

2004年度 振動・波動論(吉岡大二郎) 解答例 作成: 磯口・井田・遠藤

[1]

(1) 重ね合わせの原理は、運動方程式が線形微分方程式になるため、成立する。
 例としては、水面上の離れた二点で同じ周期の波を出し続けると定常波が出来る事。
 (波の干渉も OK だと思われます)

(2) ある有限長の波が単色波の重ねあわせで作られている、と考えた時、その波の中心(振幅が最大値)の移動速度 dw/dk (k は波数、 w は角振動数)が群速度であり、一方で個々の単色波の進む速さ w_0/k_0 が位相速度である。

[2]

(1)

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 = -k_1x_1 + k_2(x_2 - x_1) & \dots(2.1) \\ m\ddot{x}_2 = -k_2(x_2 - x_1) - k_3x_2 & \dots(2.2) \end{cases}$$

(2) $x_j = C_j e^{i\omega t}$ ($j = 1, 2$) とおくと、

$$(2.1)\text{より、} -m\omega^2 + k_1C_1 e^{i\omega t} - k_2(C_2 - C_1)e^{i\omega t} = 0 \quad \dots(2.3)$$

$$\therefore (-m\omega^2 + k_1 + k_2)C_1 - k_2C_2 = 0 \quad \dots(2.4)$$

$$\text{同様に(2.2)から、} -k_2C_1 + (-m\omega^2 + k_2 + k_3)C_2 = 0 \quad \dots(2.5)$$

$(C_1, C_2) \neq (0, 0)$ なる C_1, C_2 が存在するには、

$$\det \begin{pmatrix} -m\omega^2 + k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & -m\omega^2 + k_2 + k_3 \end{pmatrix} = 0$$

ここで計算をがんばると

$$m^2\omega^4 - (k_1 + 2k_2 + k_3)m\omega^2 + (k_1k_2 + k_2k_3 + k_3k_1) = 0 \quad \dots(2.6)$$

判別式を D' としてがんばると、

$$D' = m^2\{(k_1 - k_3)^2 + 4k_2^2\} \equiv m^2D$$

よって(2.6)を解くと、

$$\omega^2 = \frac{(k_1 + 2k_2 + k_3) \pm \sqrt{D}}{2m}$$

$w_1 < w_2$ より、

$$w_1 = \sqrt{\frac{(k_1 + 2k_2 + k_3) - \sqrt{D}}{2m}} \quad , \quad w_2 = \sqrt{\frac{(k_1 + 2k_2 + k_3) + \sqrt{D}}{2m}}$$

(3)

問題文の条件 $k_1 = 4k_0, k_2 = 2k_0, k_3 = k_0$ を代入すると、

$$w^2 = \frac{9k_0 \pm 5k_0}{2m} \quad \therefore w_1 = \sqrt{\frac{2k_0}{m}} \quad , \quad w_2 = \sqrt{\frac{7k_0}{m}}$$

w_1, w_2 を(2.4)に代入すると、

• $w = w_1$ のとき、

$$(-m\omega^2 + k_1 + k_2)C_1 = k_2C_2 \quad \therefore 2C_1 = C_2$$

• $w = w_2$ のとき、

同様にして

$$\therefore C_1 = -2C_2$$

よって基準振動はそれぞれ

$$(x_1(t), x_2(t)) = (1, 2)A \sin(w_1 t + \alpha)$$

$$(x_1(t), x_2(t)) = (2, -1)B \sin(w_2 t + \beta)$$

ゆえに、求める一般解は

$$x_1(t) = A \sin(w_1 t + \alpha) + 2B \sin(w_2 t + \beta)$$

$$x_2(t) = 2A \sin(w_1 t + \alpha) - B \sin(w_2 t + \beta)$$

(4) まず、

$$\dot{x}_1(t) = \sqrt{\frac{2k_0}{m}} A \cos(w_1 t + \alpha) + 2 \sqrt{\frac{7k_0}{m}} B \cos(w_2 t + \beta)$$

$$\dot{x}_2(t) = 2 \sqrt{\frac{2k_0}{m}} A \cos(w_1 t + \alpha) - \sqrt{\frac{7k_0}{m}} B \cos(w_2 t + \beta)$$

