

• $(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\times\mathbf{C} = (\mathbf{A}\cdot\mathbf{C})\mathbf{B} - (\mathbf{B}\cdot\mathbf{C})\mathbf{A}$

—正直どれが要るんか分からん—

(3.1) 角運動量 $\mathbf{L}$

$$\mathbf{L} = \mathbf{r}\times\mathbf{p} \quad \left(\begin{array}{l}\mathbf{r}:\text{位置ベクトル}\\ \mathbf{p}:\text{運動量}\end{array}\right)$$



• 力のモーメント $\mathbf{N}$

$$\mathbf{N} = \mathbf{r}\times\mathbf{F}$$

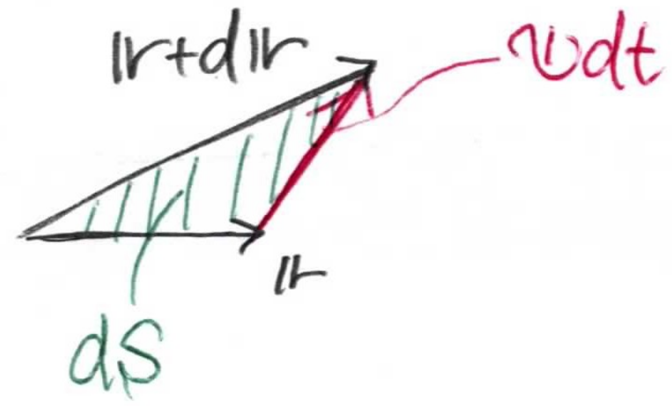
☆ $$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{N}$$

中心力のみが働く場合, $\mathbf{N}=0$

⇒ $\mathbf{L}$は変化しない；角運動量保存則

このとき

$$dS = \frac{1}{2}|\mathbf{r}||\mathbf{v}dt|\sin\varphi$$
$$= \frac{1}{2}|\mathbf{r}\times\mathbf{v}dt|$$



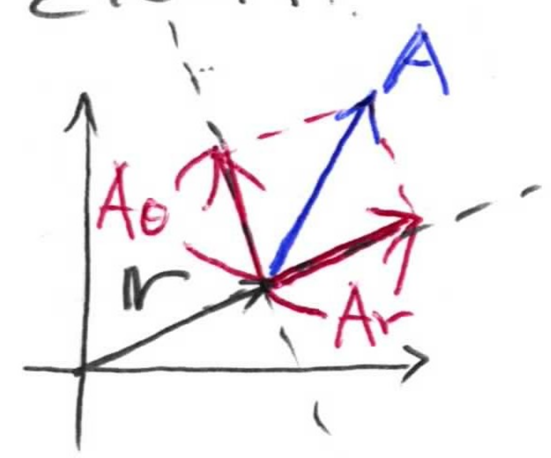
$$\therefore \underbrace{\frac{dS}{dt}}_{\text{面積速度}} = \frac{1}{2m}|\mathbf{r}\times\mathbf{p}|$$
$$= \frac{|\mathbf{L}|}{2m} = (\text{一定})$$

(3.2) 極座標表示

$$\begin{cases} A_x = r\cos\theta \\ A_y = r\sin\theta \end{cases}$$

$\mathbf{A}$を$\mathbf{r}$に平行な成分A_rと
$\mathbf{r}$に垂直な成分A_θとに分解

$$\mathbf{A} = A_r\mathbf{e}_r + A_\theta\mathbf{e}_\theta$$



ここで

$$\begin{cases} A_r = A_x\cos\theta + A_y\sin\theta \\ A_\theta = -A_x\sin\theta + A_y\cos\theta \end{cases}$$

極座標表示で $\mathbf{v}$ 及び $\mathbf{a}$ を表す.

$$\begin{cases} v_r = \dot{r} \\ v_\theta = r\dot{\theta} \end{cases},\quad \boxed{\begin{cases} a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \\ a_\theta = \dfrac{1}{r}\dfrac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) \end{cases}}$$

(導出はノート見てね)

極座標で運.方を書くと

$$\boxed{\begin{cases} m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = F_r \\ m\cdot\dfrac{1}{r}\dfrac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) = F_\theta \end{cases}}$$

