

## 第1章 質点の運動

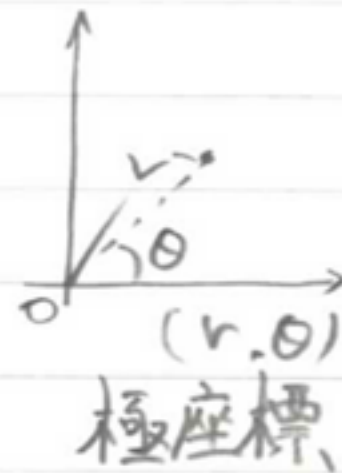
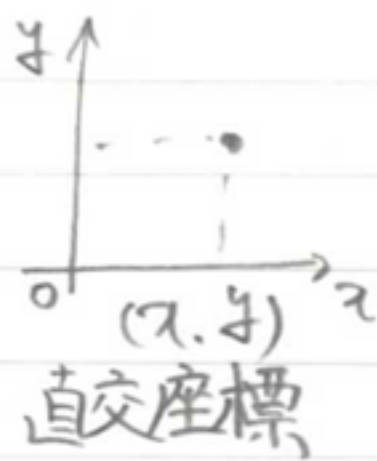
## 1.1. 位置と座標系

空間における質点の位置  
→ 座標系の導入

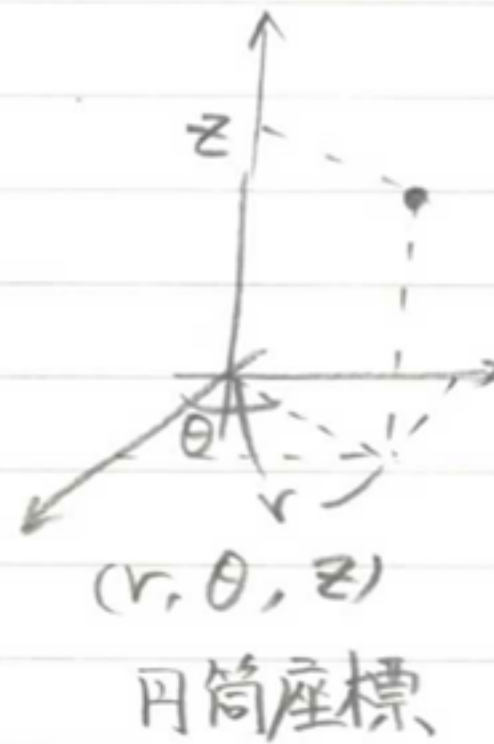
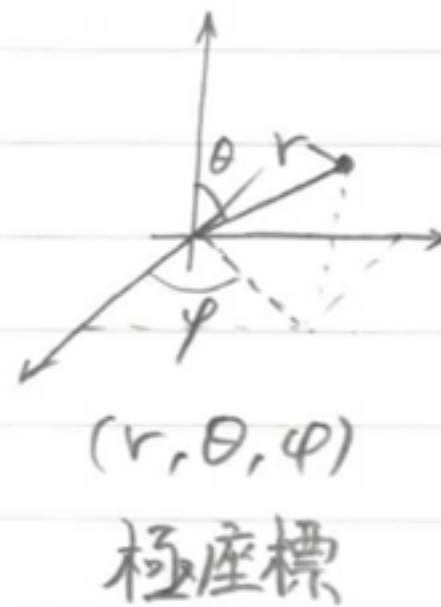
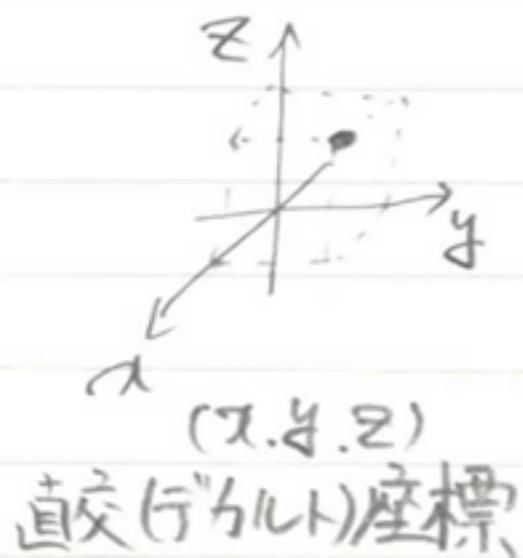
1次元座標系



2次元座標系



3次元



位置ベクトル: 原点から質点に引いた矢印

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} \quad (1.1)$$

$\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  は  $x, y, z$  方向の単位ベクトル

## 1.2 速度と加速度

質点の運動の記述 =  $r$  を時間  $t$  の関数として与えること

$$v(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{r(t+\Delta t) - r(t)}{\Delta t} = \frac{dr}{dt} \quad (1.2)$$

時間微分

を速度 (ベクトル) と定義

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \frac{dy}{dt}, \quad v_z = \frac{dz}{dt} \quad (1.3)$$

$$v = \frac{dx}{dt} i + \frac{dy}{dt} j + \frac{dz}{dt} k \quad (1.4)$$

$$速さ = |v| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} \quad (1.5)$$

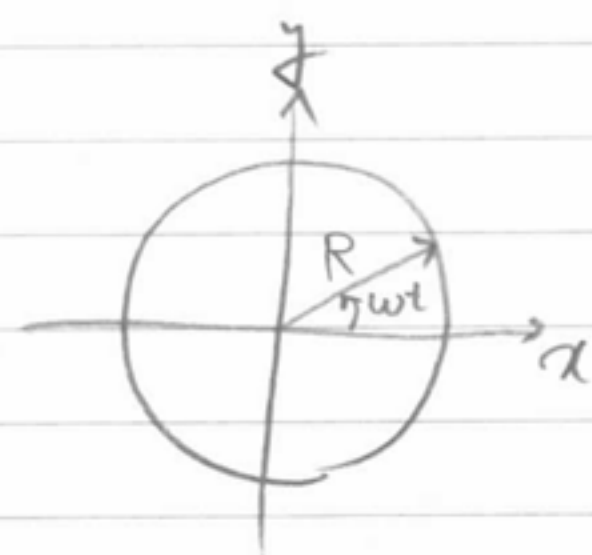
速度の単位時間あたりの変化量 = 加速度

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2r}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2} i + \frac{d^2y}{dt^2} j + \frac{d^2z}{dt^2} k \quad (1.6)$$

時間微分に (ドット)  $v = \dot{r} = \dot{x}i + \dot{y}j + \dot{z}k \quad (1.7)$

$$a = \ddot{r} = \ddot{x}i + \ddot{y}j + \ddot{z}k \quad (1.8)$$

[例題1]  
[解答]



$$\begin{cases} x(t) = R \cos(\omega t) \\ y(t) = R \sin(\omega t) \end{cases} \quad (1.9)$$

$$\begin{cases} v_x(t) = \frac{dx}{dt} = -R\omega \sin \omega t \\ v_y(t) = \frac{dy}{dt} = R\omega \cos \omega t \end{cases} \quad (1.10)$$

$$\begin{cases} a_x(t) = \frac{dv_x}{dt} = -R\omega^2 \cos \omega t \\ a_y(t) = \frac{dv_y}{dt} = -R\omega^2 \sin \omega t \end{cases} \quad (1.11)$$

$$v \cdot r = 0 \quad v \text{ は } r \text{ に垂直}$$

$$v = |v| = R\omega \quad (1.12)$$

$$a = -\omega^2 r \quad (1.13)$$

## 1.3 運動の法則

第1法則: 慣性の法則

「力を受けていない物体は加速度0の運動をする」

第2法則

質量  $m$  の物体に力  $F$  が作用するとき生じる加速度を  $a$

とすると

$$ma = F \rightarrow m \frac{d^2r}{dt^2} = F \quad (1.14)$$

ニュートンの運動方程式

2階微分方程式

→ 解の一般的形式 (一般解) は

一般に2つの積分定数 (未定な任意定数) を含む。

任意時刻における質点の位置と速度を与えると

任意定数が決定され、解が唯一に定まる。初期条件

第3法則: 2つの物体が互いに力を及ぼしあっているとき、

$$F_1 = -F_2 \quad (1.15)$$





$$\text{運動量 } \mathbf{p} = m\mathbf{v} \quad (1.16)$$

$$\text{運動方程式} \rightarrow \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F} \quad (1.17)$$

(1.17) を  $t_1$  から  $t_2$  まで積分

$$\mathbf{p}(t_2) - \mathbf{p}(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F} dt \quad (1.18)$$

右辺の量を「力積」という

運動量の変化 = 力積

速度: 座標系による

第一法則の本当の意味: 「力を受けていない物体が加速度0の運動をしていると観測される座標系が存在する」

(慣性系で話をするよ  
という前書き)

このような座標系を慣性系という。

#### 1.4 物理量の単位と次元

国際単位系 (SI)  $1s$  (秒),  $1m$  (メートル),  $1kg$  (キログラム),  $1rad$  (ラジアン)  
速度  $m/s$ , 力  $mkgs^{-2} = N$  (ニュートン)

ある物理量が長さ (Length) の  $\alpha$  乗  
質量 (Mass) の  $\beta$  乗

時間 (Time) の  $\gamma$  乗 から組み立てられる  
とき,  $[L^\alpha, M^\beta, T^\gamma]$  を次元という。

#### 1.5 重力の場における投射物体の運動

重力は物体の質量に比例

→ 比例定数を重力加速度といい  $g$  で表す。

だいたい  $g = 9.8 \text{ m/s}^2$

一様な重力の働く空間において投げ出された質点の運動  
鉛直上方に  $y$  軸,  $y$  軸と初速度を含む面内で水平方向  
を  $x$  軸,  $x, y$  軸に垂直に  $z$  軸



空気抵抗を無視すると力は

$$F_x = 0, F_y = -mg, F_z = 0 \quad (1.19)$$

運動方程式は

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = 0, m \frac{d^2y}{dt^2} = -mg, m \frac{d^2z}{dt^2} = 0. \quad (1.20)$$

$t=0$  で原点から水平と角度  $\theta$  をなす方向に初速度  $v_0$  で投げ出された  
とすると初期条件は

$$t=0 \text{ で } \begin{cases} x=0, y=0, z=0 \end{cases} \quad (1.21)$$

$$\begin{cases} v_x = v_0 \cos \theta, v_y = v_0 \sin \theta, v_z = 0 \end{cases} \quad (1.22)$$

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}(0) + \int_0^t \mathbf{a}(t) dt \quad (1.23)$$

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(0) + \int_0^t \mathbf{v}(t) dt \quad (1.24)$$

(1.23), (1.22) より

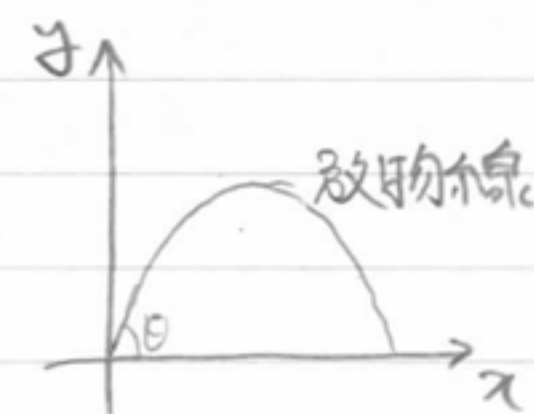
$$v_x(t) = v_0 \cos \theta, v_y(t) = -gt + v_0 \sin \theta, v_z(t) = 0 \quad (1.25)$$

(1.24), (1.21) より

$$x(t) = (v_0 \cos \theta) \cdot t, y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + (v_0 \sin \theta)t, z(t) = 0 \quad (1.26)$$

運動の軌跡(経路)は (1.26) の  $x, y$  の式から  $t$  を消去

$$y = x \tan \theta - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \theta} x^2 \quad (1.27)$$

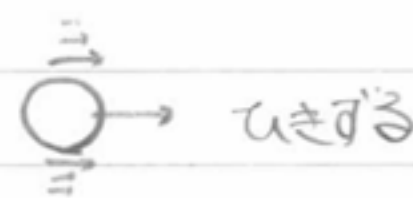


空気抵抗のある場合

抵抗力: 速度  $v$  に対しと逆方向に作用する力

= 速さに比例する「粘性抵抗」

+ (速さ)<sup>2</sup> に比例する「慣性抵抗」...  $\propto v^2$



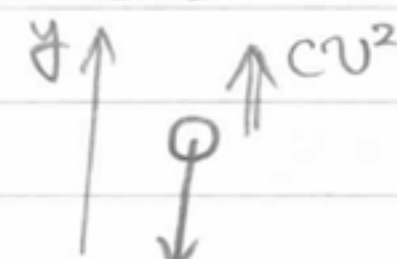
粘性の大きい流体中を小さな物体が

ゆっくり運動するとき 粘性 > 慣性

空気抵抗: 例えば直径 1cm の小球が

10cm/s の速さで浮く 慣性 > 粘性

[例題1]



[解答] 運動方程式  $m \frac{dv}{dt} = -mg + cv^2 \quad (1.28)$

最終的には抵抗力と重力が釣り合う

$$\frac{dv}{dt} = 0 \rightarrow \text{このときの速度(終端速度)} v_\infty \text{ は}$$

$$v_\infty = \sqrt{\frac{mg}{c}} \quad (1.29)$$

(1.29) を (1.28) に代入して

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{g}{v_\infty^2} (v_\infty - v)(v_\infty + v) \quad (1.30)$$