よって

$$\begin{cases} x_1(0) = 0 \\ x_2(0) = 0 \\ \dot{x}_1(0) = u \\ \dot{x}_2(0) = 0 \end{cases} \quad \text{の条件の下でそれぞれ代入すると、}$$

$$A \sin \alpha + 2B \sin \beta = 0 \quad \cdots(2.7)$$

$$2A \sin \alpha - B \sin \beta = 0 \quad \cdots(2.8)$$

$$\sqrt{2} A \cos \alpha + 2 \sqrt{7} B \cos \beta = u \cdot \sqrt{\frac{m}{k_0}} \quad \cdots(2.9)$$

$$2 \sqrt{2} A \cos \alpha - \sqrt{7} B \cos \beta = 0 \quad \cdots(2.10)$$

(2.7)(2.8)より、

$$A \sin \alpha = B \sin \beta = 0$$

ここで $A=0$ または $B=0$ とすると、明らかに(2.9)(2.10)を満たさない。

$$\therefore \sin \alpha = \sin \beta = 0$$

よって $\cos \alpha = \cos \beta = 1$ とおける。(たとえば $\cos \alpha = -1$ とおいても、 A の符号が逆になるだけなので、このようにおいてよい。)

(2.9)(2.10)より、

$$\begin{cases} \sqrt{2} A + 2 \sqrt{7} B = u \sqrt{\frac{m}{k_0}} \\ 2 \sqrt{2} A - \sqrt{7} B = 0 \end{cases} \quad \therefore A = \frac{u}{5 \sqrt{2}} \cdot \sqrt{\frac{m}{k_0}}, \quad B = \frac{2u}{5 \sqrt{7}} \cdot \sqrt{\frac{m}{k_0}}$$

これを代入して

$$x_1(t) = \frac{u}{5} \sqrt{\frac{m}{k_0}} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \sqrt{\frac{2k_0}{m}} t + \frac{4}{\sqrt{7}} \sin \sqrt{\frac{7k_0}{m}} t \right\} \quad x_2(t) = \frac{u}{5} \sqrt{\frac{m}{k_0}} \left\{ \sqrt{2} \sin \sqrt{\frac{2k_0}{m}} t - \frac{2}{\sqrt{7}} \sin \sqrt{\frac{7k_0}{m}} t \right\}$$

[3]

$$(1) \quad \text{式: } \frac{\partial^2}{\partial t^2} \xi(x, t) = v^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \xi(x, t) \quad \cdots(3.1)$$

これより、

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + v \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial}{\partial t} - v \frac{\partial}{\partial x} \right) \xi(x, t) = 0$$

この式を満たすには、

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + v \frac{\partial}{\partial x} \right) \xi(x, t) = 0 \quad \cdots(3.2)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - v \frac{\partial}{\partial x} \right) \xi(x, t) = 0 \quad \cdots(3.3)$$

の2式のいずれかを満たせばよい。

ここで任意の微分可能な関数 f, g を用いると、(3.2)の解は、 $\xi(x, t) = f(x - vt)$

(3.3)の解は、 $\xi(x, t) = g(x + vt)$

と表せる。この2解の和も波動方程式を満たすので、求める一般解は、

$$\therefore \xi(x, t) = f(x - vt) + g(x + vt) \quad (f, g \text{ は任意の微分可能な関数})$$

- (2) 波があるとき、膜の間の区間は、幅 W 、高さ $(h + \eta(x, t))$ 、膜間の距離 $\{(x + dx + \xi(x + dx, t)) - (x + \xi(x, t))\}$ であり、この体積が波のないときの体積 $Whdx$ に等しいので、

$$W(h + \eta(x, t)) \{(x + dx + \xi(x + dx, t)) - (x + \xi(x, t))\} = Whdx$$

$$(h + \eta(x, t)) (dx + \xi(x + dx, t) - \xi(x, t)) = hdx$$

$$1 + \frac{\xi(x + dx, t) - \xi(x, t)}{dx} = \frac{h}{h + \eta(x, t)} \quad \cdots(3.4)$$

ここで $\eta(x, t)$ は波の振幅であり、微小振動であるから、 $|\eta(x, t)| \ll h$ 。

よって $\left| \frac{\eta(x, t)}{h} \right| \ll 1$ であり、

$$\frac{h}{h + \eta(x, t)} = \left(1 + \frac{\eta(x, t)}{h} \right)^{-1} = 1 - \frac{\eta(x, t)}{h} \quad \text{とすることができる。}$$

また、Taylor 展開を使うことで

$$\xi(x + dx, t) - \xi(x, t) = \frac{\partial \xi(x, t)}{\partial x} dx + \cdots \quad \text{となる。}$$

