05年度 振動・波動論解答

[1]

(1) 連成振動子全体が1つの振動数で振動するとき、その振動の様子を基準振動とよぶ。質点N個での基準振動数は、$\omega_j = 2\sqrt{\frac{K}{m}} \sin\left|\frac{k_j a}{2}\right|$, $k_j = \frac{j\pi}{a(N+1)}$ $(1 \leq j \leq N)$

(2) 区間 $-l < x < l$ でのフーリエ級数表示を拡張したもので

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} g(k)e^{ikx}dk,\quad g(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ikx}dx$$

として関数 f を積分表示するものである。

(3) 狭い範囲の波数の波からなる波束において、波の中心の速度 $v_g = \frac{d}{dk}\omega(k)$ を群速度、個々の波の速度 $v_p = \frac{\omega_n}{k_n} \simeq \frac{\omega_0}{k_0}$ を位相速度という。$v_g \neq v_p$ では、波の進行と共に波形が発展する。

(4) 波が隙間(スリット)を通過後、進行方向を広げる現象。
θ 方向の振幅は $A(\theta) = \frac{\sin\left(\frac{a}{2}k\sin\theta\right)}{k\sin\theta}$ なので、
回折は a(スリットの間隔)$< \lambda$ のときに起こると分かる。

(参考)

(1) 基準振動数よりも、
- 質点N個でN個の基準振動がある
- 重ね合わせることで、各点の振動を記述できる

ことの方が重要かもしれません。

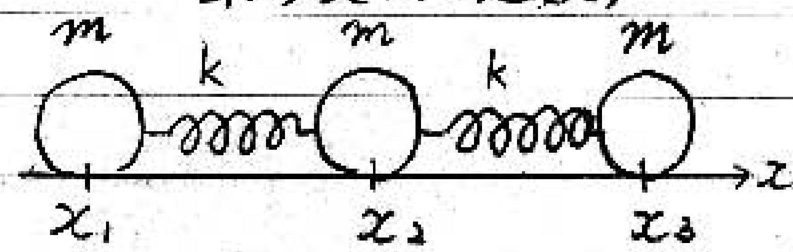
字汚くてごめんなさい…

[2]　以下、(t) 等省略することがあります

(1)

左から、物体 1, 2, 3 とする。

自然長 a（定数）



$\xi_1 = x_1 + a \quad \xi_2 = x_2 \quad \xi_3 = x_3 - a$

〈物体1〉

$$m\ddot{x}_1 = k(x_2 - x_1 - a)$$

$$\therefore \quad m\ddot{\xi}_1 = k\xi_2 - k\xi_1 \quad //$$

〈物体2〉

$$m\ddot{x}_2 = k(x_3 - x_2 - a) - k(x_2 - x_1 - a)$$

$$\therefore \quad m\ddot{\xi}_2 = k(\xi_3 - \xi_2) - k(\xi_2 - \xi_1)$$

$$m\ddot{\xi}_2 = k\xi_1 - 2k\xi_2 + k\xi_3 \quad //$$

〈物体3〉

$$m\ddot{x}_3 = -k(x_3 - x_2 - a)$$

$$\therefore \quad m\ddot{\xi}_3 = k\xi_2 - k\xi_3 \quad //$$

(2) 基準振動として、$\xi_j = c_j e^{i\omega t}$ $(j = 1, 2, 3)$ とおくと、

$$Ⓐ \begin{cases} (k - m\omega^2)c_1 - kc_2 = 0 \\ -kc_1 + (2k - m\omega^2)c_2 - kc_3 = 0 \\ -kc_2 + (k - m\omega^2)c_3 = 0 \end{cases}$$

ここに、自明でない解が存在する必要十分条件は、

$$\begin{vmatrix} k - m\omega^2 & -k & 0 \\ -k & 2k - m\omega^2 & -k \\ 0 & -k & k - m\omega^2 \end{vmatrix} = 0.$$

$$\therefore \quad m\omega^2(m\omega^2 - k)(m\omega^2 - 3k) = 0$$

より、

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{3k}{m}} \quad // \quad \text{の2つ。}$$

(3) $\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ のとき、Ⓐより、$c_1 = -c_3$, $c_2 = 0$ $\therefore \boldsymbol{e}_1 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$\omega_2 = \sqrt{\frac{3k}{m}}$ のとき、Ⓐより、$c_1 = c_3$, $c_2 = -2c_1$ $\therefore \boldsymbol{e}_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$