$v$  の関数

$$dt = \frac{dv}{-\frac{g}{v_\infty^2} (v_\infty - v)(v_\infty + v)}$$

$$\int dt = -\frac{v_\infty^2}{2g} \left( \frac{1}{v_\infty - v} + \frac{1}{v_\infty + v} \right) dv \quad (1.31)$$

$$t = -\frac{v_\infty}{2g} \log \left| \frac{v_\infty + v}{v_\infty - v} \right| + \underbrace{t_0}_{\text{積分定数}} \quad (1.32)$$

$$v(0) = 0 \text{ を考慮して } t_0 = 0$$

$$v_\infty > v \rightarrow \log \left| \frac{v_\infty + v}{v_\infty - v} \right| \text{ は不要}$$

$$t = -\frac{v_\infty}{2g} \log \frac{v_\infty + v}{v_\infty - v}$$

$v$  について解くと

$$v(t) = -v_\infty \frac{1 - e^{-2gt/v_\infty}}{1 + e^{-2gt/v_\infty}}$$

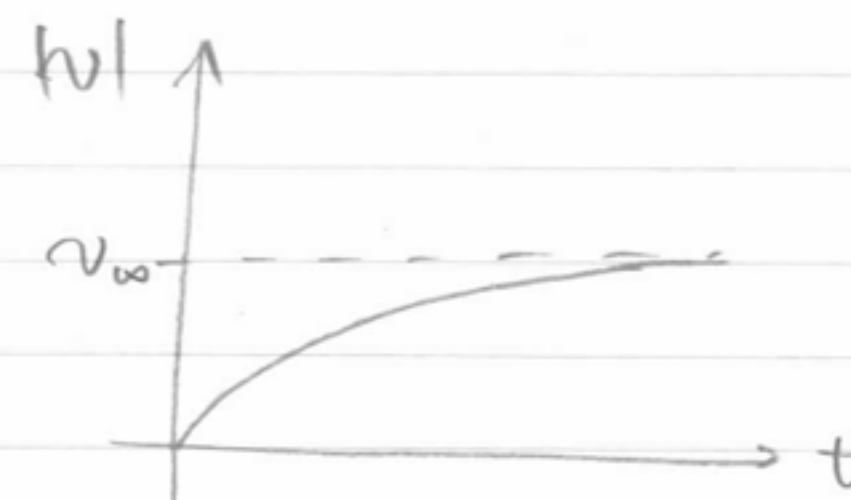
$$= -v_\infty \frac{e^{gt/v_\infty} - e^{-gt/v_\infty}}{e^{gt/v_\infty} + e^{-gt/v_\infty}}$$

$$= -v_\infty \tanh \left( \frac{gt}{v_\infty} \right) \quad (1.33)$$

ハイパーボリックタンジェント

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$$

$$(\cosh(x))' = \sinh(x), (\sinh(x))' = \cosh(x)$$





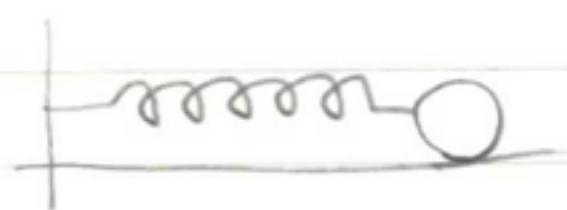
$$y(t) = \int_0^t v(t) dt$$

$$= -\frac{v_\infty^2}{g} \log \left( \cosh \left( \frac{gt}{v_\infty} \right) \right) \quad (1.34)$$

$$\tanh(x) = \frac{(\cosh(x))'}{\cosh(x)} + 1$$

$$\int \tanh(x) dx = \log(\cosh(x))$$

## 1.6 単振動



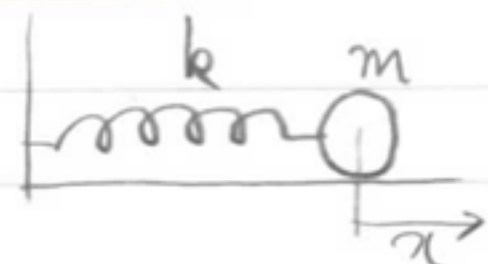
$$e^{i\theta} = \exp(i\theta) = \cos\theta + i\sin\theta$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \dots$$

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \dots$$

水平なバネの一端に固定された質点



バネを自然長から  $x$  だけ伸ばす  
と復元力が働く

$$F = -kx \quad (1.35)$$

変位

運動方程式

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx \quad (1.36)$$

両辺を  $m$  でわり

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (1.37) \quad \text{と定義する}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x \quad (1.38)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$$

定数係数、線形、齊次微分方程式

$$\frac{d^2x}{dt^2} + a_1 \frac{dx}{dt} + a_2 x = 0 \quad (1.39)$$

の解き方

$$x = e^{\alpha t} \quad \text{とおく}$$

$$x = e^{\alpha t} \quad \text{を代入し、} \\ \text{両辺に } \frac{1}{e^{\alpha t}} \text{ をかける}$$

$$\alpha^2 + a_1 \alpha + a_2 = 0 \quad (1.40)$$

(1.40) の  $\alpha$  が重根を持たず  $\alpha_1, \alpha_2$  という異なる解が

得られる場合、(1.39) の一般解は

$$x = Ae^{\alpha_1 t} + Be^{\alpha_2 t} \quad (1.41)$$

2個の任意定数を含む

(1.38) に適用

$$a_1 = 0, a_2 = \omega^2 \rightarrow \alpha = \pm i\omega$$

一般解は

$$x = Ae^{i\omega t} + Be^{-i\omega t} \quad (1.42)$$

$x$  は実数なので

$$x = i(A-B) \sin(\omega t) + (A+B) \cos(\omega t)$$

$$B = A^* \quad (\text{複素共役})$$

$$= C_1 \sin(\omega t) + C_2 \cos(\omega t) \quad (1.43)$$

と書いた方が便利

$$(1.43) = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} \left( \frac{C_1}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}} \sin(\omega t) + \frac{C_2}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}} \cos(\omega t) \right)$$

$$= A \cos(\omega t + \alpha) \quad (1.44)$$

(1.44) の  $A, \alpha$  (1.43) の  $C_1, C_2$  は任意定数



(1.43), (1.44)で記述される運動を単振動, 調和振動という.

$\omega$ : 角振動数,  $A$ : 振幅  $\omega t + \alpha$ : 位相  $\alpha$ : 初期位相

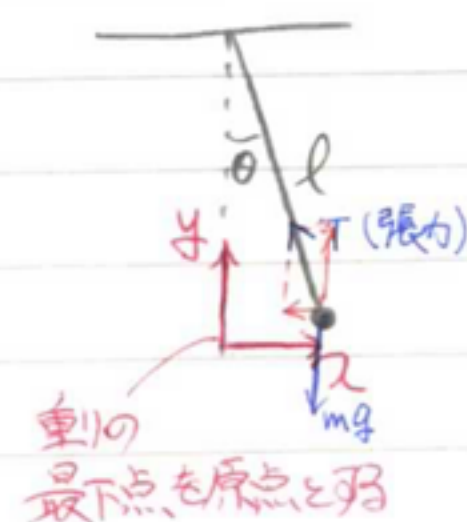
2つの任意定数  $\rightarrow$  初期条件から決まる

例えば  $t=0$  において  $x=x_0, \frac{dx}{dt}=0$

$$(1.44) \text{で } A=x_0, \alpha=0$$

$$\rightarrow x(t)=x_0 \cos(\omega t) \quad (1.45)$$

### 1.7 単振り子



運動方程式

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -T \sin \theta, \quad m \frac{d^2 y}{dt^2} = T \cos \theta - mg \quad (1.46)$$

$$x = l \sin \theta, \quad y = l(1 - \cos \theta) \quad (1.47)$$

$|\theta| \ll 1$  と考える

$$\sin \theta \approx \theta - \frac{1}{6} \theta^3 + \dots$$

$$\cos \theta \approx 1 - \frac{1}{2} \theta^2 + \dots$$

$$\sin \theta \approx \theta, \quad \cos \theta \approx 1 \quad (\theta^2 \text{以上を無視})$$

$$(1.47) \rightarrow x = l\theta, \quad y = 0 \quad (1.48)$$

$$(1.46) \rightarrow m l \frac{d^2 \theta}{dt^2} = -T\theta \quad 0 = T - mg$$

$$\rightarrow \frac{d^2 \theta}{dt^2} = -\omega^2 \theta \quad (1.50) \quad \omega = \sqrt{\frac{g}{l}} \quad (1.51)$$

(1.50)は単振動の運動方程式と同じ形  
だから, 一般解は

$$\theta = \theta_0 \cos(\omega t + \alpha) \quad (1.52)$$

$\theta_0, \alpha$ は任意定数

### 1.8 減衰振動と強制振動

#### 1.8.1 減衰振動

1.6で考えた問題 + 速度に比例する抵抗力 (減衰力)



運動方程式

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx - c \frac{dx}{dt} \quad (1.53)$$

両辺を  $m$  で割って整理

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0 \quad (1.54)$$

$$\text{ただし } \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (1.55) \quad (\text{減衰なしときの角振動数})$$

$$\gamma = \frac{c}{2m} \quad (1.56) \quad (\text{減衰を表す定数})$$

$$x = e^{\alpha t} \quad (1.57)$$

を (1.54) に代入

$$\alpha^2 + 2\gamma\alpha + \omega_0^2 = 0 \quad (1.58)$$

$$\text{よって } \alpha = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} \quad (1.59)$$



(1)  $\gamma < \omega_0$  のとき: 減衰振動

$$\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} \quad (1.60)$$

と定義すると  $\alpha = -\gamma \pm i\omega_1$

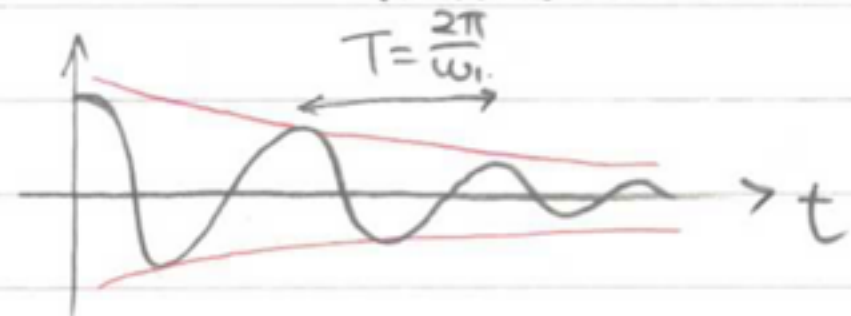
$$\text{一般解は } x(t) = C_1 e^{(-\gamma + i\omega_1)t} + C_2 e^{(-\gamma - i\omega_1)t}$$

$$= e^{-\gamma t} \{ (C_1 + C_2) \cos(\omega_1 t) + i(C_1 - C_2) \sin(\omega_1 t) \}$$

$$= e^{-\gamma t} \{ A \sin(\omega_1 t) + B \cos(\omega_1 t) \} \quad (1.61)$$

$A, B$  は任意定数  $\rightarrow$  時間とともに振幅減衰

$\frac{\gamma}{\omega_1} = \frac{1}{Q}$  は時間次元  $\rightarrow$  時定数といふ。  $T$  だけ時間が経つと、  
振幅は  $\frac{1}{e}$  になる。



(2)  $\gamma > \omega_0$  のとき: 過減衰

$$\rho = \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} \quad (1.62)$$

と定義すると 一般解は

$$x(t) = e^{-\gamma t} (A e^{\rho t} + B e^{-\rho t}) \quad (1.63)$$

$\rightarrow$  振動せずに減衰する

$e^{(-\gamma - \rho)t} \rightarrow$  速く減衰

$e^{(-\gamma + \rho)t}$   $-\gamma + \rho = -\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$   
 $=$  小さい負  $\rightarrow \omega_0 < \gamma$  と減衰  
 (特に  $\gamma \gg \omega_0$  のとき)

(3)  $\gamma = \omega_0$  の場合: 臨界減衰

$x = e^{-\gamma t}$  がしか解は得られない  
 $\rightarrow$  一般解をつけない

$$x = e^{-\gamma t} u(t) \quad (1.64)$$

とて方程式に代入

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + (\omega_0^2 - \gamma^2) u = 0 \quad (1.65)$$

かつ  $\omega_0 = \gamma$  なので

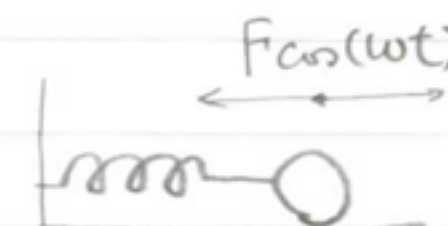
$$u = At + B \quad (1.66)$$

$$\text{一般解は } x(t) = e^{-\gamma t} (At + B) \quad (A, B: \text{任意定数}) \quad (1.67)$$

臨界減衰: 振動せずに減衰する  
 $\rightarrow$  最も減衰が速い

### 1.8.2 強制振動

周期的な外力  $F \cos(\omega t)$  を受ける質点の振動。  
 減衰力も考慮。



$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx - c \frac{dx}{dt} + F \cos(\omega t) \quad (1.68)$$

両辺を  $m$  で割って  $f = \frac{F}{m}$  とし

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = f \cos(\omega t) \quad (1.69)$$

非斉次



$$\left(\frac{d^2}{dt^2} + a_1 \frac{d}{dt} + a_2\right)x_1 = F(t) \quad : x_1 \text{ は非斉次方程式の解 (特解)}$$

$$+ \left(\frac{d^2}{dt^2} + a_1 \frac{d}{dt} + a_2\right)x_2 = 0 \quad : x_2 \text{ は斉次方程式の一般解}$$

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} + a_1 \frac{d}{dt} + a_2\right)(\underbrace{x_1 + x_2}_{\text{一般解}}) = F(t) \quad \text{2つの任意定数を含む}$$

(1.69) の特解を求める.

$$x(t) = a \sin(\omega t) + b \cos(\omega t) \quad (1.70)$$

(a, b は定数) の形を仮定してみる.

(1.70) を (1.69) に代入して整理

$$\begin{aligned} \{(\omega_0^2 - \omega^2)a - 2\gamma\omega b\} \sin(\omega t) + \{2\gamma\omega a + (\omega_0^2 - \omega^2)b\} \cos(\omega t) \\ = f \cos(\omega t) \quad (1.71) \end{aligned}$$

(1.71) が任意の  $t$  で成立するために

$$(\omega_0^2 - \omega^2)a - 2\gamma\omega b = 0 \quad (1.72)$$

$$2\gamma\omega a + (\omega_0^2 - \omega^2)b = f \quad (1.73)$$

$$a = \frac{2\gamma\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\gamma\omega)^2} f \quad (1.74)$$

$$b = \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\gamma\omega)^2} f \quad (1.75)$$

$\gamma < \omega_0$  のとき, (1.69) の一般解は上の特解に減衰振動の一般解 (1.61) を足したものである.

$$x(t) = e^{-\gamma t} (A \sin(\omega t) + B \cos(\omega t)) + a \sin(\omega t) + b \cos(\omega t) \quad (1.76)$$

a, b は (1.74) (1.75) で与えられる定数, A, B は任意定数

例:  $\omega = \omega_0$  か  $\gamma \ll \omega_0$  の場合を考える.

$t=0$  で  $x=0$  に静止

$$a = \frac{f}{2\gamma\omega_0}, \quad b = 0$$

$$x(0) = 0 \rightarrow B = 0, \quad v(0) = 0 \rightarrow A = -\frac{\omega_0}{\omega_1} a \approx -a$$

$$x(t) = \frac{f}{2\gamma\omega_0} (1 - e^{-\gamma t}) \sin(\omega_0 t) \quad (1.77) \quad \rightarrow \text{図2(左)}$$

(1.76) より, 時間が経過すると, 初期条件から決まる A, B を含む項は消え, 外力と同じ角振動数の振動 (1.70) のみ残る.  $\rightarrow$  強制振動.