$\mathbf{F}$が中心力($F_\theta = 0$)の場合

$$\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) = 0$$
$$\therefore r^2\dot{\theta} = (\text{一定}) \qquad dS = \frac{1}{2}r\cdot r\cdot\sin(d\theta)$$

実は $$dS = \frac{1}{2}r^2\sin(d\theta)$$
$$\simeq \frac{1}{2}r^2 d\theta$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2}r^2\dot{\theta}}$$

やん、これは面積速度一定を表す。

(3.4) ケプラーの法則

$r^2\dot{\theta} = h$ とおき, $\left(\begin{array}{l}h:\text{定数}\\ \ldots\text{第2法則}\end{array}\right)$

$$m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = -G\cdot\frac{Mm}{r^2} \quad \left(\begin{array}{l}\mathbf{e}_r\text{方向の}\\ \text{運.方}\end{array}\right)$$

から rとθの関係式を得る。

$$\cdot\ \dot{r} = \frac{dr}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \frac{h}{r^2}\frac{dr}{d\theta} \quad \left(\because r^2\dot{\theta} = h \Leftrightarrow \dot{\theta} = \frac{h}{r^2}\right)$$

$$\cdot\ \ddot{r} = \frac{d}{dt}\left(\frac{h}{r^2}\frac{dr}{d\theta}\right)$$
$$= \frac{d}{d\theta}\left(\frac{h}{r^2}\frac{dr}{d\theta}\right)\frac{d\theta}{dt}$$
$$= \frac{h}{r^2}\frac{d}{d\theta}\left(\frac{h}{r^2}\frac{dr}{d\theta}\right) \quad \text{等々の処理}$$

及び $l = \dfrac{h^2}{GM},\ u = \dfrac{1}{r}$

などの変数の変換を駆使して

$$r(\theta)=\frac{\ell}{1+e\cos(\theta-\alpha)}$$

を得る。

これは二次曲線を表すが、
惑星の場合 r は有限なので、
$e<1$ であり、これは $\boxed{楕円}$軌道
…第1法則

だ円の面積 πab

$$\frac{ds}{dt}=\frac{h}{2}$$ より

$$T=\frac{2\pi ab}{h}\quad (T:周期)$$

$b=\sqrt{a\ell}$, $h^2=\ell GM$ より

$$T^2=\underbrace{\frac{4\pi^2}{GM}}_{定数}a^3$$

$$\therefore\ \boxed{T^2\propto a^3}$$ …第3法則

力学的エネルギー E について

$$E=\frac{1}{2}mv^2-G\times\frac{Mm}{r}$$

$$=\frac{mh^2}{2\ell^2}(e^2-1)$$

$$\Leftrightarrow\ e^2=1+\frac{2h^2}{m(GM)^2}E$$

角運動量から
力学的エネルギー
保存量
初期条件に依る

となり 初期条件により e が決定する。

4章 非慣性系における運動

以降 慣性系におけるベクトル $\mathbf{A}$ に対し
非慣性系におけるベクトルを $\mathbf{A}'$ と表す
($\mathbf{r}$ と $\mathbf{r}'$, $\mathbf{v}$ と $\mathbf{v}'$ など)

(4.1) 並進加速度座標系

$\overrightarrow{OA}=\mathbf{r}$, $\overrightarrow{O'A}=\mathbf{r}'$, $\overrightarrow{OO'}=\mathbf{R}$ とすると

$$\mathbf{r}=\mathbf{r}'+\mathbf{R}$$

$$m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}=m\frac{d^2\mathbf{r}'}{dt^2}+m\frac{d^2\mathbf{R}}{dt^2}$$

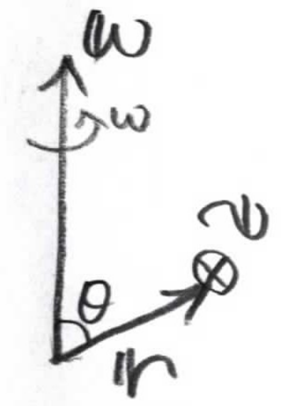
$$\Leftrightarrow\ m\frac{d^2\mathbf{r}'}{dt^2}=\mathbf{F}-\underbrace{m\frac{d^2\mathbf{R}}{dt^2}}_{慣性力}$$