よって、　　　　　　← 固有ベクトル

$$(\xi_1(t), \xi_2(t), \xi_3(t)) = \sum_{j=1,2} \boldsymbol{e}_j A_j \cos(\omega_j t + \alpha_j)$$

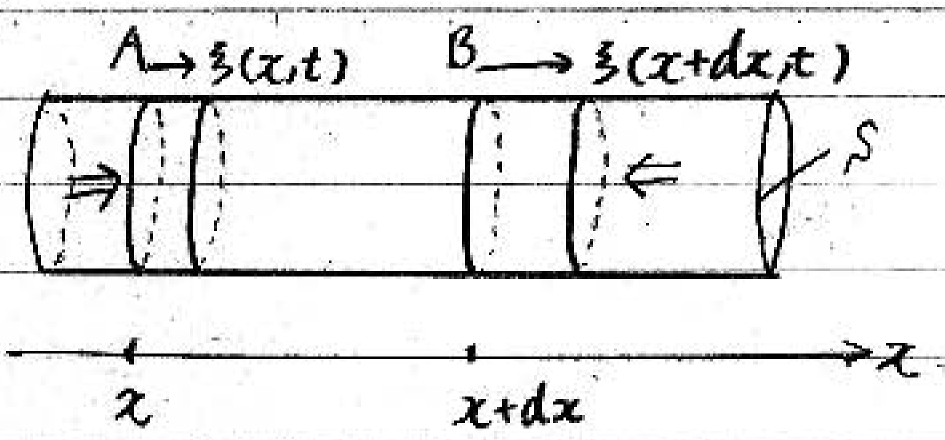
$(A_j, \alpha_j$：任意定数$)$

したがって、

$$\begin{cases} x_1(t) = -\frac{1}{\sqrt{2}}A_1\cos(\omega_1 t + \alpha_1) + \frac{1}{\sqrt{6}}A_2\cos(\omega_2 t + \alpha_2) - a \\ x_2(t) = -\frac{2}{\sqrt{6}}A_2\cos(\omega_2 t + \alpha_2) \\ x_3(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}A_1\cos(\omega_1 t + \alpha_1) + \frac{1}{\sqrt{6}}A_2\cos(\omega_2 t + \alpha_2) + a \end{cases} \quad //$$

[3]

(1) 円筒の中心軸を x 軸とし、
変位 $\xi(x,t)$ を設定すると、
これは x 軸に平行なベクトルである。



(i) AB間の体積変化

$V = S\,dx$ の変化は、

$$V + dV = S\{\xi(x+dx,t) + dx - \xi(x,t)\}$$
$$= S\left[dx + dx\frac{\partial \xi(x,t)}{\partial x}\right] \text{☆}$$

(ii) AB間の圧力変化

平衡時の圧力を P_0 とし、変化後を $P = P_0 + p(x,t)$ とすると
体積弾性率 K の定義より、

$$p = -K\frac{dV}{V} = -K\frac{\partial \xi(x,t)}{\partial x}$$

(iii) AB間の空気に働く力

$$F = \underbrace{S\,p(x,t)}_{\Rightarrow} - \underbrace{S\,p(x+dx,t)}_{\Leftarrow}$$
$$= -S\frac{\partial}{\partial x}p(x,t)\,dx \text{☆}$$
$$= SK\frac{\partial^2}{\partial x^2}\xi(x,t)\,dx$$

(iv) ニュートン方程式

AB間の空気の質量は $V\rho = S\,dx\cdot\rho$ なので

$$V\rho\frac{\partial^2 \xi(x,t)}{\partial t^2} = S\,dx\,K\frac{\partial^2 \xi(x,t)}{\partial x^2}$$
$$\therefore \frac{\partial^2 \xi(x,t)}{\partial t^2} = \frac{K}{\rho}\frac{\partial^2 \xi(x,t)}{\partial x^2}$$

両辺に、$-K\frac{\partial}{\partial x}$ を作用させ、(iii)を用いると、

$$\frac{\partial^2 p(x,t)}{\partial t^2} = \frac{K}{\rho}\frac{\partial^2 p(x,t)}{\partial x^2}$$

ただし、☆において、テイラー展開して、dx まで残す近似を行っている。