(1.70) は,

$$x(t) = \frac{f}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\gamma\omega)^2}} \cos(\omega t - \delta) \quad (1.78) \quad \text{位相のズレ}$$

$$\delta = \tan^{-1} \frac{2\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad (1.79) \quad \text{と変形できる.}$$

(1.78) は  $\omega = \omega_0$  で振幅最大  $\rightarrow$  共鳴, 共振  $\rightarrow$  図2右.



## 第2章 仕事とエネルギー

## 2.1 仕事

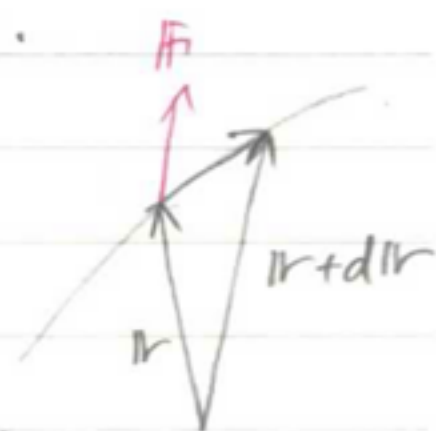
質点が力  $F$  を受けて  $d\mathbf{r} = (dx, dy, dz)$  だけ変位したとき、

内積

$$dW = F \cdot d\mathbf{r}$$

$$= |F| |d\mathbf{r}| \cos \theta$$

$$= F_x dx + F_y dy + F_z dz \quad (2.1) \text{を力 } F \text{ のした仕事と定義}$$



質点が軌跡  $C$  に沿って  $A$  点から  $B$  点まで移動する間に  
力  $F$  がした仕事  $W_{AB}$  は

$$W_{AB} = \int_C F \cdot d\mathbf{r} = \lim_{\Delta r_i \rightarrow 0} \sum_i F \cdot \Delta \mathbf{r}_i \quad (2.2)$$

このように、ある曲線に沿って行う積分を線積分という。

$A \rightarrow B$  の経路に依り  
一般に異なる

単位時間あたりの仕事

$$P = \frac{dW}{dt} = F \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} = F \cdot \mathbf{v} \quad (2.3) \quad \text{仕事率}$$

1 N の力が 1 m の変位を引き起こしたときの仕事は 1 J

1 s に 1 J の仕事をすると仕事率は 1 W とする。

## 2.2 仕事と運動エネルギー

運動方程式  $m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = F \quad (2.4)$

(2.4) の両辺と  $\mathbf{v}$  の内積をとる

$$m \mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt} = F \cdot \mathbf{v} \quad (2.5)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} m v^2 \right) = F \cdot \mathbf{v} \quad (2.6)$$

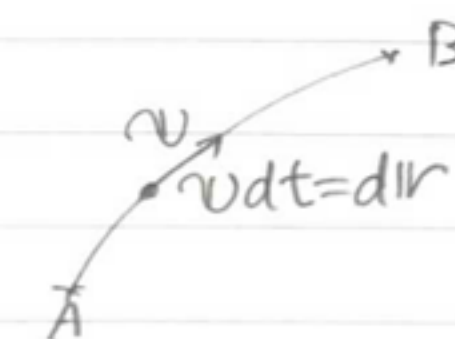
$v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$

$A, B$  における時刻と速度を  $t_A, v_A, t_B, v_B$  とする。

(2.6) を  $t_A$  から  $t_B$  まで積分すると

$$\frac{1}{2} m v_B^2 - \frac{1}{2} m v_A^2 = \int_{t_A}^{t_B} F \cdot \underbrace{\mathbf{v} dt}_{d\mathbf{r}}$$

$$= \int_C F \cdot d\mathbf{r} \quad (2.7)$$



左辺の  $\frac{1}{2} m v^2$  を運動エネルギーという。

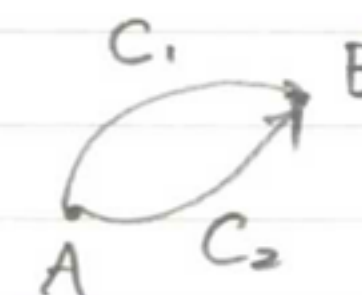
運動エネルギーの変化は質点に働く力が  
した仕事に等しい

## 2.3 保存力

空間のある点に位置している質点に作用する力  $F$  が  
位置ベクトル  $\mathbf{r}$  の関数として一意に定義できるとする。

このような空間を「力場」という。

一般に仕事 (2.2) は  $A$  から  $B$  の経路  $C$  によって異なる。



[例題] → プリント No. 5

[解答]

$C_1$  上では  $y = x \tan \alpha$ ,  $F_x = ax$ ,  $F_y = by$

$$W_{C_1} = \int_{C_1} F \cdot d\mathbf{r} = \int_{C_1} (F_x dx + F_y dy)$$

$$= \int_{C_1} (ax dx + by dy)$$

$$= \int_0^l ax dx + \int_0^l by dy$$

$$= \frac{1}{2} (a + b) l^2 \quad (2.8)$$

$C_2$  上

$x$  軸上では  $F_x = 0$ ,  $F_y = by$

$$\int_{x \text{ 軸上}} (F_x dx + F_y dy) = \int_0^l 0 dx + \int_0^0 by dy = 0 \quad (2.9)$$



$x=l$  上で  $F_x = ay, F_y = bl$

$$\int_{x=l}^l (F_x dx + F_y dy) = \int_l^l ay dx + \int_0^l bldy$$
$$= bl^2 \quad (2.10)$$

$\therefore W_{C_1} = bl^2$

一般に  $W_{C_1} \neq W_{C_2}$

力場の例

一様な重力場

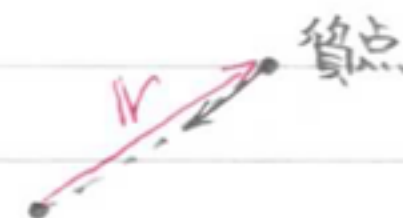
$(F_x, F_y, F_z) = (0, 0, -mg) \quad (2.11)$

$$W_{AB} = \int_C (F_x dx + F_y dy + F_z dz)$$
$$= \int_{z_A}^{z_B} (-mg) dz = -mg(z_B - z_A) \quad (2.12)$$

始点と終点の  
高さの差のみに依存  
→ 途中経路に依らない

中心力: 質点に作用する力外、定点と質点を結ぶ直線上  
にあり、力の大きさが、定点と質点の間の距離の関数

例  $(F_x, F_y, F_z) = (-kx, -ky, -kz) = -kr \quad (2.13)$



$A(x_A, y_A, z_A)$   $B(x_B, y_B, z_B)$

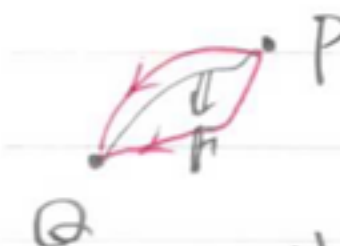
$$W_{AB} = \int_C (-kx dx - ky dy - kz dz)$$
$$= -k \int_{x_A}^{x_B} x dx - k \int_{y_A}^{y_B} y dy - k \int_{z_A}^{z_B} z dz$$
$$= \frac{k}{2} (r_A^2 - r_B^2) \quad (2.14) \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

力場の仕事が途中の経路に依らず、始点と終点のみで決まる場合、この力場を「保存力場」、力を「保存力」という。

## 2.4 ポテンシャル(位置)エネルギー

保存力場を考える。任意の点Pから基準点Qまで質点が移動するとき、保存力がする仕事を点Pのポテンシャルエネルギーという。

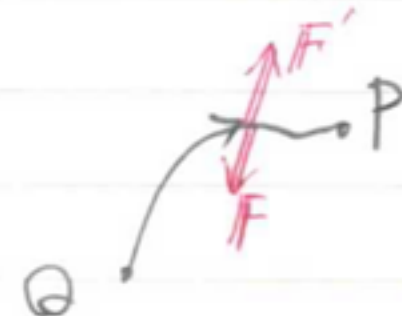
$$U_P = W_{PQ} = \int_P^Q \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = - \int_Q^P \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \quad (2.17)$$



経路に依らない

運動エネルギーなし

基準点QからPまでゆっくりと移動させるには保存力と反対向きのもう一つの力  $\mathbf{F}' = -\mathbf{F}$  を加える必要がある。



(2.17)より

$$U_P = \int_Q^P \mathbf{F}' \cdot d\mathbf{r} \quad (2.18)$$

(2.18)の意味:

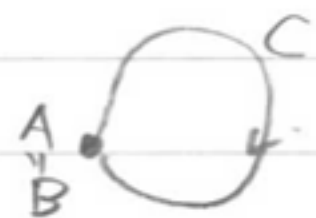
ポテンシャルエネルギーは質点を基準点Qから点Pまで運ぶのに、保存力に加えて外から加えた力が必要仕事。

仕事をポテンシャルエネルギーを用いて表す

$$W_{AB} = \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_A^Q \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_Q^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$
$$= \int_A^Q \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} - \int_B^Q \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = U_A - U_B \quad (2.19)$$



特に、 $A=B$  のときは



$$W_{AB} = 0$$

これを  $\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$  (2.20) と書く

→  $\mathbf{F}$  が保存力であるための必要十分条件

ポテンシャルエネルギーの例

重力場

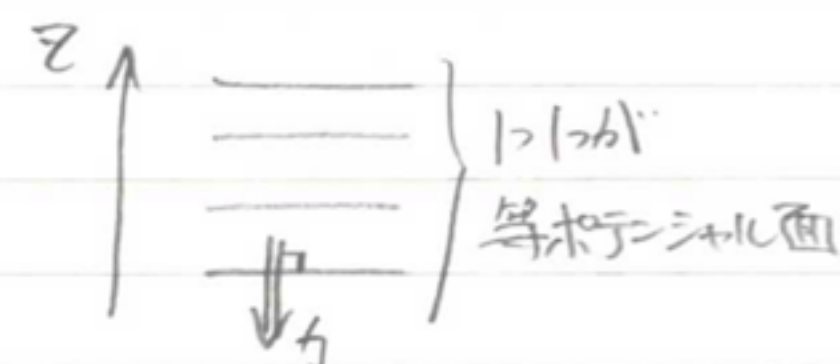
基準点を  $z=0$  の面内にとる

(2.12) において  $z_A = z$ ,  $z_B = 0$  と取ると

$$U(x, y, z) = mgyz \quad (2.21)$$

$z = \text{一定}$  ならばポテンシャルエネルギーは一定。

これを等ポテンシャル面という。



弾性力 (バネ)

基準点を原点にとると、(2.14) において  $r_A = r$ ,  $r_B = 0$

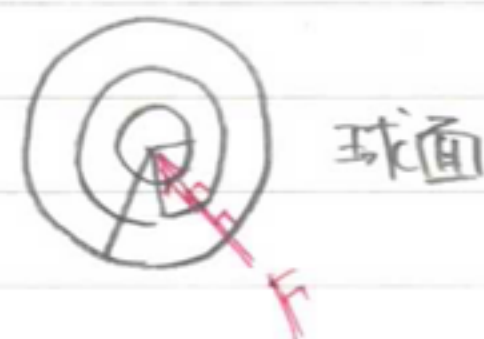
とて

$$U(x, y, z) = \frac{1}{2}kr^2 = \frac{1}{2}k(x^2 + y^2 + z^2) \quad (2.22)$$

特に一次元のとき

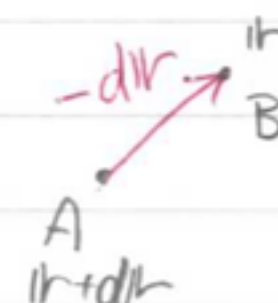
$$U(x) = \frac{1}{2}kx^2 \quad (2.23)$$

三次元のときの等ポテンシャル面



保存力をポテンシャルエネルギーを用いて表す。

(2.19) で  $B=r$ ,  $A=r+dr$



$$U(r+dr) - U(r) = W_{AB}$$

$$= \mathbf{F} \cdot (-d\mathbf{r}) = -\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \quad (2.24)$$

例えば  $d\mathbf{r} = (dx, 0, 0)$  とて (2.24) を書くと

$$U(x+dx, y, z) - U(x, y, z) = -F_x dx$$

$$\text{すなわち } F_x = \frac{U(x+dx, y, z) - U(x, y, z)}{dx} \quad (2.25)$$

一般に、多変数関数に対して、一つの変数のみを変化させ、それ以外の変数を固定して (定数とみなして) 行う微分を偏微分という。

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x} \quad (2.26)$$

同様に、

$$F_y = -\frac{\partial U}{\partial y}, \quad F_z = -\frac{\partial U}{\partial z} \quad (2.27)$$

これらをまとめて、

$$\mathbf{F} = -\text{grad } U \quad \text{すなわち } \mathbf{F} = -\nabla U \quad (2.28)$$

gradient

$$= \left( -\frac{\partial U}{\partial x}, -\frac{\partial U}{\partial y}, -\frac{\partial U}{\partial z} \right)$$