(4.2) 回転座標系

角速度ベクトル $\boldsymbol{\omega}$
：大きさが回転の角速度 ω
方向が回転軸に平行で
右ネジの進む向き のベクトル

このとき

$$\boxed{\mathbf{v}=\frac{d\mathbf{r}}{dt}=\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}}$$



(4.2.2) 等速回転座標系

$$\begin{cases}\mathbf{r}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}\\ \mathbf{r}'=x'\mathbf{i}'+y'\mathbf{j}'+z'\mathbf{k}'\end{cases}$$

これらの式を微分し

・$\mathbf{r}=\mathbf{r}'$

・$\frac{d\mathbf{i}'}{dt}=\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{i}'$, $\frac{d\mathbf{j}'}{dt}=\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{j}'$, $\frac{d\mathbf{k}'}{dt}=\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{k}'$

等を用いて整理すると

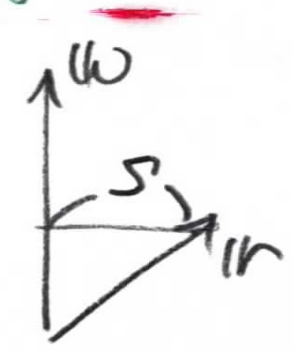
$$\boxed{\mathbf{v}=\mathbf{v}'+\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}'}$$

$$\boxed{\mathbf{a}=\mathbf{a}'+2\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v}'+\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}')}$$ を得る

$$\therefore\ m\mathbf{a}'=\underbrace{\mathbf{F}}_{真の力}\underbrace{-2m\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v}'}_{コリオリ力}\underbrace{-m\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}')}_{遠心力}$$

・回転軸までの距離 S として

$$|遠心力|=mS\omega^2$$



・$\mathbf{v}'$ と回転軸のなす角 θ とすると

$$|コリオリ力|=2m\omega v'\sin\theta$$

向きは $\mathbf{v}'$ に垂直

2次元の場合

$$\begin{cases}\boldsymbol{\omega}=(0,0,\omega)\\ \mathbf{r}'=(x',y',0)\\ \mathbf{v}'=(v_x',v_y',0)\end{cases}$$ として

運動方程式は

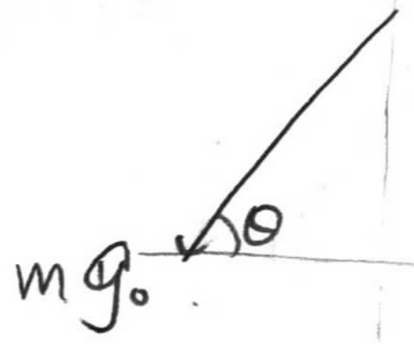
$$\boxed{\begin{aligned}m\frac{d^2x'}{dt^2}&=F_{x'}+2m\omega\frac{dy'}{dt}+m\omega^2x'\\ m\frac{d^2y'}{dt^2}&=F_{y'}-2m\omega\frac{dx'}{dt}+m\omega^2y'\end{aligned}}$$

4.2.3 地表に固定した座標系

地球の中心からみた質点の位置 $\mathbf{r}$
地表の定点の位置 $\mathbf{R}$,
この定点からみた質点の位置 $\mathbf{r}'$ とする。

$$m\mathbf{a}' = \mathbf{F} + m\mathbf{g}_0 - 2m\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v}' - m\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times(\mathbf{R}+\mathbf{r}')) \cdots ⓐ$$

$\mathbf{R}+\mathbf{r}' \simeq \mathbf{R}$ と近似すると 遠心力は一定。



地上での重力 mg は mg_0 と遠心力の和

$$m\mathbf{g} = m\mathbf{g}_0 - m\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{R})$$