ゆえに、(3.4)式について、 ξ の最低次の項だけを残すと、

$$1 + \frac{\partial \xi(x, t)}{\partial x} = 1 - \frac{\eta(x, t)}{h}$$

$$\therefore \eta(x, t) = -h \frac{\partial \xi(x, t)}{\partial x}$$

- (3) 水面が多少高くなるが、大気圧 P_0 は一定としてよい。 $P(x, t, z, t)$ は水の重さだけによる圧力変化である。高さ z の地点では、 $(\eta(x, t) - z)$ 分、水圧がかかるので

$$\therefore P_0 + P(x, y, z, t) = P_0 + \rho(\eta(x, t) - z)g$$

- (4)** 高さ z の地点での膜 A に左からかかる圧力は $P_0 + \rho(\eta(x, t) - z)g$

膜 B に右からかかる圧力は、
$$P_0 + \rho(\eta(x + dx, t) - z)g$$

よって受ける力の和は

$$\begin{aligned} & W \int_{-h}^{\eta(x,t)} \{P_0 + \rho(\eta(x, t) - z)g\} dz - W \int_{-h}^{\eta(x+dx,t)} \{P_0 + \rho(\eta(x + dx, t) - z)g\} dz \\ &= W \left\{ P_0 \left[dz \right]_{-h}^{\eta(x,t)} - \frac{1}{2} \rho g \left[(\eta(x, t) - z)^2 \right]_{-h}^{\eta(x,t)} \right\} - W \left\{ P_0 \left[dz \right]_{-h}^{\eta(x+dx,t)} - \frac{1}{2} \rho g \left[(\eta(x + dx, t) - z)^2 \right]_{-h}^{\eta(x,t)} \right\} \\ &= -WP_0(\eta(x + dx, t) - \eta(x, t)) - \frac{1}{2} W \rho g \left\{ (\eta(x + dx, t) + h)^2 - (\eta(x, t) + h)^2 \right\} \quad \dots(3.5) \end{aligned}$$

ここで(2)の結果より、 η の 2 乗は ξ の 2 乗の項となるので無視すると、

$$(3.5) \dots -WP_0(\eta(x + dx, t) - \eta(x, t)) - Wh\rho g(\eta(x + dx, t) - \eta(x, t)) \quad \dots(3.6)$$

また水面が傾いているため、大気圧には水平成分が存在し、図の長さを l とすると、その水平成分は

$$P_0 \cdot \frac{\eta(x + dx, t) - \eta(x, t)}{l}$$

よって、かかる力の水平成分は、

$$P_0 \cdot \frac{\eta(x + dx, t) - \eta(x, t)}{l} \times Wl = WP_0(\eta(x + dx, t) - \eta(x, t)) \quad \dots(3.7)$$

求める力 F は(3.6)と(3.7)の和なので

$$F = -Wh\rho g(\eta(x + dx, t) - \eta(x, t))$$

$$= -Wh\rho g \cdot \frac{\partial \eta(x, t)}{\partial x} dx$$

$$= Wh^2 \rho g \cdot \frac{\partial^2 \xi(x, t)}{\partial x^2} dx$$

- (5) 運動方程式より

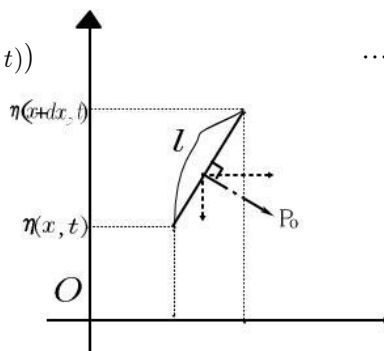
$$\rho W h dx \cdot \frac{\partial^2 \xi(x, t)}{\partial t^2} = W h^2 \rho g \cdot \frac{\partial^2 \xi(x, t)}{\partial x^2} dx$$

$$\therefore \frac{\partial^2 \xi(x, t)}{\partial t^2} = gh \frac{\partial^2 \xi(x, t)}{\partial x^2}$$

これは波動方程式である。(1)との対応により、

$$v^2 = gh \quad \therefore v = \sqrt{gh}$$

- (6) $g = 9.8 \text{ m/s}^2$ を利用して計算をがんばると、 $v = 140 \sqrt{2} \text{ m/s} = 504 \sqrt{2} \text{ km/h} \simeq 7.1 \times 10^2 \text{ km/h}$



試験範囲について

教科書全部です。ただし、授業でさらりと飛ばしたところなどは範囲外だと思います。

詳しくは1回目の授業で配られたプリントに書いてありますが、

1. 2 3. 4 3. 8 4. 3. 1 5. 4. 5~5. 8の終わりまで 6. 3. 3などが飛ばされました。

けれども、一応「興味ある人は読んでおいてください」って先生が言っていました。(by 磯口)