ここで  $\nabla$  (ナブラ) は

$$\nabla = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \quad (2.29)$$



$$(2.24) \quad U(r+dr) - U(r) = -F \cdot dr$$

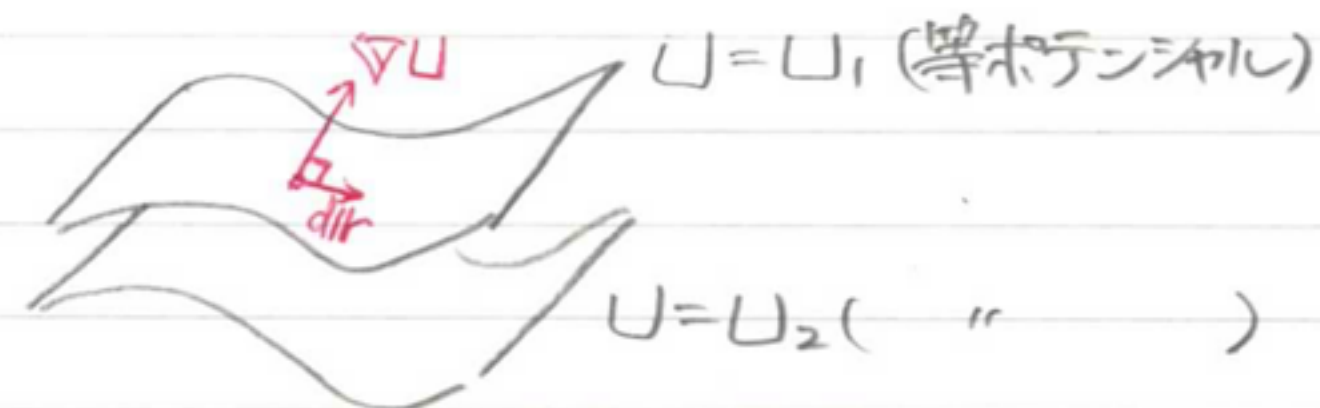
は (2.28) を用いると、

$$U(r+dr) - U(r) = \nabla U \cdot dr \quad (2.30)$$

(2.30) の左辺が 0 になるとき ( $dr$  だけ移動しても  $U$  が変化しない)

$$\nabla U \cdot dr = 0 \quad \text{すなわち } \nabla U \text{ と } dr \text{ は垂直}$$

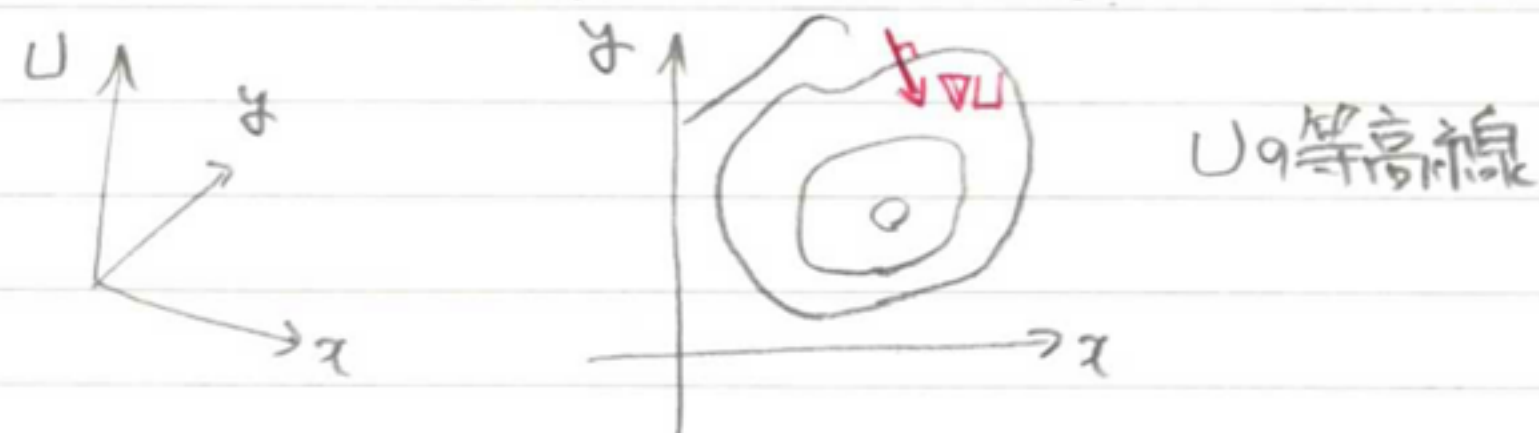
→  $\nabla U$  (すなわち  $F$  も) は等ポテンシャル面に対して垂直



逆に  $dr \parallel \nabla U$  の方向は  $U$  の変化の最も大きい方向 (平行)

$$(2.30) \text{ の右辺 } \nabla U \cdot dr = |\nabla U| |dr| \underbrace{\cos \theta}_1$$

$U(x, y, z) \rightarrow U(x, y)$  とて描いてみる



$\nabla U$ ,  $\text{grad } U$  を「こう西己」いう。

## 2.5 力学的エネルギー保存則

(2.7) で  $F$  を保存力  $F_c$  と非保存力  $F'$  に分ける。

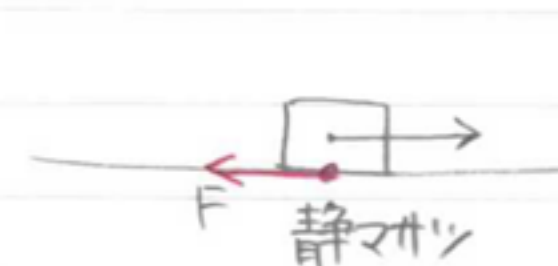
$$\frac{1}{2} m v_B^2 - \frac{1}{2} m v_A^2 = \underbrace{\int_A^B F_c \cdot dr}_{(2.19) \rightarrow W_{AB} = U_A - U_B} + \int_A^B F' \cdot dr \quad (2.31)$$

$$\left( \frac{1}{2} m v_B^2 + U_B \right) - \left( \frac{1}{2} m v_A^2 + U_A \right) = \int_A^B F' \cdot dr \quad (2.32)$$

運動エネルギーとポテンシャルエネルギーの和を力学的エネルギーという。

非保存力が無いと、力学的エネルギーは保存する。  
→ 力学的エネルギー保存則

## 2.6 非保存力の例：摩擦力



静止摩擦  
限界値  $F_m$  あり。

$$F_{\text{静摩擦}} \leq F_m = \mu N \quad (2.33)$$

$N$  は床から受ける垂直抗力  
 $\mu$  は静止摩擦係数

力が  $F_m$  を超えると、物体は動き出す。そのときの摩擦を動摩擦

$$F_{\text{動摩擦}} = \mu' N \quad (2.34) \quad \mu' \text{ は動摩擦係数}$$

動摩擦力の方向は速度と反対

$$F_{\text{動摩擦}} = -\mu' N \frac{v}{|v|} \quad (2.35)$$

力の場ではない





一つの水平面上を軌道Cに沿ってAからBまで動く質点を考える。  
Nは一定。

$$\begin{aligned}
 W_{AB} &= \int_C \mathbf{F}_{\text{摩擦}} \cdot d\mathbf{r} = -\mu N \int_C \frac{v}{|v|} \cdot v dt \\
 &= -\mu N \int_C |v| dt \\
 &= -\mu N S_{AB} < 0 \quad (2.36)
 \end{aligned}$$

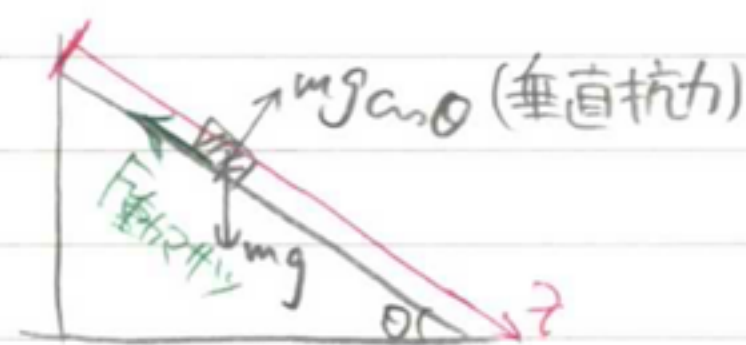


A=Bのとき  $S_{AB} > 0$  である以上、  
 $W_{AB} \neq 0$  である。

$$\oint_C \mathbf{F}_{\text{摩擦}} \cdot d\mathbf{r} \neq 0 \quad (2.37)$$

保存力ではない

例



$$F_{\text{摩擦}} = -\mu' mg \cos \theta \quad (2.38)$$

$x=0$  を基準

重力のポテンシャルエネルギーは  $U(x) = -mgx \sin \theta$

(2.32)は

$$\left( \frac{1}{2} m v_B^2 - mg x_B \sin \theta \right) - \left( \frac{1}{2} m v_A^2 - mg x_A \sin \theta \right)$$

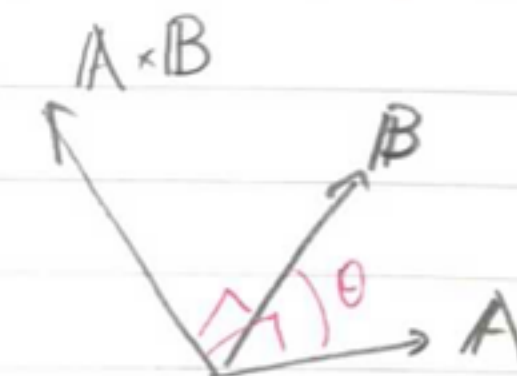
$$= -mg \mu' (x_B - x_A) \cos \theta \quad (2.39)$$

摩擦の仕事(負) → 力学的エネルギーは減少  
→ 熱になっている

### 第3章 万有引力による運動

#### 3.1 角運動量

ベクトル積(外積) → プリント No. 6



質点の位置ベクトル  $\mathbf{r}$  と運動量  $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$  との  
ベクトル積

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} \quad (3.1)$$

を原点まわりの質点の角運動量と定義  
(原点は慣性系)



$$\mathbf{r} \times \mathbf{p} \neq 0$$

O 点まわりの回転

質点に働く力を  $\mathbf{F}$  とするとき、

$$\mathbf{N} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \quad (3.2)$$

を原点まわりの力モーメントと定義

(3.1) を時間で微分

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{p} + \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{p}}{dt} \quad (3.3)$$

積の微分は"外積"の順番に注意

プリント No. 6 (51から56まで)

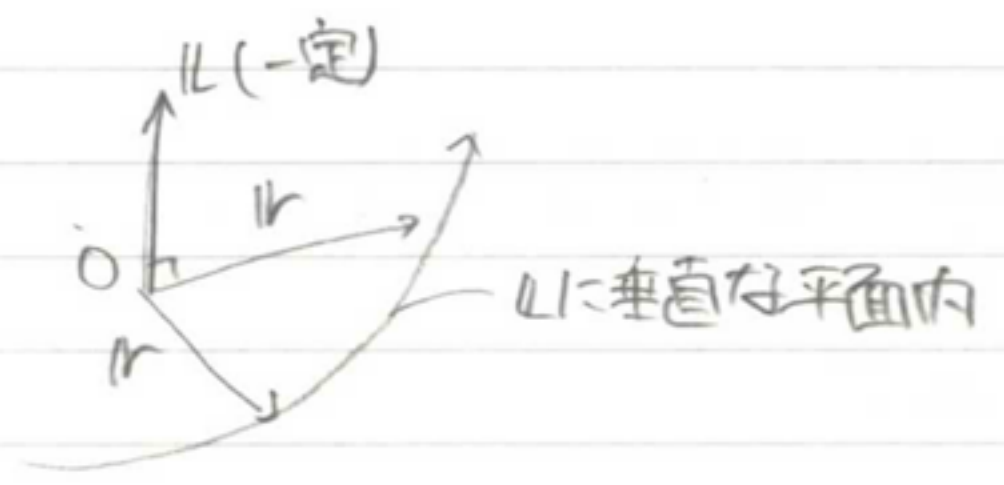


$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{v} \quad \text{と} \quad \mathbf{L} = m\mathbf{v} \text{は平行} \rightarrow \text{ベクトル積} 0$$

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{N} \quad (3.4)$$

$\mathbf{N} = 0$  ならば  $\mathbf{L}$  は変化しない。  
→ 角運動量保存則

質点は原点を通り、定ベクトル  $\mathbf{L}$  に垂直な平面内で運動



このとき、位置ベクトル  $\mathbf{r}$  がこの平面内で  $dt$  の間に掃く面積は

$$dS = \frac{1}{2} |\mathbf{r} \times \mathbf{v} dt| \quad (3.5)$$



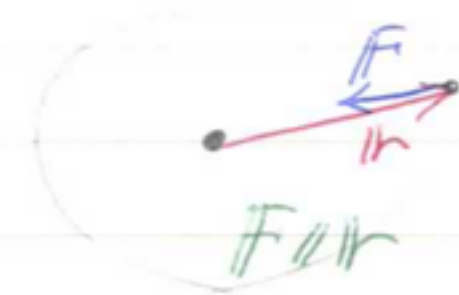
$$dS = \frac{1}{2} |\mathbf{r}| |\mathbf{v} dt| \sin\varphi = \frac{1}{2} |\mathbf{r} \times \mathbf{v} dt|$$

$$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2m} |\mathbf{r} \times \mathbf{p}| = \frac{|\mathbf{L}|}{2m} \quad (3.6)$$

面積速度

→ 今の場合、面積速度一定

### 3.2 平面運動の極座標表示

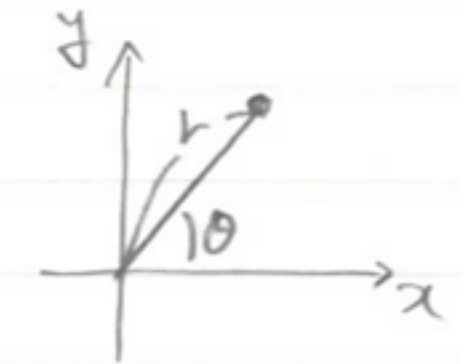


中心力 ⇒ 力のモーメント  $\mathbf{r} \times \mathbf{F} = 0$

→ 角運動量一定

→ 平面内の運動

平面 (2次元) の直交座標  $(x, y)$  と極座標  $(r, \theta)$  の関係



$$x = r \cos\theta, \quad y = r \sin\theta \quad (3.7)$$

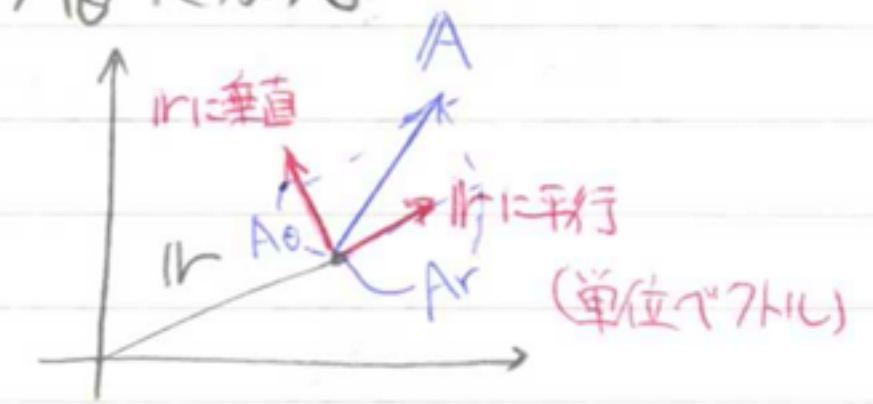
任意のベクトル  $\mathbf{A} = A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j}$  を考える