緯度を θ とすると $\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{R})$ の大きさは $R\omega^2\cos\theta$ ゆえ

$$g = \sqrt{(g_0\sin\theta)^2 + (g_0\cos\theta - R\omega^2\cos\theta)^2}$$

$$= \cdots \simeq g_0 - R\omega^2\cos^2\theta$$

$m\mathbf{g}$ を用いると ⓐ は

$$m\mathbf{a}' = \mathbf{F} + m\mathbf{g} - 2m\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v}'$$

これに

$$\begin{cases} \mathbf{v}' = \left(\dfrac{dx'}{dt}, \dfrac{dy'}{dt}, \dfrac{dz'}{dt}\right) \\ \boldsymbol{\omega} = (0, \omega\cos\theta, \omega\sin\theta) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v}' = \omega\left(\frac{dz'}{dt}\cos\theta - \frac{dy'}{dt}\sin\theta, \frac{dx'}{dt}\sin\theta, -\frac{dx'}{dt}\cos\theta\right)$$

を代入して

$$\begin{cases} m\dfrac{d^2x'}{dt^2} = F_{x'} + 2m\omega\left(\dfrac{dy'}{dt}\sin\theta - \dfrac{dz'}{dt}\cos\theta\right) \\ m\dfrac{d^2y'}{dt^2} = F_{y'} - 2m\omega\dfrac{dx'}{dt}\sin\theta \\ m\dfrac{d^2z'}{dt^2} = F_{z'} - mg + 2m\omega\dfrac{dx'}{dt}\cos\theta \end{cases}$$

特に地表付近の水平方向の運動では
$z'=0$ は不変として

$$m\left(\frac{d^2x'}{dt^2}, \frac{d^2y'}{dt^2}\right) = (F_{x'}, F_{y'}) + \underbrace{2m\omega\sin\theta\left(\frac{dy'}{dt}, -\frac{dx'}{dt}\right)}_{\text{コリオリ力}}$$

5章 質点系の力学

各質点についての運・方

$$m_i\frac{d^2\mathbf{r}_i}{dt^2} = \mathbf{F}_i + \sum_{j(\neq i)}\mathbf{F}_{ij}$$

を辺々全て加えて

$$\sum_i m_i\frac{d^2\mathbf{r}_i}{dt^2} = \sum_i \mathbf{F}_i + \underbrace{\sum_i\sum_{j(\neq i)}\mathbf{F}_{ij}}_{\text{作用反作用で0}} = \sum_i \mathbf{F}_i$$

今、重心の位置ベクトル $\mathbf{R}$ を

$$\mathbf{R} = \frac{\sum_i m_i\mathbf{r}_i}{\sum_i m_i} = \frac{\sum_i m_i\mathbf{r}_i}{\underbrace{M}_{\text{質量の総和}}}$$

と定義すると

重心の速度 $\mathbf{V}$ は

$$\mathbf{V} = \frac{d\mathbf{R}}{dt} = \frac{\sum_i m_i\mathbf{v}_i}{M}$$

全質点系の運動量 $\mathbf{P}$ は

$$\mathbf{P} = \sum_i m_i\mathbf{v}_i = M\mathbf{V}$$

これらより

$$M\frac{d^2\mathbf{R}}{dt^2} = \sum_i \mathbf{F}_i$$

or

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \sum_i \mathbf{F}_i$$

特に、外力が働かないとき
全運動量は変化しない

5.2 力学的エネルギー

重心から見た相対座標を $\mathbf{r}_i'$
〃 速度を $\mathbf{v}_i'$
とする。

全運動エネルギー K は

$$K = \underbrace{\frac{1}{2}MV^2}_{\text{重心運動}} + \underbrace{\frac{1}{2}\sum_i m_i v_i'^2}_{\text{相対運動}}$$

5.2.2 ポテンシャル・エネルギー

外力・内力共に保存力とする。

・外力によるポテンシャルエネルギー

$$U_i(\mathbf{r}_i) = -\int_{\infty}^{\mathbf{r}_i} \mathbf{F}_i(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}$$

基準

・内力によるポテンシャル・エネルギー

質点 j が i に及ぼす力を

$\mathbf{F}_{ij}(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)$ とかくと

$$U_{ij}(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) = -\int_{\infty}^{\mathbf{r}_i} \mathbf{F}_{ij}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j) \cdot d\mathbf{r}$$