$\mathbf{i}$  方向の単位ベクトル

$\mathbf{A}$  を極座標で、動径成分  $A_r$  と方位角成分  $A_\theta$  に分ける

$$\mathbf{A} = A_r \mathbf{e}_r + A_\theta \mathbf{e}_\theta \quad (3.8)$$

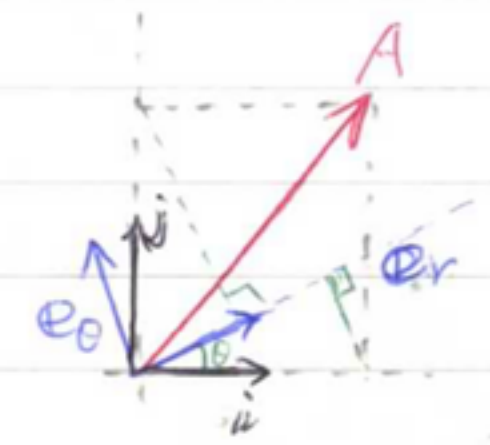
方向が時間とともに変化



ここで、

$$\left. \begin{aligned} A_r &= A_x \cos\theta + A_y \sin\theta \\ A_\theta &= -A_x \sin\theta + A_y \cos\theta \end{aligned} \right\} (3.9)$$

の関係がある



$\mathbf{A}$  として速度  $\mathbf{v}$  を考える。

$$\left. \begin{aligned} v_x &= \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(r \cos\theta) = \dot{r} \cos\theta - r \dot{\theta} \sin\theta \\ v_y &= \frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}(r \sin\theta) = \dot{r} \sin\theta + r \dot{\theta} \cos\theta \end{aligned} \right\} (3.10)$$

(3.10) を (3.9) に代入

$$v_r = \dot{r}, \quad v_\theta = r \dot{\theta} \quad (3.11)$$



同様に  $A$  として加速度  $a$  を考える

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2, \quad a_\theta = 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} = \frac{1}{r} \frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) \quad (3.12)$$

力  $\vec{F} = F_r \vec{e}_r + F_\theta \vec{e}_\theta$  を考えて  
極座標で運動方程式を書く

$$m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = F_r \quad (3.13)$$

$$m \cdot \frac{1}{r} \frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) = F_\theta \quad (3.14)$$

中心力の場合、 $F_\theta = 0$  なので、 $r^2\dot{\theta} = (\text{一定})$

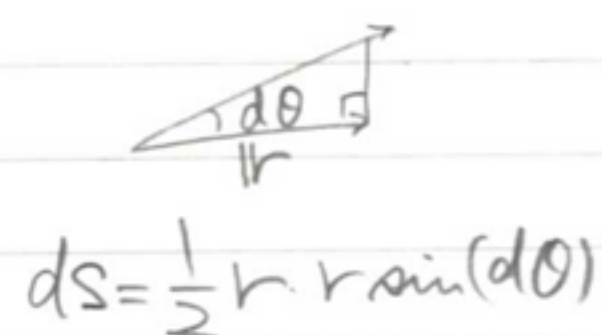
実は (3.5) の  $dS$  は

$$dS = \frac{1}{2} r^2 \sin(d\theta)$$

$$\textcircled{1.7\text{倍}} \quad \approx \frac{1}{2} r^2 d\theta \quad (3.15)$$

$$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\theta} \quad (3.16)$$

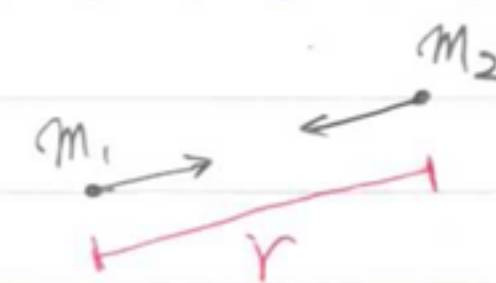
→ 面積速度一定



### 3.3 万有引力

2つの質点の間に作用する力は、互いに相手の  
質点の方向を向いて、大きさは各質点の質量に比例。

$$F = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \quad (3.17)$$



$$G = 6.673 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 / \text{kg}^2$$

この力のポテンシャルエネルギーは  
質点が無限に離れている場合を基準にとり、

$$U(r) = - \int_{\infty}^r \left( -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \right) dr = -G \frac{m_1 m_2}{r} \quad (3.18)$$

惑星と太陽を質量が  $m$  と  $M$  の質点と考え、  
太陽は静止していると考えた場合の運動方程式は、

ケプラーに重い



$$m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = -G \frac{Mm}{r^2} \quad (3.19)$$

$$m \cdot \frac{1}{r} \frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) = 0 \quad (3.20)$$

### 3.4 ケプラーの法則

(3.20) → 面積速度一定；ケプラーの第二法則

$$r^2 \dot{\theta} = h \text{ (定数)} \quad (3.21)$$

とおく。

(3.21) を (3.19) に代入

$$\ddot{r} - \frac{h^2}{r^3} = -\frac{GM}{r^2} \quad (3.22)$$

ここでは  $r(t)$  を求めるのではなく  $r$  と  $\theta$  の関係  
すなわち軌道の形だけを求める。



$$\dot{r} = \frac{dr}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \frac{dr}{d\theta} \dot{\theta} \stackrel{(3.21)}{=} \frac{h}{r^2} \frac{dr}{d\theta} \quad (3.23)$$

(3.21)

$$\ddot{r} = \frac{d}{d\theta} \left( \frac{h}{r^2} \frac{dr}{d\theta} \right) \dot{\theta} = \frac{h}{r^2} \frac{d}{d\theta} \left( \frac{h}{r^2} \frac{dr}{d\theta} \right) \quad (3.24)$$

(3.24) を (3.22) に代入して両辺に  $\frac{r^2}{h^2}$  をかけると

$$\frac{d}{d\theta} \left( \frac{1}{r^2} \frac{dr}{d\theta} \right) - \frac{1}{r} = -\frac{1}{e} \quad (3.25)$$

$$\therefore \text{" } l = \frac{h^2}{GM} \quad (3.26)$$

$$\therefore \text{" } r = \frac{1}{u} \text{ とおく}$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{dr}{d\theta} = u^2 \frac{d}{d\theta} \left( \frac{1}{u} \right) = -\frac{du}{d\theta} \quad (3.27)$$

$$\text{すなわち} \quad (3.25) \rightarrow \frac{d^2 u}{d\theta^2} + u = \frac{1}{e} \quad (3.28)$$

(3.28) は

$$\frac{d^2}{d\theta^2} \left( u - \frac{1}{e} \right) + \left( u - \frac{1}{e} \right) = 0$$

一般解は

$$u - \frac{1}{e} = A \cos(\theta - \alpha) \quad \therefore A, \alpha \text{ は任意定数}$$

 $lA = e$  とおくと

$$u(\theta) = \frac{1}{e} \{ 1 + e \cos(\theta - \alpha) \} \quad (3.29)$$

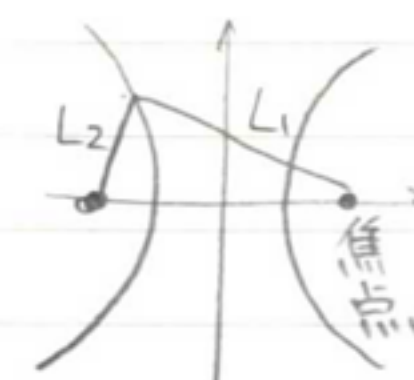
すなわち

$$r(\theta) = \frac{l}{1 + e \cos(\theta - \alpha)} \quad (3.30)$$

円錐曲線  $\rightarrow$  プリント No. 7

$$\frac{\left( x + \frac{e\ell}{1-e^2} \right)^2}{\frac{\ell^2}{(1-e^2)^2}} + \frac{y^2}{\frac{\ell^2}{1-e^2}} = 1 \quad \left( \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \right)$$

楕円

 $L_1 + L_2 = \text{一定}$  $|L_1 - L_2| = \text{一定}$ 

双曲線

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

惑星の軌道は  $r$  が有限だから $e < 1$  であり、楕円軌道  $\rightarrow$  ケプラーの第一法則太陽を焦点の一つとする  
(原点)

運動の周期

楕円の面積  $\pi ab$ 面積速度  $h/2$ 

$$\therefore \text{周期 } T = \frac{2\pi ab}{h} \quad (3.31)$$

$$a = \sqrt{al} \quad (70) \rightarrow \text{No. 7(4)} \quad , \quad h^2 = lGM \quad (3.26)$$

$$\therefore (3.31) \text{ より } T^2 = \frac{4\pi^2}{GM} a^3 \quad (3.32)$$

周期の2乗は長半径の3乗に比例

 $\rightarrow$  ケプラーの第三法則



力学的エネルギー

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - G\frac{Mm}{r} \quad (3.33)$$

速度の極座標表示

$$v^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 \stackrel{(3.23)}{=} \left(\frac{h}{r^2} \frac{dr}{d\theta}\right)^2 + \left(r \cdot \frac{h}{r^2}\right)^2 \stackrel{(3.21)}{=} \left(h \frac{du}{d\theta}\right)^2 + (hu)^2 \quad (3.34)$$

(3.34)を(3.33)に代入, (3.26)を用いて

$$E = \frac{mh^2}{2} \left\{ \left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + u^2 - \frac{2u}{l} \right\} \quad (3.35)$$

これに(3.29)を代入して  $E = \frac{mh^2}{2l^2} (e^2 - 1) \quad (3.36)$

ゆえに  $e^2 = 1 + \frac{2l^2}{mh^2} E$   
 $= 1 + \frac{2h^2}{m(GM)^2} E \quad (3.37)$

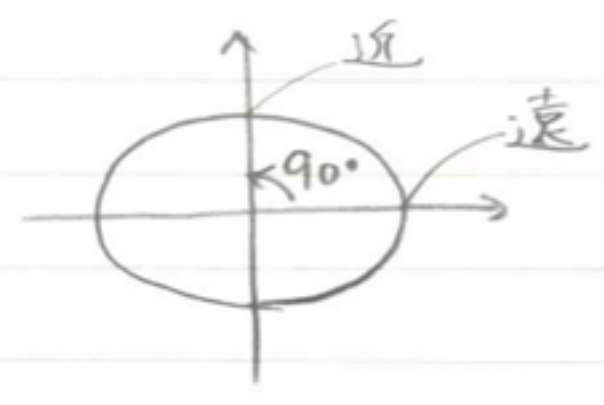
*角運動量から決まる*  
*力学的エネルギー*  
*保存量*  
*初期条件から決まる*

これより  $E = -\frac{mh^2}{2l^2} \rightarrow e = 0: \text{円}$   
 $-\frac{mh^2}{2l^2} < E < 0 \rightarrow 0 < e < 1: \text{楕円}$   
 $E = 0 \rightarrow e = 1: \text{放物線}$   
 $E > 0 \rightarrow e > 1: \text{双曲線}$

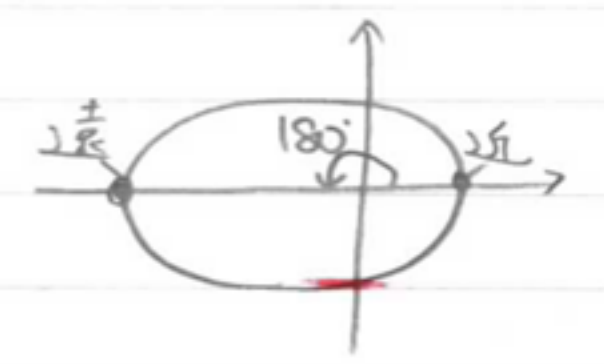
$\frac{1}{r^2}$  以外の力の場合

$$F = (-kx, -ky) \rightarrow |F| \text{は } \sqrt{x^2+y^2} = r \text{ に比例}$$

一般に軌道は円  
(原点中心)



cf  $\frac{1}{r^2}$  90度



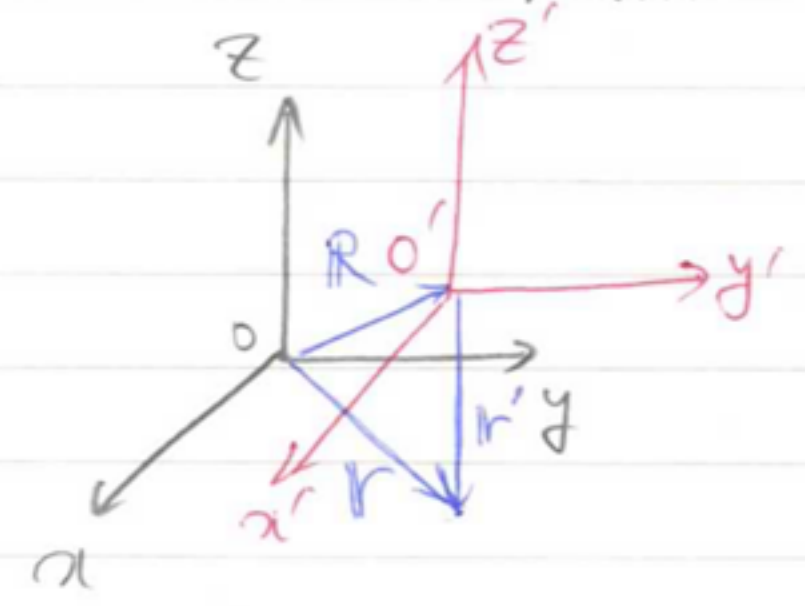
$\frac{1}{r^2}$  以外の中心力

→ 軌道は一般には閉じない

### 第4章 非慣性系における運動

#### 4.1 並進加速度座標系

慣性系  $O-xyz$  に対して、座標軸を平行に保ち、  
移動する座標系  $O'-x'y'z'$  を考える。



$O-xyz, O'-x'y'z'$  で表した  
質点の座標を  $r, r'$  とし、  
 $O$  から見た  $O'$  の座標を  $R$   
とすると、

$$r = r' + R \quad (4.1)$$

(4.1)より

$$m \frac{d^2 r}{dt^2} = m \frac{d^2 r'}{dt^2} + m \frac{d^2 R}{dt^2} \quad (4.2)$$

慣性系では  $m \frac{d^2 r}{dt^2} = F$  となる

$$m \frac{d^2 r'}{dt^2} = F - m \frac{d^2 R}{dt^2} \quad (4.3)$$



$\frac{d^2 R}{dt^2} = 0$  なり (4.3) は ニュートンの運動方程式

すなわち、ある慣性系に対し、一定速度で平行移動している座標系は慣性系である。

ある慣性系から別の慣性系への変換をガリレイ変換という。

$m \cdot \frac{d^2 R}{dt^2} \neq 0$  の場合、実際の力  $F$  に加えて、

見かけの力  $-m \frac{d^2 R}{dt^2}$  が働く。この力を慣性力という。

→ 慣性力が現れる座標系：非慣性系

## 4.2 回転座標系

### 4.2.1 角速度ベクトル

原点を通る固定した軸のまわりに回転している質点を考える

角速度ベクトル

大きさ：単位時間あたりの回転角  $\omega$

方向：回転軸に平行で、回転の向きに右ネジを

まわしたときに右ネジの進む方向 → 図2

質点の位置ベクトル  $r$  と角速度ベクトル  $\omega$

のなす角度を  $\theta$  とすると、質点の速さは

$\omega r \sin \theta$ 、速度の方向は  $\omega$  と  $r$  に垂直。(図2)

回転の半径

よって

$$v = \frac{dr}{dt} = \omega \times r \quad (4.4)$$

### 4.2.2 等速回転座標系

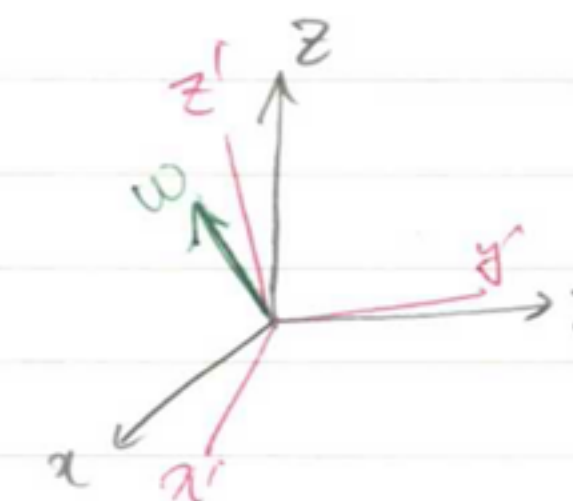
慣性系  $O-xyz$  の原点を通る回転軸のまわりに一定の角速度ベクトル  $\omega$  で回転する等速回転座標系  $O-x'y'z'$  を考える。

それぞれの座標系でみた位置ベクトルを  $r, r'$  とする

$$r = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k} \quad (4.5)$$

$$r' = x'\hat{i}' + y'\hat{j}' + z'\hat{k}' \quad (4.6)$$

( $r = r'$  に注意)



$O-x'y'z'$  における見かけの速度・加速度は

$$v' = \frac{dx'}{dt}\hat{i}' + \frac{dy'}{dt}\hat{j}' + \frac{dz'}{dt}\hat{k}' \quad (4.7)$$

$$a' = \frac{d^2x'}{dt^2}\hat{i}' + \frac{d^2y'}{dt^2}\hat{j}' + \frac{d^2z'}{dt^2}\hat{k}' \quad (4.8)$$

一方、 $O-xyz$  で見ると、 $\hat{i}', \hat{j}', \hat{k}'$  は  $\omega$  で回転しているので、

(4.9)より

$$\frac{d\hat{i}'}{dt} = \omega \times \hat{i}', \quad \frac{d\hat{j}'}{dt} = \omega \times \hat{j}', \quad \frac{d\hat{k}'}{dt} = \omega \times \hat{k}' \quad (4.9)$$

(4.6) の両辺を時間で微分する。  $r = r'$  より  $v = \frac{dr}{dt} = \frac{dr'}{dt}$

$O-xyz$  で見た速度

$$v = \frac{dx'}{dt}\hat{i}' + \frac{dy'}{dt}\hat{j}' + \frac{dz'}{dt}\hat{k}' + x\frac{d\hat{i}'}{dt} + y\frac{d\hat{j}'}{dt} + z\frac{d\hat{k}'}{dt}$$

$$\stackrel{(4.9)}{=} \underbrace{\frac{dx'}{dt}\hat{i}' + \frac{dy'}{dt}\hat{j}' + \frac{dz'}{dt}\hat{k}'}_{v'} + \underbrace{\omega \times (x\hat{i}' + y\hat{j}' + z\hat{k}')}_{\omega \times r'} \quad (4.10)$$

(4.9), (4.7)より

$$v = v' + \omega \times r' \quad (4.11)$$



同様に (4.11) を時間微分して

$$\dot{\mathbf{a}} = \dot{\mathbf{a}}' + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') \quad (4.12)$$

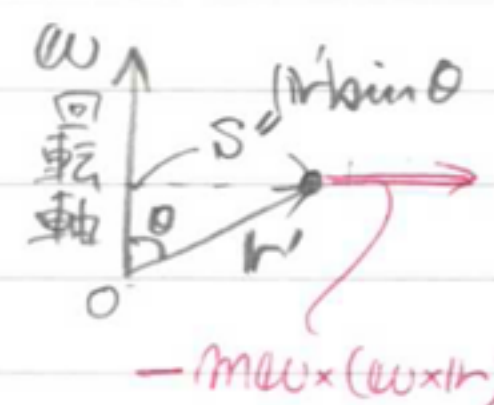
$m\mathbf{a} = \mathbf{F}$  を代入して 真の力

$$m\mathbf{a}' = \mathbf{F} - 2m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' - m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') \quad (4.13)$$

第二項目: コリオリ力 } 回転座標系における慣性力  
第三項目: 遠心力

回転系で見て静止 ( $\mathbf{v}' = 0$ ) している物体には遠心力のみ。

回転軸までの距離を  $S$  として遠心力の大きさは  $mS\omega^2$



回転系で静止している物体では  
遠心力と向心力が釣り合っている  
→ 16.9 図1

回転系で見て運動している物体 → コリオリ力

速度  $\mathbf{v}'$  と回転軸のなす角度を  $\theta$  とすると、

コリオリ力の大きさは  $2m\omega v' \sin\theta$

向きは  $\mathbf{v}'$  に垂直

[例題] → ポイント No. 9

[解答]  $\mathbf{v}' = \mathbf{r}'\boldsymbol{\omega}$

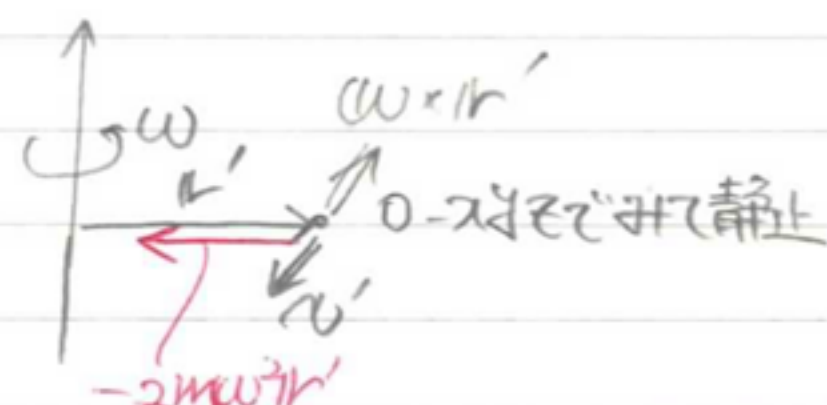
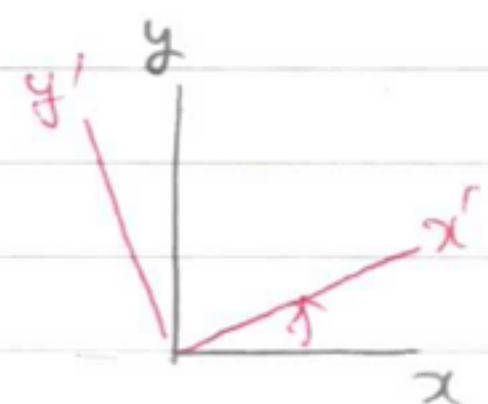
$$m\mathbf{a}' = 0 - 2m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' + m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') \\ = -m\omega^2 \mathbf{r}' \quad (\text{見かけの向心力})$$

特に2次元の場合

$\boldsymbol{\omega} = (0, 0, \omega)$  回転系

$\mathbf{r}' = (x', y', 0)$  回転系

$\mathbf{v}' = (v_x', v_y', 0)$  回転系 として



運動方程式は、

$$m \frac{d^2 x'}{dt^2} = F_x' + 2m\omega \frac{dy'}{dt} + m\omega^2 x' \quad (4.14)$$

$$m \frac{d^2 y'}{dt^2} = F_y' - 2m\omega \frac{dx'}{dt} + m\omega^2 y' \quad (4.15)$$

コリオリ力の生じるわけ → ポイント No. 9 図2

#### 4.2.3 地表に固定した座標系から見た運動

地球の中心から見た質点の位置  $\mathbf{r}$ , 地表の定点の位置  $\mathbf{R}$   
この定点から見た質点の位置  $\mathbf{r}'$  とする

$$\mathbf{r} = \mathbf{R} + \mathbf{r}' \quad (4.16) \rightarrow \text{図3}$$

4.2.2 の  $\mathbf{r}'$  とは違ふ

地球の万有引力を  $m\mathbf{g}_0$ , それ以外の力  $\mathbf{F}$  とすると  
(4.13) より

$$m\mathbf{a}' = \mathbf{F} + m\mathbf{g}_0 - 2m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' - m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{R} + \mathbf{r}')) \quad (4.17)$$

回転軸上に原点

$r' \ll R$  として  $\mathbf{R} + \mathbf{r}' \simeq \mathbf{R}$  と近似すると

遠心力は一定。地上での重力  $m\mathbf{g}$  は  $m\mathbf{g}_0$  と遠心力の和

$$m\mathbf{g} = m\mathbf{g}_0 - m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}) \quad (4.18)$$

緯度を  $\theta$  とすると  $\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R})$  の大きさは  $R\omega^2 \cos\theta$  となる

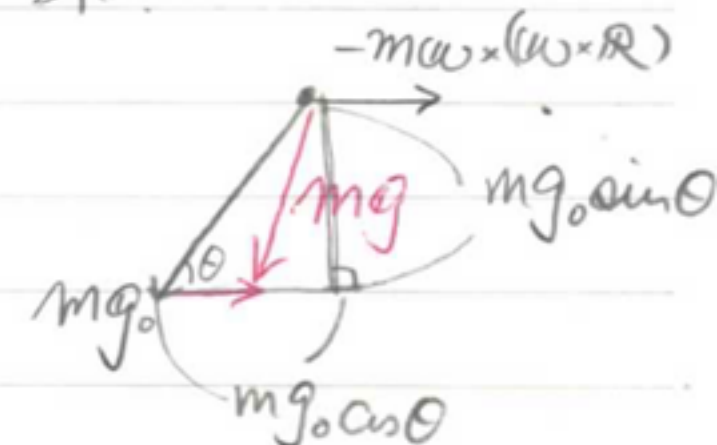
$$g = \sqrt{(g_0 \sin\theta)^2 + (g_0 \cos\theta - R\omega^2 \cos\theta)^2}$$

$$= (g_0^2 - 2g_0 R\omega^2 \cos^2\theta + R^2 \omega^4 \cos^2\theta)^{\frac{1}{2}}$$

$$= g_0 \left( 1 - \frac{2R\omega^2}{g_0} \cos^2\theta + \left( \frac{R\omega^2}{g_0} \right)^2 \cos^2\theta \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$g_0 = \frac{GM}{R^2} \simeq 9.8 \text{ m/s}^2$$

$$R = 6.37 \times 10^6 \text{ m}, \quad \omega = \frac{2\pi}{24 \times 3600} \text{ rad/s} \rightarrow \frac{R\omega^2}{g_0} \ll 1$$





$$\approx g_0 \left(1 - 2 \frac{R\omega^2}{g_0} \cos^2 \theta\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\approx g_0 \left(1 - \frac{R\omega^2}{g_0} \cos^2 \theta\right) \quad \left( (1+\epsilon)^x \approx 1+x\epsilon \right. \\ \left. (\epsilon \ll 1 \text{ 程度}) \right)$$

$$= g_0 - R\omega^2 \cos^2 \theta \quad (4.19)$$

$$g = (9.824 - 0.034 \cos^2 \theta) \text{ m/s}^2$$

遠心力込みの重力  $mg$  で考えると (4.17) は

$$m\mathbf{a}' = \mathbf{F} + m\mathbf{g} - \underbrace{2m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}'}_{\text{コリオリ力}} \quad (4.20)$$

鉛直方向 (g の方向) に  $z'$ , 真北に  $y'$ , 真東に  $x'$  をとり,

$$x'\mathbf{i} + y'\mathbf{j} + z'\mathbf{k} = (x', y', z')_{\text{地表}} \text{ と成分表示する.}$$

$$\mathbf{v}' = \left( \frac{dx'}{dt}, \frac{dy'}{dt}, \frac{dz'}{dt} \right)_{\text{地表}}$$

$$\boldsymbol{\omega} = (0, \omega \cos \theta, \omega \sin \theta)_{\text{地表}}$$

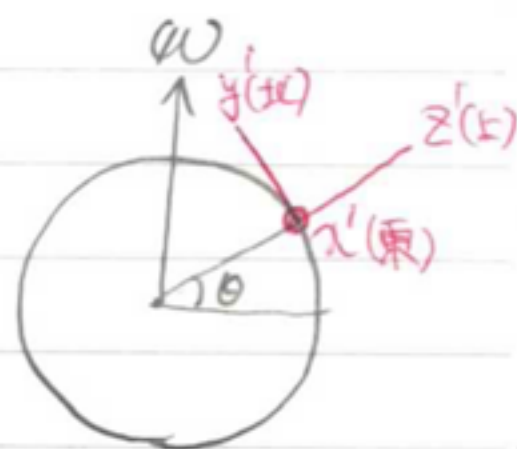
$$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' = \omega \left( \frac{dz'}{dt} \cos \theta - \frac{dy'}{dt} \sin \theta, \frac{dx'}{dt} \sin \theta, -\frac{dx'}{dt} \cos \theta \right)_{\text{地表}}$$

(4.20) は

$$m \frac{d^2 x'}{dt^2} = F_{x'} + 2m\omega \left( \frac{dy'}{dt} \sin \theta - \frac{dz'}{dt} \cos \theta \right) \quad (4.21)$$

$$m \frac{d^2 y'}{dt^2} = F_{y'} - 2m\omega \frac{dx'}{dt} \sin \theta \quad (4.22)$$

$$m \frac{d^2 z'}{dt^2} = F_{z'} - mg + 2m\omega \frac{dx'}{dt} \cos \theta \quad (4.23)$$



特に、地表付近の水平方向の運動の場合,  $z'=0$  は不変として,

$$m \left( \frac{d^2 x'}{dt^2}, \frac{d^2 y'}{dt^2} \right)_{\text{地表}} = (F_{x'}, F_{y'})_{\text{地表}} + 2m\omega \sin \theta \left( \frac{dy'}{dt}, -\frac{dx'}{dt} \right)_{\text{地表}} \quad (4.24)$$