・全ポテンシャルエネルギーは

$$\boxed{U = \sum_i U_i(\mathbf{r}_i) + \sum_{i>j}\sum U_{ij}(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)}$$

和は i と j の組について取る

5.3 2体問題

2つの質点が互いに力を及ぼし合いながら運動

外力はなし。

重心： $M\dfrac{d^2\mathbf{R}}{dt^2} = 0$ ∴重心は等速度運動

質点2に対する質点1の相対的な位置ベクトル $\mathbf{r}$ を

$\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ とする。

各質点についての運・方

$$m_1\frac{d^2\mathbf{r}_1}{dt^2} = \mathbf{F}_{12}, \quad m_2\frac{d^2\mathbf{r}_2}{dt^2} = -\mathbf{F}_{12}$$

の両辺を m_1, m_2 で割って差をとると

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)\mathbf{F}_{12}$$

$$\Leftrightarrow \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2} \cdot \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{F}_{12}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\mu\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{F}_{12}}$$

→ 2体問題は1体問題に帰着

5.4 衝突

既知と思われる所は割愛

重心の速さ $V = \dfrac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}$

で移動する系（重心系）で見ると

衝突前の速度 u_1, u_2

後 〃 u_1', u_2' とすると

$$\boxed{\begin{cases} u_1 = \dfrac{m_2}{m_1+m_2}(v_1 - v_2) \\ u_2 = \dfrac{m_1}{m_1+m_2}(v_1 - v_2) \end{cases}}$$

質量の逆比　相対速度

$$\boxed{\begin{aligned} u_1' &= -e u_1 \\ u_2' &= -e u_2 \end{aligned}}$$

重心系における運動エネルギー ＝相対運動の運動エネルギー

前 $\frac{1}{2}m_1 u_1^2 + \frac{1}{2}m_2 u_2^2 = \frac{1}{2}\mu(v_1 - v_2)^2$

後 $\frac{1}{2}m_1 u_1'^2 + \frac{1}{2}m_2 u_2'^2 = \frac{1}{2}e^2\mu(v_1 - v_2)^2$

（実験室系の運動エネルギー）

＝（重心系における運動エネルギー）＋（重心の運動エネルギー）

$\frac{1}{2}(m_1+m_2)V^2$

5.5 質点系の角運動量

$\mathbf{L}_i = m_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_i$ （各質点の原点まわりの角運動量）

$$\frac{d}{dt}\underbrace{\sum_i \mathbf{L}_i}_{\text{全角運動量 }\mathbf{L}} = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i + \sum_i\sum_{j(\neq i)} \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{ij}$$

$$\boxed{\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i = \underbrace{\sum_i \mathbf{N}_i}_{\text{外力のモーメント}}}$$

$\sum_i \mathbf{N}_i = 0$ ならば角運動量は保存

重心まわりの角運動量

$\begin{cases} \mathbf{r}_i = \mathbf{R} + \mathbf{r}_i' \\ \mathbf{v}_i = \mathbf{V} + \mathbf{v}_i' \end{cases}$ 　$\mathbf{L}' = \sum_i m_i \mathbf{r}_i' \times \mathbf{v}_i'$

このとき

$$\boxed{\frac{d\mathbf{L}'}{dt} = \underbrace{\sum_i \mathbf{r}_i' \times \mathbf{F}_i}_{\text{重心まわりの全外力のモーメント}}}$$

6章 剛体の力学

6.1

剛体の運動：自由度6.

→運動方程式 6つ

重心：$\dfrac{d\mathbb{P}}{dt} = M\dfrac{d^2\mathbb{R}}{dt^2} = \sum_i \mathbb{F}_i$

回転 $\dfrac{d\mathbb{L}}{dt^2} = \sum_i \mathbb{r}_i \times \mathbb{F}_i$ or $\dfrac{d\mathbb{L}'}{dt} = \sum_i \mathbb{r}_i' \times \mathbb{F}_i$