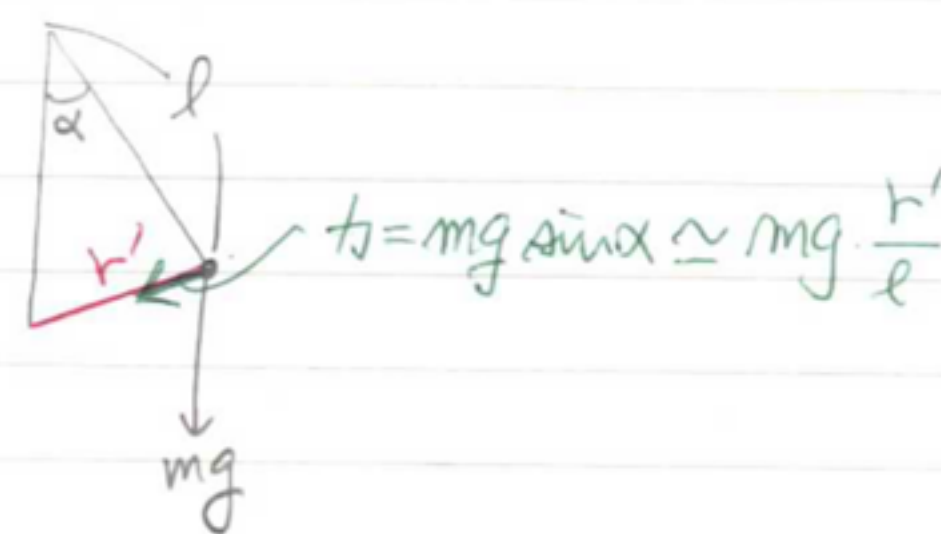
$$\mathbf{v}' = \left( \frac{dx'}{dt}, \frac{dy'}{dt} \right)_{\text{地表}}$$

070(地球)のS

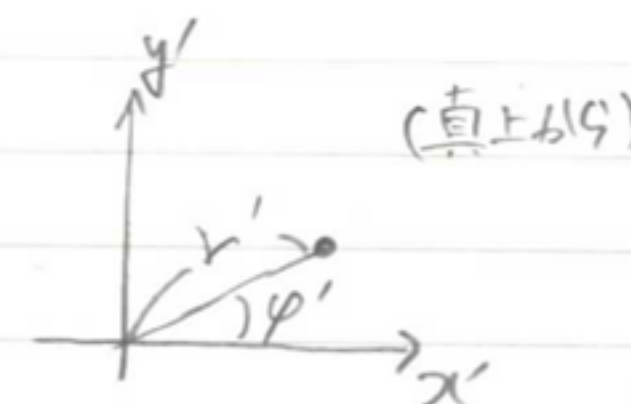
進行方向向く, 70向き

[例題] フーコーの振り子 → ポイント No.10.

[解答]



$$F = mg \sin \alpha \approx mg \frac{r'}{l}$$



(真上から)

$$\left. \begin{aligned} F_{x'} &= -\frac{mg}{l} r' \cos \varphi' = -\frac{mg x'}{l} \\ F_{y'} &= -\frac{mg}{l} r' \sin \varphi' = -\frac{mg y'}{l} \end{aligned} \right\} \quad (4.25)$$

$$\left. \begin{aligned} (4.24) \text{ は } m \frac{d^2 x'}{dt^2} &= -\frac{mg}{l} x' + 2m\omega \frac{dy'}{dt} \sin \theta \\ m \frac{d^2 y'}{dt^2} &= -\frac{mg}{l} y' - 2m\omega \frac{dx'}{dt} \sin \theta \end{aligned} \right\} \quad (4.26)$$

(4.26) の第1式に  $-\frac{y'}{m}$ , 第2式に  $\frac{x'}{m}$  を加けて辺々加えたものを  $t$  で積分すると

$$x' \frac{dx'}{dt} - y' \frac{dy'}{dt} = -\omega (x'^2 + y'^2) \sin \theta + \text{積分定数} \quad (4.27)$$



$$x' = r' \cos \varphi', \quad y' = r' \sin \varphi' \text{ 等 (4.27) は}$$

$$r'^2 \frac{d\varphi'}{dt} = -\omega r'^2 \sin \theta + \text{積分定数}$$

特に、 $r' = 0$  を通るようには振動をおこしたとすると、積分定数 = 0

$$\frac{d\varphi'}{dt} = -\omega \sin \theta \quad (4.29) \rightarrow 0 > 0 \text{ なる角速度 } \omega \sin \theta \text{ で時計回り}$$

## 第5章 質点系の力学

### 5.1 運動量

外力：質点系の外から各質点に作用する力  $F_i$  ← i 番目の質点に作用

内力：質点間に働く力：i 番目が j 番目に及ぼす力  $F_{ij}$

作用・反作用の法則  $F_{ij} = -F_{ji}$

i 番目の質点の運動方程式

$$m_i \frac{d^2 r_i}{dt^2} = F_i + \sum_{j \neq i} F_{ij} \quad (5.1)$$

i 番目の質点の質量      i 番目の質点の位置座標

(5.1) の両辺を、i について和をとる

$$\sum_i m_i \frac{d^2 r_i}{dt^2} = \sum_i F_i + \sum_i \sum_{j \neq i} F_{ij} = \sum_i F_i$$

全ての質点について      作用・反作用で 0

ここで、重心の位置ベクトルを

$$R = \frac{\sum_i m_i r_i}{\sum_i m_i} = \frac{\sum_i m_i r_i}{M} \quad (5.3)$$

と定義。

( $M = \sum_i m_i$  : 質量の総和)

重心の速度は

$$V = \frac{dR}{dt} = \frac{\sum_i m_i v_i}{M} \quad (5.4)$$

P を全質点系の運動量として

$$P = \sum_i m_i v_i \stackrel{(5.4)}{=} M V \quad (5.5)$$

これは、 $M \frac{d^2 R}{dt^2} \stackrel{(5.3)(5.2)}{=} \sum_i F_i$  又は  $\frac{dP}{dt} = \sum_i F_i \quad (5.6)$

特に、外力がゼロときは全運動量は変化しない。  
これを運動量保存則という。

### 5.2 力学的エネルギー

#### 5.2.1 運動エネルギー

各質点の運動 = 重心の運動 + 重心から見た相対運動

位置  $r_i = R + r_i'$  (5.7) 相対座標

速度  $v_i = V + v_i'$  (5.8) 相対速度

全運動エネルギーは

$$K = \frac{1}{2} \sum_i m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \sum_i m_i V^2 + \sum_i m_i V \cdot v_i' + \frac{1}{2} \sum_i m_i v_i'^2$$

0 (後述)      (5.9)



$$\text{一方, } M\mathbf{R} = \sum_i m_i \mathbf{r}_i = \underbrace{\sum_i m_i \mathbf{R}}_{M\mathbf{R}} + \sum_i m_i \mathbf{r}_i' \quad (5.10)$$

$$\text{よ}, \sum_i m_i \mathbf{r}_i' = 0 \rightarrow \sum_i m_i \mathbf{v}_i' = 0$$

$$\text{よ}, K = \underbrace{\frac{1}{2} M V^2}_{\text{重心運動}} + \underbrace{\frac{1}{2} \sum_i m_i v_i'^2}_{\text{相対運動}} \quad (5.11)$$

### 5.2.2 ポテンシャルエネルギー

外力も、内力も保存力とする

$$\text{外力によるポテンシャルエネルギー} \quad (2.17) \text{より}$$

$$U_i(\mathbf{r}_i) = - \int_{\infty}^{\mathbf{r}_i} \mathbf{F}_i(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} \quad (5.12)$$

基準

内力によるポテンシャルエネルギー

質点  $j$  が  $i$  に及ぼす力を  $\mathbf{F}_{ij}(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)$  と書く

$$U_{ij}(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) = - \int_{\infty}^{\mathbf{r}_i} \mathbf{F}_{ij}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j) \cdot d\mathbf{r} \quad (5.13)$$

全ポテンシャルエネルギーは

$$U = \sum_i U_i(\mathbf{r}_i) + \sum_{i > j} U_{ij}(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \quad (5.14)$$

和は  $i$  と  $j$  の組について取る

### 5.3 2体問題

2つの質点が互いに力を及ぼし合っている運動

外力はなし。

$$m_1 \frac{d^2 \mathbf{r}_1}{dt^2} = \mathbf{F}_{12}, \quad m_2 \frac{d^2 \mathbf{r}_2}{dt^2} = \mathbf{F}_{21} = -\mathbf{F}_{12} \quad (5.15)$$

重心は

$$\mathbf{R} = \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2}{M} \quad (5.16)$$

重心の運動方程式

$$M \frac{d^2 \mathbf{R}}{dt^2} = 0 \quad (5.17) \quad \rightarrow \text{重心は等速度運動}$$

質点2に対する質点1の相対的位置ベクトル

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 \quad (5.18)$$

(5.15)の両辺を  $m_1, m_2$  で割り、差をとると

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \left( \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) \mathbf{F}_{12} \quad (5.19)$$

(5.19) は

$$\mu \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{F}_{12} \quad (5.20)$$

ここで

$$\mu = \left( \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right)^{-1} = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \quad (5.21)$$

換算質量  $\rightarrow$  2体問題は1体問題に帰着



## 5.4 衝突



一次元(一直線上)の衝突も考える。

勢力 → 内力

|   |       |       |        |
|---|-------|-------|--------|
| 運動量保存則                                    | 質量    | 衝突前   | 後      |
| $m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_1' + m_2 v_2'$ | $m_1$ | $v_1$ | $v_1'$ |
| (5.22)                                    | $m_2$ | $v_2$ | $v_2'$ |

通常、衝突の前後の相対速度の比は一定。

$$\frac{v_1' - v_2'}{v_1 - v_2} = -e \quad (5.23)$$

 $e$ : 反発(はねかえり)係数

重心の速度

$$V = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 v_1' + m_2 v_2'}{m_1 + m_2} \quad (5.24)$$

この速さで移動する座標系を重心系という。

これに対して実験室に固定された座標系を実験室系という。

重心系: 重心が静止, 全運動量は0

重心系での衝突前の速度  $u_1, u_2$ 

$$u_1 = v_1 - V = \frac{m_2}{m_1 + m_2} (v_1 - v_2) \quad (5.25)$$

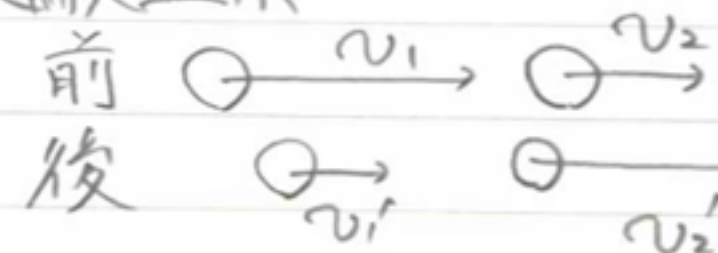
$$u_2 = v_2 - V = -\frac{m_1}{m_1 + m_2} (v_1 - v_2) \quad (5.26)$$

衝突後  $u_1', u_2'$ 

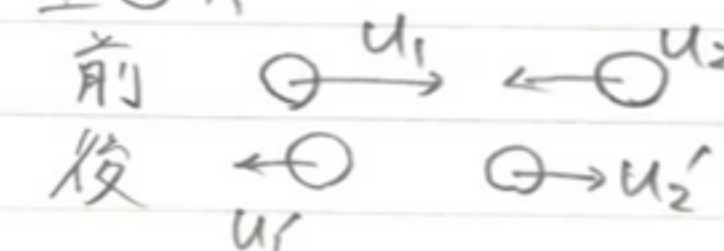
$$u_1' = v_1' - V = \frac{m_2}{m_1 + m_2} (v_1' - v_2') = -e u_1 \quad (5.27)$$

$$u_2' = v_2' - V = -\frac{m_1}{m_1 + m_2} (v_1' - v_2') = -e u_2 \quad (5.28)$$

実験室系



重心系



重心系における運動エネルギー

(5.25) (5.26)

$$\text{前} \quad \frac{1}{2} m_1 u_1^2 + \frac{1}{2} m_2 u_2^2 = \frac{1}{2} \mu (v_1 - v_2)^2 \quad (5.29)$$

$$\text{後} \quad \frac{1}{2} m_1 u_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 u_2'^2 = \frac{1}{2} e^2 \mu (v_1 - v_2)^2 \quad (5.30)$$

→ 重心系での運動エネルギー = 相対運動の運動エネルギー

実験室系の運動エネルギーは重心の運動エネルギー + 相対運動の運動エネルギー

 $e^2$  は衝突前後の相対運動のエネルギーの比。 $e=1$  では衝突前後でエネルギー不変: 弾性衝突 $e<1$  のとき: 非弾性衝突

## 5.5 質点系の角運動量

各質点の、原点のまわりの角運動量  $L_i = m_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_i$ 

$$\frac{dL_i}{dt} = \mathbf{r}_i \times (\mathbf{F}_i + \sum_{j \neq i} \mathbf{F}_{ij}) \quad (5.31)$$

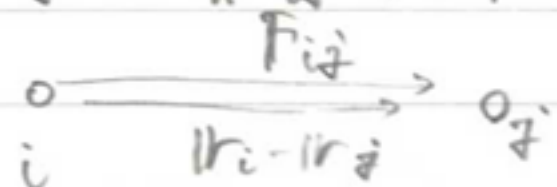
これに働く全ての力

$$\frac{d}{dt} \underbrace{\sum_i L_i}_{\text{全角運動量 } L} = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i + \sum_i \sum_{j \neq i} \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{ij} \quad (5.32)$$

$$\begin{aligned} \text{ここで: } & \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{ij} + \mathbf{r}_j \times \mathbf{F}_{ji} \\ &= (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \times \mathbf{F}_{ij} \quad (\text{作用・反作用}) \end{aligned}$$



もし  $r_i - r_j$  と  $F_i$  の向きが同じなら、外積は 0



$$\frac{dL}{dt} = \sum_i r_i \times F_i = \sum_i N_i \quad (5.33)$$

外力のモーメント

特に、 $\sum_i N_i = 0$  ならば、全角運動量は保存

重心のまわりの角運動量

$$\left. \begin{aligned} r_i &= R + r'_i \\ v_i &= V + v'_i \end{aligned} \right\} (5.35) \quad L' = \sum_i m_i r'_i \times v'_i \quad (5.36)$$

このとき、

$$\frac{dL'}{dt} = \sum_i r'_i \times F_i \quad (5.37)$$

重心のまわりの全外力のモーメント

→ [問題5]