点$\mathbb{r}$における密度 $\rho(\mathbb{r})$ とすると

全質量 $\boxed{M = \int \underbrace{\rho(\mathbb{r})dv}_{\text{微小部分の質量}}}$

$dxdydv$：微小体積

重心の座標 $\boxed{\mathbb{R} = \dfrac{\int \mathbb{r}\rho(\mathbb{r})dv}{\int \rho(\mathbb{r})dv}}$

全運動量 $\boxed{\mathbb{P} = \int \dfrac{d\mathbb{r}}{dt}\rho(\mathbb{r})dv}$

角運動量 $\boxed{\mathbb{L} = \int \mathbb{r} \times \dfrac{d\mathbb{r}}{dt}\rho(\mathbb{r})dv}$

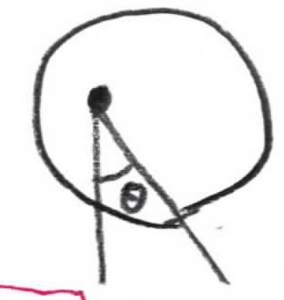
6.2 固定軸のある剛体の運動

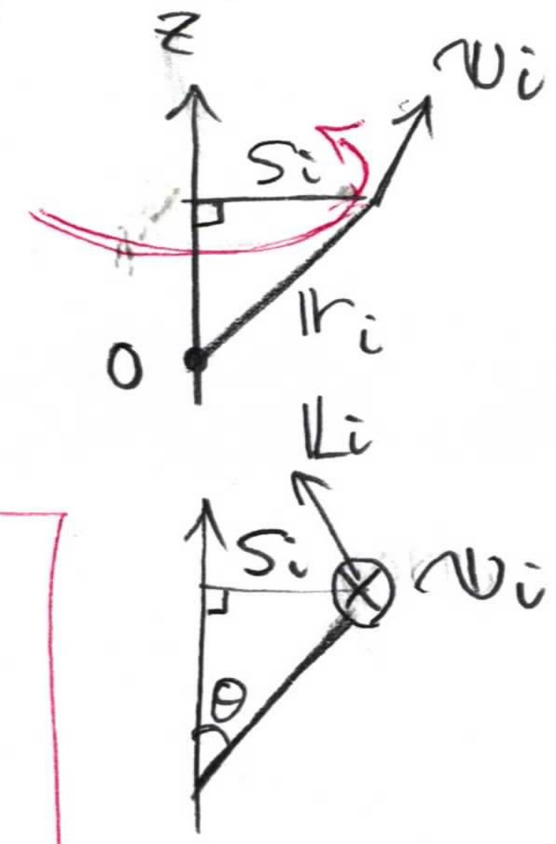
固定軸上に原点Oがあり、Oのまわりの

角運動量 $\mathbb{L} = \sum_i m_i \mathbb{r}_i \times \mathbb{v}_i$

が z成分のみを持つ場合を考える。

・自由度1





$\boxed{L_z = \sum m_i S_i^2 \omega}$

ただし $S_i = \sqrt{x_i^2 + y_i^2}$

$$L_{iz} = m_i \underbrace{r_i \sin\theta}_{S_i} \underbrace{S_i\omega}_{v_i}$$
$$= m_i S_i^2 \omega$$

$\boxed{I = \sum_i m_i S_i^2 = \int \rho(\mathbb{r})S^2(\mathbb{r})dV = \int \rho(\mathbb{r})(x^2+y^2)dV}$

を慣性モーメントという。

$\boxed{I\dfrac{d\omega}{dt} = N_z}$

[平行軸の定理]

質量Mの剛体の重心を通る回転軸まわりの

慣性モーメントをI_0，この軸に平行で距離d

離れた回転軸まわりの慣性モーメント I とすると

$$I = I_0 + Md^2$$

6.3 剛体の平面運動

重心 $M\dfrac{d^2\mathbb{r}}{dt^2} = \dfrac{d\mathbb{P}}{dt} = \sum_i \mathbb{F}_i$

重心回りの回転 $I_0\dfrac{d^2\theta}{dt^2} = \sum_i N_i$

L_z'：重心回り

$\mathbb{r}$：重心の座標，I_0：重心回りの慣性モーメント

θ：重心回りの回転角

N_i：外力の重心回りのモーメントのz成分