## 第6章 剛体の力学

大きさのある物体：無限個の質点（微小部分）の集まり

剛体：力が加わっても変形しない

→ 物体内の任意の2点  $r_1, r_2$  について

相対距離  $|r_1 - r_2|$  が一定

### 6.1 剛体の運動方程式

力学系を記述するのに必要な変数の数：自由度

1 質点、3次元 → x, y, z の自由度 3

N 質点系 → 自由度 3N

振り子 → 自由度 1

プリント No. 12 図1

P, Q, R の 3 点の座標を定めれば

剛体は固定される。これに必要な変数は  $3 \times 3 = 9$

PQ, QR, PR の距離は一定なので、この分自由度は減る。

自由度 =  $9 - 3 = 6$

重心の運動：3次元  
+ 回転運動：3次元 } 6 → 運動方程式も 6 個

$$\left. \begin{aligned} \text{重心} \\ (5.6) \rightarrow \frac{dP}{dt} &= M \frac{d^2 R}{dt^2} = \sum_i F_i \rightarrow 3 \\ \text{回転} \\ (5.33) \times (5.37) \quad \frac{dL}{dt} &= \sum_i r_i \times F_i \quad \text{または} \quad \frac{dL'}{dt} = \sum_i r'_i \times F_i \rightarrow 3 \end{aligned} \right\} (6.1)$$

P: 全運動量, M: 全質量, R: 重心の座標  
L: 全角運動量, L': 重心のまわりの全角運動量

剛体を微小部分の集まりと考え、i番目の微小部分の座標を  $r_i$ 、そこに働く外力を  $F_i$  とする。

剛体に作用する力

$$F = \sum_i F_i, \quad N = \sum_i r_i \times F_i \quad (6.2)$$

特に重力の場合

$$F_{xi} = 0, F_{yi} = 0, F_{zi} = -m_i g \quad (6.3)$$

合力は

$$F_x = 0, F_y = 0, F_z = -Mg \quad (M = \sum_i m_i) \quad (6.4)$$



原点のまわりの力のモーメント

$$N_x = \sum_i y_i F_{zi} = - \sum_i y_i m_i g = y_G F_z, \quad N_y = \sum_i (-x_i F_{zi})$$

重心の座標

$$= \sum_i x_i m_i g = -x_G F_z \quad (6.5)$$

$$N_z = 0.$$

(6.5) → 重心に全ての力があつたときの力のモーメントに等しい。

剛体に働く力がつりあつて静止している場合

$$F = 0, \quad N = 0 \quad (6.6)$$

剛体の連続体のとき、微小部分についての和は積分となる。点 $r$ における密度を $\rho(r)$

全質量  $M = \int \rho(r) dV$  微小部分の質量  $dV$  微小体積  $dxdydz$  (6.7)

重心の座標  $R = \frac{\int r \rho(r) dV}{\int \rho(r) dV}$  (6.8)

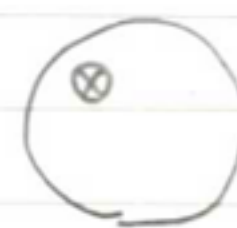
$$cf \quad R = \frac{\sum_i m_i r_i}{\sum_i m_i}$$

全運動量, 角運動量

$$P = \int \frac{dr}{dt} \rho(r) dV, \quad L = \int r \times \frac{dr}{dt} \rho(r) dV \quad (6.9)$$

## 6.2 固定軸のある剛体の運動

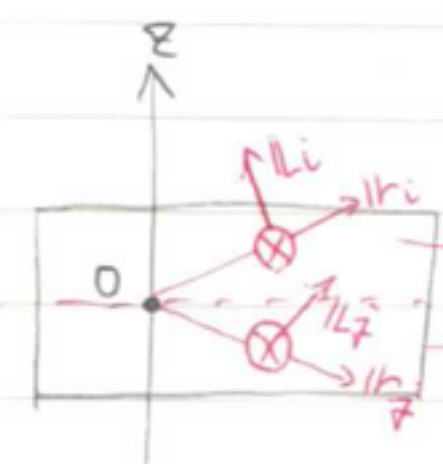
固定軸の方向を $z$ にとる



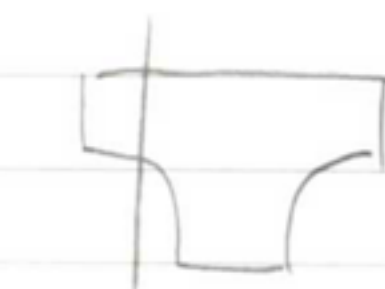
固定軸上に原点 $O$ をとり、 $O$ のまわりの

$$\text{角運動量 } L = \sum_i m_i r_i \times v_i \quad (6.10)$$

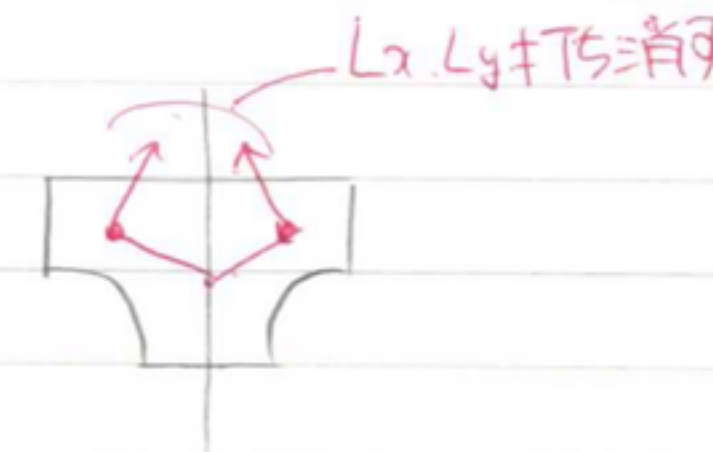
が $z$ 成分のみを持つ場合を考える。



$\pm z$ で $L_x, L_y$ については打ち消す。



$L_x, L_y$ は残る。



$L_x, L_y$ 打ち消す

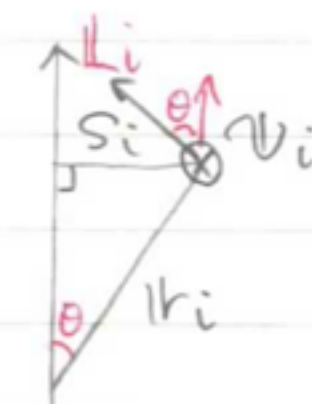
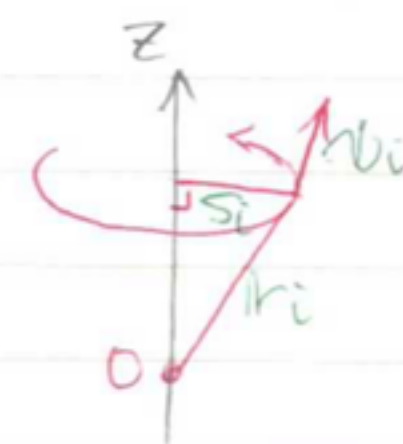


自由度1 → 方程式も1

剛体の角速度を $\omega$ とて

$$L_z = \sum_i m_i s_i^2 \omega \quad (6.11)$$

$$L_z = I \omega, \quad I = \sum_i m_i s_i^2 = \int \rho(r) s^2(r) dV = \int \rho(r) (x^2 + y^2) dV \quad (6.12)$$



$$L_{iz} = m_i r_i \sin \theta \frac{ds_i}{dt} \omega = m_i s_i^2 \omega$$

を慣性モーメントとて。



方程式(6.1)は

$$I \frac{d\omega}{dt} = N_z \quad (6.13)$$

[例] 物理振り子



質量M, 固定軸と重心の距離をh  
固定軸のまわりの慣性モーメントをI

$$N_z = -Mgh \sin \phi \approx -Mgh \phi$$

$$I \frac{d^2 \phi}{dt^2} = -Mgh \phi \quad (6.14)$$

これより,

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{Mgh}} \quad (6.15) \quad \text{周期を持つ単振動}$$

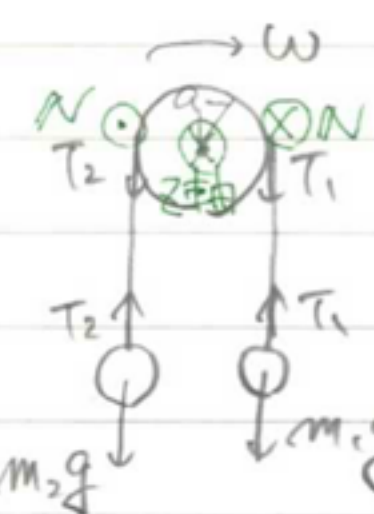
[平行軸の定理]

質量Mの剛体の重心を通る回転軸まわりの  
慣性モーメントを $I_0$ , 2の軸に平行で距離d  
離れた回転軸まわりの慣性モーメントをIとすると

$$I = I_0 + Md^2 \quad (6.16)$$

[問題1.3]

プリントNo. 12 [例題]



$$m_1 a \frac{d\omega}{dt} = m_1 g - T_1 \quad (6.17)$$

$$m_2 a \frac{d\omega}{dt} = T_2 - m_2 g \quad (6.18)$$

回転 (6.1) → (6.13) :  $I_0 \frac{d\omega}{dt} = a(T_1 - T_2) \quad (6.19)$

これより,  $T_1, T_2$  を消去して

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2 + \frac{I_0}{a^2}} \frac{g}{a} \quad (6.20)$$

$$\omega = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2 + \frac{I_0}{a^2}} \cdot \frac{g}{a} \cdot t \quad (6.21)$$

6.3 剛体の平面運動

剛体から同一平面内を運動する場合,

$$\left. \begin{aligned} \text{重心回り} \quad \text{重心} \quad M \frac{d^2 r}{dt^2} &= \frac{dP}{dt} = \sum_i F_i \\ \text{重心回りの} \quad I_0 \frac{d^2 \theta}{dt^2} &= \sum_i N_i \end{aligned} \right\} \quad (6.22) \quad \text{剛体の各部に作用する力の合計}$$

$r$  は重心の座標,  $I_0$  は重心回りの慣性モーメント

$\theta$  は重心回りの回転角,  $N_i$  は外力の重心回りのモーメントのz成分

[例題1] → フォントNo. 13.

$$\text{重心} \quad \begin{cases} M \frac{d^2 x}{dt^2} = Mg \sin \alpha - F \quad (6.23) \end{cases}$$

$$\begin{cases} M \frac{d^2 y}{dt^2} = R - Mg \cos \alpha = 0 \quad (6.24) \end{cases}$$

y方向の運動なし

$$\text{回転} \quad I_0 \frac{d\omega}{dt} = aF \quad (6.25)$$

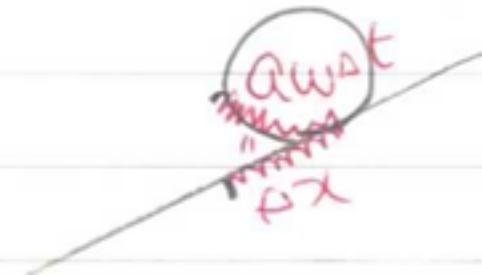
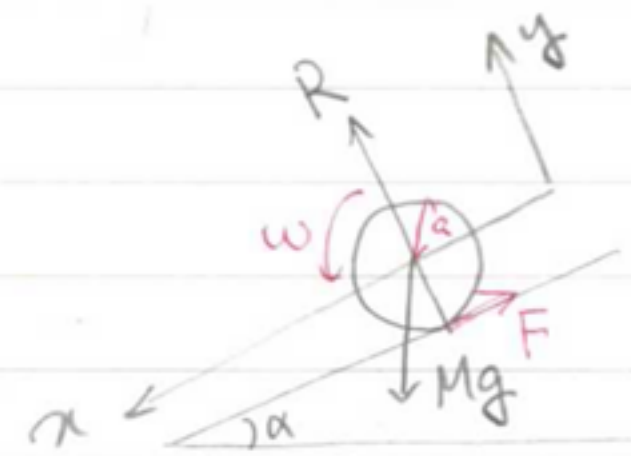
すべりなし条件  $a\omega \sin \alpha = \Delta x$

$$\frac{dx}{dt} = a\omega \quad (6.26)$$

これより,

$$Ma \frac{d\omega}{dt} = Mg \sin \alpha - F \quad (6.27)$$

$$(6.24) \text{より} \quad R = Mg \cos \alpha \quad (6.28)$$





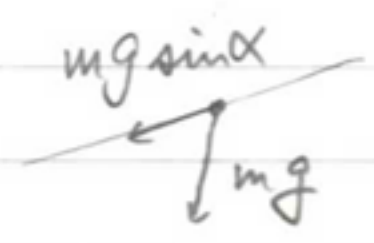
次に (6.27), (6.25) より

$$a \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\alpha}{dt^2} = \frac{g \sin \alpha}{1 + \frac{I_0}{Ma^2}}$$

↑  $\frac{5}{7} g \sin \alpha$  (6.29)

↑ ポイント No. 12 [問2]

質点のとき



$m \frac{d^2\alpha}{dt^2} = m g \sin \alpha$

↑ 慣性質量      ↑ 重力

本質的には異なりが  
値が等しい

(6.27) より  $F = \frac{Mg \sin \alpha}{1 + \frac{Ma^2}{I_0}} = \frac{2}{7} Mg \sin \alpha$  (6.30)

(6.29) より  $\omega = \frac{1}{a} \frac{d\alpha}{dt} = \frac{5}{7} \cdot \frac{g}{a} t \sin \alpha$  (6.31)

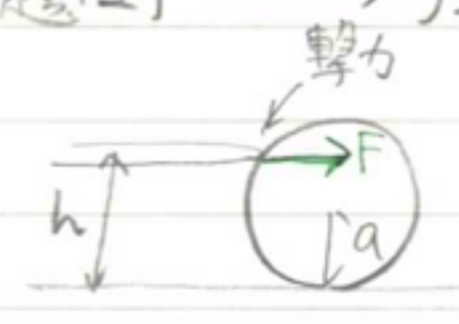
すべりを生じないための条件は

$$F \leq \mu_0 R$$

(6.28)(6.30) より

$$\frac{2}{7} \tan \alpha \leq \mu_0 \quad (6.32)$$

[例題2] → ポイント No. 13



棒からの撃力Fが働いている間の運動方程式

$$\frac{dP}{dt} = F, \quad I \frac{d\omega}{dt} = (h-a)F \quad (6.33)$$

(6.33)の第一式を撃力が働いている時間にわたって積分

$$\Delta P = \int F dt \quad (6.34)$$

↑ 運動量変化      ↑ 力積

第二式

$$I \Delta \omega = (h-a) \int F dt \quad (6.35)$$

$$\Delta P = MV, \quad \Delta \omega = \omega$$

ただしV, ωは突いた直後の重心の速度と回転の角速度

$$I = \frac{2}{5} Ma^2$$

(6.34)(6.35) から  $\int F dt$  を消去して

$$V = \frac{2}{5} \frac{a^2}{h-a} \omega \quad (6.36)$$

すべらずにこするためには

$$V = a\omega$$

より

$$h = \frac{7}{5} a \quad (6.37)$$